Πιθανότητες Ι
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
Εξέταση 16ης Σεπτεμβρίου 2024

Θέμα 1. (20 Βαθμοί) Φτιάχνουμε έναν εξαψήφιο αριθμό καθορίζοντας τα ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά. Για τον καθορισμό κάθε ψηφίου επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό από το $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Υπολογίστε τις πιθανότητες στον εξαψήφιο αριθμό που θα κατασκευαστεί:

(**α**) Όλα τα ψηφία να είναι διαφορετικά.

(**β**) Να μην υπάρχουν δύο διαδοχικά ψηφία ίσα.

(**γ**) Να εμφανίζεται το 2 ακριβώς μία φορά και το 9 ακριβώς 3 φορές.

(**δ**) Να εμφανίζονται και το ψηφίο 2 και το ψηφίο 6 από τουλάχιστον μια φορά το καθένα.

(**ε**) Τα ψηφία από αριστερά προς τα δεξιά να αποτελούν γνησίως αύξουσα ακολουθία. Π.χ., όπως στον αριθμό 234679.

Θέμα 2. (15 Βαθμοί) Ένα κουτί περιέχει 5 χρυσά και 3 ασημένια νομίσματα. Επιλέγουμε ένα νόμισμα στην τύχη κι αν είναι χρυσό το επιστρέφουμε στο κουτί μαζί με 2 χρυσά νομίσματα, ενώ αν είναι ασημένιο το επιστρέφουμε μαζί με ένα ασημένιο νόμισμα στο κουτί. Τέλος, επιλέγουμε πάλι στην τύχη ένα νόμισμα από το κουτί.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα το πρώτο νόμισμα να είναι χρυσό και το δεύτερο ασημένιο;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα το δεύτερο νόμισμα να είναι χρυσό;

Θέμα 3. (25 Βαθμοί) Έστω τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{x} & \text{αν } x \in [1, 30], \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus [1, 30] \end{cases}$$

όπου A είναι μια σταθερά. Να υπολογιστούν:

(**α**) Η τιμή της σταθεράς A.

(**β**) Η μέση τιμή $\mathbf{E}(X^2 \log X)$ και οι πιθανότητες $\mathbf{P}(X = 11), \mathbf{P}(X \in [20, 40])$.

(**γ**) Η συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y := 1/X$.

Θέμα 4. (25 Βαθμοί) Έστω διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) με συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2\, e^{-x/y} & \text{αν } (x, y) \in (0, \infty) \times (0, 1), \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(**α**) Να βρεθεί η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας, f_Y, της Y. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

(**β**) Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας, $f_{U,W}$, των τυχαίων μεταβλητών $U = X/Y$ και $W = Y$. Για ποια $u, w \in \mathbb{R}$ (δηλαδή σε ποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$) είναι η $f_{U,W}(u, w)$ θετική;

(**γ**) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας της $U = X/Y$.

Θέμα 5. (20 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log x}{x^2} & \text{αν } x > 1, \\ 0 & \text{αν } x \leq 1. \end{cases}$$

(**α**) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y := \log X$.

(**β**) Έστω $X_1, X_2, ..., X_{32}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ισόνομες με την X. Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το άθροισμα $\sum_{i=1}^{32} \log X_i$ να είναι τουλάχιστον 80.

Για τη συνάρτηση κατανομής της Τυπικής Κανονικής $N(0, 1)$ δίνονται:
$\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$, $\Phi(1.65) = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$, $\Phi(2) = 0.9773$.

Να λυθούν όλα τα θέματα. Άριστα είναι το 100. Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες. Καλή επιτυχία.

Απαντήσεις

Θέμα 1.

(α) $(9)_6/9^6$

(β) $9 * 8^5/9^6$

(γ)

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{3}7^2}{9^6} = \frac{6!}{1!2!3!}\frac{7^2}{9^6}$$

(δ) Έστω $A_i := \{$Εμφανίζεται το ψηφίο i τουλάχιστον μία φορά$\}$ για $i = 2, 6$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_2 \cap A_6) &= 1 - \mathbf{P}(A_2^c \cup A_6^c) = 1 - \left\{\mathbf{P}(A_2^c) + \mathbf{P}(A_6^c) - \mathbf{P}(A_2 \cap A_6^c)\right\} \\ &= 1 - \left\{\left(\frac{8}{9}\right)^6 + \left(\frac{8}{9}\right)^6 - \left(\frac{7}{9}\right)^6\right\}.\end{aligned}$$

(ε)

$$\frac{\binom{9}{6}}{9^6}$$

γιατί αυτοί οι εξαψηφιοι αριθμοί είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τους συνδυασμούς των 9 στοιχείων του $\{1, 2, \dots, 9\}$ ανά 6. Συγκεκριμένα ο αριθμός με ψηφία $x_1x_2x_3...x_6$ σε γνήσια αύξουσα σειρά αντιστοιχεί στον συνδυασμό $\{x_1, x_2, \dots, x_6\}$, και αντίστροφα, για δεδομένο συνδυασμό υπάρχει ένας μόνο τρόπος να μπουν τα στοιχεία του σε αύξουσα σειρά, και έτσι να δώσουν ακριβώς έναν εξαψήφιο αριθμό όπως αναφέρεται στην εκφώνηση.

Θέμα 2. Για $i = 1, 2$, έστω

$$\begin{aligned}A_i &:= \{\text{επιλέγεται αργυρό νόμισμα στην } i \text{ εξαγωγή}\},\\ X_i &:= \{\text{επιλέγεται χρυσό νόμισμα στην } i \text{ εξαγωγή}\}.\end{aligned}$$

(α) $\mathbf{P}(X_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(X_1)\mathbf{P}(A_2|X_1) = (5/8)(3/10) = 3/16$.

(β) $\mathbf{P}(X_2) = \mathbf{P}(X_1)\mathbf{P}(X_2|X_1) + \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(X_2|A_1) = (5/8)(7/10) + (3/8)(5/9)$.

Θέμα 3. **(α)** $1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \mathrm{A}(\log 30 - \log 1) = A \log 30$. Άρα $A = 1/\log 30$.

(β)

$$\mathbf{E}(X^2 \log X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \log x f(x)\,dx = A \int_1^{30} x \log x\,dx = \dots = 30^2/2 - (A/4)(30^2 - 1).$$

$\mathbf{P}(X = 11) = 0$ γιατί η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή. Τέλος

$$\mathbf{P}(X \in [20, 40]) = \int_{20}^{40} f(x) = A \int_{20}^{30} x^{-1}\,dx = A(\log 30 - \log 20) = 1 - \frac{\log 20}{\log 30}.$$

(γ) Η συνάρτηση κατανομής της Y, $F_Y(t)$, προφανώς ισούται με 0 για $t \le 0$, ενώ για $t > 0$ ισούται με

$$F_Y(t) = \mathbf{P}(1/X \le t) = 1 - \mathbf{P}(X < 1/t) = 1 - F_X(1/t).$$

Έπεται απο εδώ ότι $F_Y(0+) = 0$, άρα η F_Y είναι συνεχής. Επειδή η F_X είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}\backslash\{1, 30\}$ με παράγωγο f έπεται ότι η F_Y είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}\backslash\{1, 1/30\}$ με παράγωγο

$$F_Y'(t) = \frac{1}{t^2} f_X(1/t)$$

για $t \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1/30, 1\}$. Άρα η Y είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f_Y(t) := \begin{cases} \frac{A}{t} & \text{αν } t \in [1/30, 1], \\ 0 & \text{αν } t \in \mathbb{R}\backslash[1/30, 1]. \end{cases}$$

Θέμα 4. **(α)** Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ έχουμε $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx$. Προφανώς, αυτό ισούται με 0 για $y \in \mathbb{R}\backslash(0,1)$, ενώ για $y \in (0,1)$ έχουμε

$$f_Y(y) = \int_0^\infty 2e^{-x/y}\,dx = 2[-ye^{-x/y}]_0^\infty = 2y.$$

Άρα $f_Y(y) = 2y\mathbf{1}_{(0,1)}(y)$. Αν ήταν ανεξάρτητες, θα ίσχυε για κάθε[1] $(x,y) \in (0\ \infty) \times (0,1)$ η σχέση

$$f_X(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{y}e^{-x/y}.$$

Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει γιατί το δεξί μέλος εξαρτάται από το y.

(β) Θέτουμε $A := (0,\infty) \times (0,1)$ και θεωρούμε την απεικόνιση $T : A \to \mathbb{R}^2$ με $T(x,y) = (x/y, y)$, που έχει εικόνα $T(A) = A$ και είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη $T^{-1}(u,w) = (uw, w)$. Έχουμε ότι $(U,W) = T(X,Y)$. Η ιακωβιανή της απεικόνισης T^{-1} στο (u,w) ισούται με

$$\begin{vmatrix} w & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = w.$$

Έτσι, το ζευγάρι (U,W) έχει πυκνότητα που για $(u,w) \in \mathbb{R}^2\backslash A$ ισούται με 0 ενώ για $(u,w) \in A$ ισούται με

$$f_{U,W}(u,w) = f_{X,Y}(T^{-1}(u,w))|w| = f_{X,Y}(uw,w)w = 2e^{-u}w.$$

Επομένως $f_{U,W}(u,w) = 2we^{-u}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(u)\mathbf{1}_{(0,1)}(w)$. Η $f_{U,W}$ είναι θετική στο σύνολο A.

(γ) Για κάθε $u \in \mathbb{R}$ έχουμε $f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,W}(u,w)\,dw = e^{-u}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(u)$. [Δηλαδή $U \sim \exp(1)$.]

Θέμα 5. **(α)** Η συνάρτηση κατανομής της Y, για $y \in \mathbb{R}$, ισούται με

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(\log X \le y) = \mathbf{P}(X \le e^y) = F_X(e^y),$$

όπου F_X είναι η συνάρτηση κατανομής της X. Η F_X είναι συνεχής παντού και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (είναι παραγωγίσιμη και στο 1 αλλά δεν το χρειαζόμαστε) με παράγωγο f. Έπεται ότι η Y είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή και μάλιστα έχει πυκνότητα

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = f(e^y)e^y = ye^{-y}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$ (η F_Y είναι παραγωγίσιμη και στο 0). Εδώ μπορεί κάποιος να προσέξει ότι $Y \sim$ Γάμμα$(2,1)$.

(β) Έστω $Y_i := \log X_i$ για κάθε $i = 1,2,\ldots,32$. Οι $\{Y_i : 1 = 1,1,\ldots,32\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Θέτουμε $S_{32} := \sum_{i=1}^{32} Y_i$. Για τον προσεγγιστικό υπολογισμό της πιθανότητας $\mathbf{P}(S_{32} \ge 80)$, θα χρησιμοποιήσουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα. Η πρώτη και η δεύτερη ροπή της Y_1 υπολογίζονται ως εξής[2]

$$\mathbf{E}(Y_1) = \int_0^\infty y^2 e^{-y}\,dy = \Gamma(3) = 2! = 2,$$

$$\mathbf{E}(Y_1^2) = \int_0^\infty y^3 e^{-y}\,dy = \Gamma(4) = 3! = 6.$$

Άρα $\mathrm{Var}(Y_1) = \mathbf{E}(Y_1^2) - \mathbf{E}(Y_1)^2 = 2$.

Έτσι, το κεντρικό οριακό θεώρημα δίνει

$$\mathbf{P}(S_{32} \ge 80) = \mathbf{P}\left(\frac{S_{32} - 32\mathbf{E}(Y_1)}{\sqrt{32\mathrm{Var}(Y_1)}} \ge \frac{80 - 32\mathbf{E}(Y_1)}{\sqrt{32\mathrm{Var}(Y_1)}}\right) \approx \mathbf{P}(Z \ge 2) = 1 - \Phi(2) \approx 0.0227$$

[1]Το ακριβές είναι ότι αυτή η σχέση πρέπει να ισχύει για όλα τα $(x,y) \in (0\ \infty) \times (0,1)\backslash N$, όπου $N \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα σύνολο που έχει εμβαδόν μηδέν. Και πάλι προκύπτει άτοπο. Το κριτήριο της ανεξαρτησίας που έχει το βιβλίο, με γνώση του συγγραφέα, δεν είναι πλήρως σωστό. Το επίπεδο του μαθήματος δεν επιτρέπει παραπάνω συζήτηση.

[2]Αν κάποιος δεν θυμάται τη συνάρτηση Γάμμα, βρίσκει τα ολοκληρώματα με ολοκλήρωση κατά παράγοντες.