Μάθημα 11ο   Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών I (Αθανασιάδης)   18/12/2018

Άσκηση: $J(y)=\int_0^{\pi/2}(y'^2-y^2)\,dx$, $y(0)=0$, $y(\pi/2)=1$ να βρεθεί το ακρότατο να ικανοποιεί την συνθήκη
$W(y)=\int_0^{\pi/2} 2y\,dx = 6-\pi$

$L=y'^2-y^2$
$G=2y$ $\Longrightarrow$ $L^*=y'^2-y^2+2\lambda y$
$L^*=L+\lambda G$

$$L^*_y-\frac{d}{dx}L^*_{y'}=0 \Rightarrow (-2y+2\lambda)-\frac{d}{dx}(2y')=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y''+y=\lambda \\ y(0)=0,\ y(\pi/2)=1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} y_{o\mu}(x)&=C_1\sin x + C_2\cos x \\ y_r(x)&=\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(x)=y_{o\mu}(x)+y_r(x)=C_1\sin x+C_2\cos x+\lambda$$

$y(0)=0 \Rightarrow C_2=-\lambda$
$y(\pi/2)=1 \Rightarrow C_1+\lambda=1 \Rightarrow C_1=1-\lambda$
$y(x)=(1-\lambda)\sin x-\lambda\cos x+\lambda$
$W(y)=\int_0^{\pi/2}2[(1-\lambda)\sin x-\lambda\cos x+\lambda]\,dx=6-\pi \iff$
$2[-(1-\lambda)\cos x-\lambda\sin x+\lambda x]\Big|_0^{\pi/2}=6-\pi \iff$
$2[-\lambda+\lambda\pi/2+(1-\lambda)]=6-\pi \iff \lambda=-1$

Άρα η λύση είναι $y(x)=2\sin x+\cos x-1$

6.5 $J(y)=\int_\alpha^b (p(x)y'^2+q(x)y^2)\,dx$, $W(y)=\int_\alpha^b r(x)y^2\,dx=1$
$(py')'-qy=r(t)\lambda y$, $\alpha<t<b$ πρόβλημα Sturm-Liouville.

$L^*=p(x)y'^2+q(x)y^2+\lambda r(x)y^2$

$$L^*_y-\frac{d}{dx}L^*_{y}=0 \Rightarrow (p(x)y')'-[q(x)+\lambda r(x)]y=0 \quad , y(\alpha)=y(b)=0$$

$$x^2y'' + 2xy' - (1+\lambda)y = 0$$
$$y(1) = 0 \qquad (*)$$
$$y(2) = 1$$

$x^2y'' + \alpha x y' + by = 0$ αν εφαρμόσω τον μετασχηματισμό $x = e^s$ καταλήγω σε μια Δ.Ε με σταθερους συντελεστές.

$$\Longrightarrow \ddot{u}(s) + (\alpha - 1)\dot{u}(s) + bu(s) = 0$$

Έτσι γυρίζοντας στην (*) $\Longrightarrow$ $\ddot{u} + \dot{u} + (1+\lambda)u = 0$

$\chi_u(r) = r^2 + r + (1+\lambda) = 0 \Longrightarrow r_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1-4(1+\lambda)})/2$, $\Delta = 1-4+4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -3/4$

6.4 $J(y) = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\,dx$, $y(0) = y(1) = 0$, $W(y) = \int_0^1 y\,dx = A$, $0 < A \leq \pi/8$

5.1 $J(y) = \int_\alpha^b [r(t)\dot{y}^2 + q(t)y^2]\,dt$ Να βρεθεί η Χαμιλτονιανή $H(t,y,p)$; $L(t,y,\dot{y}) = 1\ldots$

Κανονικές εξισώσεις $\dot{p} = -\partial H/\partial y$ $\dot{y} = -\partial H/\partial p$

$\dot{y} = \varphi(t,y,p)$

$$p = L_{\dot{y}} \Longrightarrow p = 2r(t)\dot{y} \Longrightarrow \dot{y} = p/2 \cdot r(t)$$

$$H = -L + \dot{y}L_{\dot{y}} \Longrightarrow H(t,y,p) = \frac{r(t)\cdot p^2}{4r^2(t)} + q(t)y^2 + \frac{p}{2r(t)}p$$

5.2 $J(y) = \int_\alpha^b \sqrt{(t^2+y^2)(1+\dot{y})^2}\,dt$

$$H = -\sqrt{t^2+y^2-p^2}$$