

Θέμα 1. (20 Βαθμοί) Ρίχνουμε ένα αμερόπληπτο ζάρι τέσσερις φορές.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα οι τέσσερις ενδείξεις που θα εμφανιστούν να είναι διαφορετικές μεταξύ τους;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί το 6 ακριβώς δύο φορές;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα p_1 να εμφανιστεί το 6 τουλάχιστον μία φορά;

(δ) Ρίχνουμε επίσης και δύο αμερόληπτα ζάρια 24 φορές. Έστω p_2 η πιθανότητα στις 24 ρίψεις να έρθει τουλάχιστον μία φορά η ένδειξη (6, 6). Ποια από τις πιθανότητες p_1, p_2 είναι μεγαλύτερη; (Λύση χωρίς κομπιουτεράκι)

Θέμα 2. (15 Βαθμοί) Από αυτούς που νοσούν με Covid-19 μια συγκεκριμένη βδομάδα σε μια πόλη, το 80% έχει την παραλλαγή Ο και το 20% έχει την παραλλαγή Δ. Η πιθανότητα να νοσηλευτεί κάποιος που νοσεί με την παραλλαγή Ο είναι 3%, ενώ η πιθανότητα να νοσηλευτεί κάποιος που νοσεί με την παραλλαγή Δ είναι 10%.

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να χρειαστεί νοσηλεία κάποιος που νοσεί με Covid-19.

(β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα κάποιος που νοσεί να έχει την παραλλαγή Δ δεδομένου ότι χρειάστηκε νοσηλεία.

Θέμα 3. (20 Βαθμοί) Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) := \begin{cases} \frac{c}{x^2} & \text{αν } x \in (2, \infty), \\ 0 & \text{αν } x \in (-\infty, 2], \end{cases}$$

όπου $c > 0$ είναι μια σταθερά. Να υπολογιστούν:

(α) Η σταθερά c , η μέση τιμή $E(\sqrt{X})$, και η πιθανότητα $P(X < 3)$.

(β) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y := 1/X^2$. Τι τιμές παίρνει η Y ;

Θέμα 4. (25 Βαθμοί) Έστω (X, Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 10xy^2 & \text{αν } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να βρεθούν:

(α) η μέση τιμή $E\left(\frac{1}{XY}\right)$,

(β) οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των X και Y , αντιστοίχως. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

(γ) οι πιθανότητες $P(Y < 2X)$, $P(Y = 2X)$,

(δ) η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{U,W}(u, w)$ των τυχαίων μεταβλητών $U = X/Y$ και $W = Y$. Για ποια $u, w \in \mathbb{R}$ (δηλαδή σε ποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$) είναι η $f_{U,W}(u, w)$ θετική; Είναι οι U, W ανεξάρτητες;

Θέμα 5. (20 Βαθμοί) (α) Έστω $p \in (0, 1)$ και N διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(N = k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & \text{αν } k \in \mathbb{N}^+ := \{1, 2, \dots\}, \\ 0 & \text{αν } k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Υπολογίστε την πιθανογεννήτρια της N , δηλαδή την $P_N(r) := E(r^N)$. Για ποια $r \in \mathbb{R}$ αυτή η μέση τιμή ορίζεται και είναι πεπερασμένη;

(β) Έστω $\lambda > 0$ και $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., καθεμία με κατανομή $\text{Exp}(\lambda)$, δηλαδή με πυκνότητα $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}$. Και έστω N τ.μ. με κατανομή όπως στο ερώτημα (α) και ανεξάρτητη από τις $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$. Θεωρούμε το τυχαίο άθροισμα τυχαίων μεταβλητών $S_N := X_1 + X_2 + \dots + X_N$. Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της S_N . Τι κατανομή ακολουθεί η S_N ;

Θέμα 6. (10 Βαθμοί) Για μια τυχαία μεταβλητή X με θετικές τιμές γνωρίζουμε ότι έχει μέση τιμή $E(X) = 70$ και τυπική απόκλιση 10. Τι άνω φράγματα μπορείτε να πάρετε για την πιθανότητα $P(X \geq 95)$ χρησιμοποιώντας τις ανισότητες Markov και Chebyshev;

Υπενθυμίσεις:

A) Μια εκδοχή της ανισότητας Bernoulli λέει ότι $(1+x)^r > 1+rx$ για κάθε $x \geq -1, x \neq 0$ και $r > 1$.

B) Η ροπογεννήτρια μιας εκθετικής τ.μ. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ είναι

$$M_X(t) := \mathbf{E}(e^{tX}) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda-t} & \text{αν } t < \lambda, \\ \infty & \text{αν } t \geq \lambda. \end{cases}$$

Να λυθούν όλα τα θέματα.

Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες.

Άριστα είναι το 100.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες. Καλή επιτυχία.

Απαντήσεις

Θέμα 1. (α) $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4}$

(β) $\binom{4}{2}(1/6)^2(5/6)^2$

(γ) $p_1 = 1 - (5/6)^4$

(δ) $p_2 = 1 - (35/36)^{24}$. Ισχύει ότι $p_1 > p_2$ γιατί

$$\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{24} = \left(\left(1 - \frac{1}{36}\right)^6\right)^4 > \left(1 - 6 \cdot \frac{1}{36}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Bernoulli.

Θέμα 2. (α) Θεώρημα ολικής πιθανότητας. **(β)** Τύπος Bayes.

Θέμα 3. (α) $c = 2, \mathbf{E}(\sqrt{X}) = \int_2^\infty \sqrt{x}f(x) dx = \dots = 2\sqrt{2}, \mathbf{P}(X < 3) = \int_2^3 f(x) dx = 1/3$.

(β) Επειδή η X παίρνει τιμές στο $(2, \infty)$, η Y παίρνει τιμές στο $(0, 1/4)$. Η συνάρτηση κατανομής της Y, F_Y , ισούται με $F_Y(t) = \mathbf{P}(X^{-2} \leq t)$ το οποίο είναι 0 αν $t \leq 0$, ενώ για $t > 0$

$$F_Y(t) = \mathbf{P}(X^{-2} \leq t) = \mathbf{P}(X \geq t^{-1/2}) = 1 - \mathbf{P}(X < t^{-1/2}) = 1 - F_X(t^{-1/2}).$$

Επειδή η F_X είναι συνεχής (γιατί η X είναι συνεχής τ.μ.), έπεται από την τελευταία σχέση ότι και η F_Y είναι συνεχής (η συνέχεια στο 0 θέλει ξεχωριστό έλεγχο). Επειδή η F_X είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ με συνεχή παράγωγο εκεί, έπεται ότι η F_Y είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{0, 1/4\}$. Η παράγωγός της στο $\mathbb{R} \setminus [0, 1/4]$ ισούται με μηδέν, ενώ για $t \in (0, 1/4)$ είναι

$$F_Y'(t) = \frac{1}{2} t^{-3/2} f_X(t^{-1/2}) = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Άρα, η πυκνότητα της Y είναι η $f_Y(t) = t^{-1/2} \mathbf{1}_{t \in (0, 1/4)}$.

Θέμα 4. Κάνουμε σχήμα ώστε να δούμε το στήριγμα της $f_{X,Y}$.

(α) $\mathbf{E}(XY) = 10/3$.

(β) $f_X(x) = (10/3)x(1-x^3)\mathbf{1}_{x \in (0,1)}, f_Y(y) = 5y^4\mathbf{1}_{y \in (0,1)}$. Οι X, Y είναι εξαρτημένες αφού η $f_X(x)f_Y(y)$ διαφέρει από την $f_{X,Y}(x, y)$ σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ θετικού μέτρου.

(γ) $\mathbf{P}(Y < 2X) = \int_0^1 \int_{y/2}^y f_{X,Y}(x, y) dx dy = \dots = 3/4$.

(δ) $f_{U,W}(u, v) = 10uv^4\mathbf{1}_{u \in (0,1)}\mathbf{1}_{v \in (0,1)}$. Οι U, W είναι ανεξάρτητες.

Θέμα 5. Έστω $q := 1 - p$.

(α) $P_N(r) := \mathbf{E}(r^{S_N}) = \sum_{k=1}^\infty r^k p(1-p)^{k-1} = rp \sum_{j=0}^\infty (rq)^j$. Η σειρά έχει πεπερασμένο όριο ακριβώς όταν $|rq| < 1$ και τότε ισούται με

$$P_N(r) = \frac{rp}{1 - rq}.$$

(β) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε $\mathbf{E}(e^{tS_N}) = \mathbf{E}(\{\mathbf{E}(e^{tX_1})\}^N)$. Αυτό ισούται με ∞ αν $t \geq \lambda$ ενώ για $t < \lambda$ ισούται με

$$\mathbf{E}\left(\left\{\frac{\lambda}{\lambda - t}\right\}^N\right).$$

Με βάση το **(α)**, αυτό είναι άπειρο για $\lambda/(\lambda - t) \geq 1/q$, δηλαδή για $t \geq \lambda p$. Ενώ για $t < \lambda p$, με βάση πάλι το **(α)**, η τελευταία μέση τιμή ισούται με

$$\frac{\lambda}{\lambda - t} p \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda - t} q} = \dots = \frac{\lambda p}{\lambda p - t}.$$

Άρα $S_N \sim \text{Exp}(\lambda p)$.

Θέμα 6. Έχουμε ότι

$E(X^2) = \text{Var}(X) + (E(X))^2 = 100 + 4900 = 5000$. Οπότε έχουμε τις εξής τρεις ανισότητες

$$P(X \geq 95) \leq \frac{E(X)}{95} = \frac{70}{95}, \quad (1)$$

$$P(X \geq 95) = P(X^2 \geq 95^2) \leq \frac{E(X^2)}{95^2} = \frac{5000}{95^2}, \quad (2)$$

$$P(X \geq 95) = P(X - E(X) \geq 25) \leq \frac{\text{Var}(X)}{25^2} = \frac{100}{625}. \quad (3)$$

Στις δύο πρώτες, χρησιμοποιήσαμε το ότι η X παίρνει θετικές τιμές. Καλύτερη φράγμα δίνει η τελευταία ανισότητα.