

Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής
Μαθηματικά Υποδείγματα Εμπορολογίας (Marketing)

Επαναληπτικές Ασκήσεις Διαλέξεων 3-6

Άσκηση 1

Ένας αναλυτής marketing έχει χρησιμοποιήσει παλαιότερα στατιστικά στοιχεία και εκτιμά ότι κατά την εισαγωγή ενός νέου μοντέλου κάποιου προϊόντος στην αγορά οι πωλήσεις εξαρτώνται από το χρόνο και συγκεκριμένα κατά την εβδομάδα t μετά την εισαγωγή του προϊόντος θα είναι ίσες με $a + bt$, όπου a, b γνωστές σταθερές ($t = 0, 1, 2, \dots$). Εστω N_t η συνολική ποσότητα που έχει πωληθεί κατά τις πρώτες t εβδομάδες μετά την εισαγωγή του προϊόντος.

(1) Να βρεθεί μια αναλυτική έκφραση για το N_t .

(2) Έστω $a = 50, b = 2$. Να υπολογιστεί πόσες εβδομάδες θα απαιτηθούν έως ότου οι πωλήσεις να φτάσουν τις 10000 μονάδες.

Άσκηση 2

(1) Υποθέστε ότι κατά την εισαγωγή ενός προϊόντος στην αγορά εφαρμόζεται το μοντέλο διάχυσης Bass με συνολικό μέγεθος αγοράς ίσο με 100000, συντελεστή καινοτομίας $p = 0,01A$ και συντελεστή μίμησης $r = 0,05A$, όπου A το ποσό που έχει δαπανηθεί για διαφήμιση κατά την εισαγωγή του προϊόντος, σε χιλιάδες ευρώ.

Να βρεθεί το απαιτούμενο ποσό A ώστε οι πωλήσεις του προϊόντος να φτάσουν τη μέγιστη τιμή τους 10 χρονικές περιόδους μετά την εισαγωγή του προϊόντος.

(2) Έστω ότι για ένα νέο προϊόν κατά την εισαγωγή ενός προϊόντος στην αγορά εφαρμόζεται το μοντέλο διάχυσης Bass, και μετά από στατιστική ανάλυση έχει εκτιμηθεί η παρακάτω εξίσωση για τις πωλήσεις Q_t κατά την περίοδο t , όπου N_t οι πωλήσεις μέχρι την περίοδο t :

$$Q_t = 410 + 0.39N_t - 10^{-6}N_t^2.$$

Να εκτιμηθεί το μέγεθος της αγοράς.

Άσκηση 3

Θεωρούμε ετερογενή αγορά με 4 τμήματα και συνολικό μέγεθος 1000 ατόμων. Τα μεγέθη των τμημάτων είναι $N_1 = 200, N_2 = 300, N_3 = 400, N_4 = 100$. Θέλουμε να εισαγάγουμε στην αγορά ένα προϊόν και πρέπει να καθορίσουμε την τιμή (επίπεδο) s ενός χαρακτηριστικού του.

Αν η τιμή του χαρακτηριστικού που θα επιλεγεί είναι s , τότε η συνάρτηση ωφέλειας για το τμήμα t της αγοράς είναι $u_t(s), t = 1, 2, 3, 4$, όπου $u_1(s) = 2s, u_2(s) = s, u_3(s) = 8s, u_4(s) = 4s$. Η συνάρτηση κόστους για ένα προϊόν με τιμή του χαρακτηριστικού s είναι $c(s) = 2s^2$.

(1) Να βρεθεί η τιμή s του χαρακτηριστικού που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος της εταιρείας.

(2) Να βρεθεί ποιο ποσοστό της αγοράς εξυπηρετείται αν επιλεγεί η τιμή που βρέθηκε στο (1).

Άσκηση 4

Μια εταιρεία πρόκειται να εγκαταστήσει ένα κατάστημα προς εξυπηρέτηση των πελατών που βρίσκονται ομοιόμορφα κατανομημένοι κατά μήκος ενός δρόμου που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, 1]$. Υπάρχουν

μόνο δύο επιλογές, στις θέσεις $1/3$ και $1/4$ του διαστήματος. Η ωφέλεια ενός πελάτη που βρίσκεται στο σημείο t του διαστήματος αν εξυπηρετηθεί από κατάστημα στη θέση s είναι $u(t, s) = R - (t - s)^2$. Συνεπώς, αν η εταιρεία θέσει τιμή p για την εξυπηρέτηση, τότε ο πελάτης έχει πλεόνασμα $R - (t - s)^2 - p$.

Το κόστος του προϊόντος είναι $c = 4$ και $c = 2$ αντίστοιχα, αν η εταιρεία εγκαταστήσει το κατάστημα στο σημείο $1/3$ ή στο $1/4$.

(1) Έστω ότι η εταιρεία αφού επιλέξει μια από τις δύο θέσεις για το κατάστημα, μετά θα θέσει μια τιμή p έτσι ώστε να πάρει όλη την αγορά, δηλαδή όλοι οι πελάτες να είναι πρόθυμοι να εξυπηρετηθούν. Να βρεθεί σε ποια από τις δύο θέσεις πρέπει να τοποθετηθεί το κατάστημα και ποια θα πρέπει να είναι η τιμή, ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της εταιρείας.

(2) Αλλάζει η βέλτιστη λύση αν δεν απαιτείται να πάρει όλη την αγορά;

Άσκηση 5

Δύο εταιρείες ανταγωνίζονται για την εξυπηρέτηση πελατών που βρίσκονται ομοιόμορφα κατανομημένοι κατά μήκος δρόμου που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, 1]$. Η εταιρεία 1 έχει ήδη εγκαταστήσει το κατάστημά της στο σημείο $s_1 = 1/3$ του διαστήματος. Η εταιρεία 2 πρόκειται να επιλέξει σημείο $s_2 \in [0, 1]$ για την εγκατάσταση του δικού της καταστήματος. Θεωρούμε ότι όλα τα σημεία του διαστήματος $[0, 1]$ είναι διαθέσιμα.

Η ωφέλεια ενός πελάτη που βρίσκεται στο σημείο t του διαστήματος αν εξυπηρετηθεί από κατάστημα στη θέση s είναι $u(t, s) = R - (t - s)^2$. Συνεπώς, αν η εταιρεία θέσει τιμή p για την εξυπηρέτηση, τότε ο πελάτης έχει πλεόνασμα $R - (t - s)^2 - p$.

Έστω ότι το κόστος ανά μονάδα προϊόντος είναι c και για τις δύο εταιρείες.

(1) Να βρεθεί το σημείο που θα επιλέξει η εταιρεία 2 για το κατάστημά της καθώς και οι τιμές p_1, p_2 στις οποίες θα πουλάνε το προϊόν.

(2) Τι μερίδιο αγοράς θα πάρει κάθε εταιρεία;

(3) Ωφελείται η εταιρεία 1 που επέλεξε πρώτη και μόνη της τη θέση $1/3$ για το κατάστημά της σε σχέση με το τι θα κέρδιζε αν επέλεγαν και οι δύο ταυτόχρονα χωρίς να ξέρει η μια τι θα κάνει η άλλη; (η δεύτερη περίπτωση είναι το μοντέλο Hotelling).