Αριθμητικές Μέθοδοι για Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Εργαστηριακή Άσκηση 2

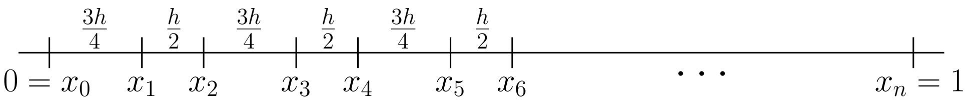
1) Θεωρήστε το πρόβλημα

$$(*)\begin{cases} -(p(x)u')' + q(x)\,u = f(x), & 0 \le x \le 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

με $p(x) = \exp(x)$, $q(x) = 1 + \sin(\pi x)$ και f κατάλληλη συνάρτηση (βρείτε την) έτσι ώστε η λύση του $(*)$ να είναι $u(x) = e^x \sin \pi x$.

Λύστε το πρόβλημα με την μέθοδο Galerkin με κατά τμήματα γραμμικές, συνεχείς συναρτήσεις υπολογίστε τα σφάλματα $||u - u_h||$, $||u - u_h||_1$, $||u - u_h||_{L^\infty}$ και βρείτε πειραματικά (για ομοιόμορφο διαμερισμό) την τάξη ακρίβειας του σφάλματος καθώς $h \to 0$ για τις τρεις νόρμες.

Βρείτε επίσης πειραματικά την τάξη ακρίβειας του σφάλματος καθώς $h \to 0$ για τις τρείς αυτές νόρμες για τον διαμερισμό



2) Τροποποιήστε το πρόγραμμα σας ώστε να δουλεύει για συνθήκες Neumann και λύστε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} &-(pu')' + qu = f(x), \qquad 0 \le x \le 1, \\ &u(0) = u'(1) = 0, \end{aligned}$$

με $p = x^2 + 2$, $q = x + 1$, κατάλληλο f, $u = \sin \frac{\pi}{2} x$. Βρείτε την τάξη ακρίβειας της μεθόδου για τα σφάλματα $||u - u_h||$, $||u - u_h||_1$, $||u - u_h||_{L^\infty}$ καθώς $h \to 0$.

Ποια είναι η τάξη σύγκλισης του σφάλματος $|u'(1) - u_h'(1)|$ καθώς $h \to 0$;

3) Θεωρήστε το πρόβλημα

$$(*)\begin{cases} -(p(x)u')' + q(x)\,u = f(x), & 0 \le x \le 1, \\ u'(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

με $p(x) = 1 + x^2$, $q(x) = 2x$ και f κατάλληλη συνάρτηση (βρείτε την) έτσι ώστε η λύση του $(*)$ να είναι $u(x) = \cos(\pi x/2)$.

Λύστε το πρόβλημα με την μέθοδο Galerkin με C^2 κυβικές splines, υπολογίστε τα σφάλματα $||u - u_h||$, $||u - u_h||_1$, $||u - u_h||_{L^\infty}$ και βρείτε πειραματικά (για ομοιόμορφο διαμερισμό) την τάξη ακρίβειας του σφάλματος καθώς $h \to 0$ για τις τρεις νόρμες. Βρείτε επίσης την τάξη ακρίβειας καθώς $h \to 0$ των σφαλμάτων $|u'(0) - u_h'(0)|$, $|u'(1) - u_h'(1)|$ και $\|u'' - u_h''\|$ (*).

Τέλος, να κάνετε την γραφική παράσταση της ακριβους και της αριθμητικής λύσης.