Πιθανότητες Ι, Χειμερινό εξάμηνο 2026-2027

Μεταγραφή χειρόγραφων σημειώσεων

28/09/2026 — Κεφάλαιο 1

Βιβλίο: Blitzstein–Hwang. Ώρες γραφείου: Δευτέρα 12–1.

Κεφάλαιο 1: Στοιχεία συνδυαστικής για τον υπολογισμό των όρων του κλάσματος στην κλασική πιθανότητα.

§1.2: Δειγματικός χώρος, κλασική πιθανότητα

Σε ένα πείραμα τύχης, το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος το λέμε *δειγματικό χώρο* του πειράματος. Συνήθως το συμβολίζουμε με Ω.

Παραδείγματα.

1) Ρίψη ζαριού: $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$.
2) Κλήρωση Λόττο: $\Omega = \{A : A \subset \{1, 2, \dots, 49\},\ |A| = 6\}$.
3) Χρόνος τερματισμού ενός αθλητή στα 100 m: $\Omega = (0, \infty)$.

Ενδεχόμενο λέμε κάθε υποσύνολο του Ω.

Το να συμβεί ένα ενδεχόμενο A σε μια πραγματοποίηση του πειράματος σημαίνει ότι το αποτέλεσμά ω του πειράματος ανήκει στο A, δηλαδή $\omega \in A$.

Παράδειγμα. Στη ρίψη ζαριού, με $A = \{1, 3, 5\}$, αν έρθει 5, λέμε ότι το A συνέβη/πραγματοποιήθηκε.

Στόχος. Σε κάθε $A \subset \Omega$ να αποδώσουμε έναν αριθμό $P(A)$ στο $[0, 1]$ που θα τον λέμε πιθανότητα του A.

§1.3: Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Αν ο Ω είναι πεπερασμένος και όλα τα στοιχεία είναι ισοπίθανα (δηλαδή κανένα δεν υπερέχει των άλλων ως προς τη δυνατότητα του να πραγματοποιηθεί, αρχή της αδιαφορίας, αυτό συνήθως προκύπτει από συμμετρία), τότε ορίζουμε

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \qquad A \subset \Omega.$$

Για $A \subset \Omega$,

$$P(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |A|}{|\Omega|} = 1 - P(A).$$

Παράδειγμα. Στο ζάρι, $A = \{1, 3, 5\}$, $P(A) = 3/6 = 1/2$.

§1.4: Στοιχεία συνδυαστικής

1. Η προσθετική αρχή. Αν A, B σύνολα με $A \cap B = \emptyset$, τότε

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

2. Η πολλαπλασιαστική αρχή. Έστω $n \in \mathbb{N}^+$ και ότι φτιάχνουμε μια n-άδα $(a_1, \dots, a_n)$ διατεταγμένων επιλογών.

$$\begin{aligned} &\text{Υπάρχουν } N_1 \text{ επιλογές για το } a_1. \\ \text{Για κάθε επιλογή του } a_1, &\text{ υπάρχουν } N_2 \text{ επιλογές για το } a_2. \\ \text{Για κάθε επιλογή των } a_1, a_2, &\text{ υπάρχουν } N_3 \text{ επιλογές για το } a_3. \\ \text{Για κάθε επιλογή των } a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, &\text{ υπάρχουν } N_n \text{ επιλογές για το } a_n. \end{aligned}$$

Τότε μπορούμε να φτιάξουμε $N_1 N_2 \cdots N_n$ διαφορετικές n-άδες.

Παράδειγμα. Έχουμε 4 παντελόνια και 3 μπλουζάκια. Πόσους διαφορετικούς τρόπους ντυσίματος έχουμε;

Απάντηση: $4 \cdot 3$.

Παράδειγμα. Φτιάχνουμε μια πινακίδα με 4 γράμματα από το $\{A, B, \Gamma, \dots, \Omega\}$ που θέλουμε να περιέχει ακριβώς δύο διαφορετικά μεταξύ τους γράμματα.

Απάντηση: $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = (24)_4$

Ειδική περίπτωση της πολλαπλασιαστικής αρχής είναι ο τύπος

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1||A_2| \cdots |A_n|.$$

Η πολλαπλασιαστική αρχή είναι γενικότερη από αυτόν τον τύπο. Ο τύπος λειτουργεί στο παράδειγμα με τα παντελόνια και τα μπλουζάκια αλλά όχι σε αυτό με την πινακίδα. Εκεί η επιλογή γράμματος για οποιαδήποτε θέση επηρεάζει τα διαθέσιμα γράμματα για τις άλλες θέσεις.

30/09/2026 — §1.4 (συνέχεια)

Άσκηση. Έστω A σύνολο με $|A| = n < \infty$. Να δειχθεί ότι $|\mathscr{P}(A)| = 2^n$.

Λύση. Ας αριθμήσουμε τα στοιχεία του A ως $x_1, \dots, x_n$. Ένα $B \subset A$ καθορίζεται από την n-άδα $(a_1, \dots, a_n)$, όπου για κάθε i θέτουμε

$$a_i = \begin{cases} 1 \text{ αν το } x_i \text{ ανήκει στο } B, \\ 0 \text{ αν το } x_i \text{ δεν ανήκει στο } B. \end{cases}$$

Υπάρχουν δύο επιλογές για καθένα από τα n στοιχεία, άρα 2^n δυνατότητες.

Άσκηση. Πόσα είναι τα πλήθη των πινακίδων με 4 γράμματα χωρίς επαναλήψεις με όλα τα γράμματα φωνήεντα ή με όλα τα γράμματα σύμφωνα;

Λύση: Έστω $A := \{\text{Πινακίδες με μόνο σύμφωνα}\}$, $B := \{\text{Πινακίδες με μόνο φωνήεντα}\}$. Εφαρμόζουμε πρώτα την προσθετική και μετά την πολλαπλασιαστική αρχή.

$$|A \cup B| = |A| + |B| = (17)_4 + (7)_4.$$

Εφαρμογές της πολλαπλασιαστικής αρχής

Διατάξεις

Έστω $n \in \mathbb{N}^+$ δεδομένο και $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ σύνολο με n στοιχεία. Και έστω επίσης $k \in \mathbb{N}^+$ δεδομένο.

1) *Διάταξη με επανάληψη* των n στοιχείων του X ανά k λέμε κάθε διατεταγμένη k-άδα $(a_1, \dots, a_k)$, με $a_i \in X$ για κάθε i.

2) *Διάταξη (χωρίς επανάληψη)* των n στοιχείων του X ανά k λέμε κάθε διατεταγμένη k-άδα $(a_1, \dots, a_k)$ με $a_i \in X$, για την οποία τα a_i είναι διαφορετικά.

3) *Μετάθεση* των στοιχείων του X λέμε κάθε διάταξη των στοιχείων του ανά n.

Για να υπάρχει διάταξη (χωρίς επανάληψη) των στοιχείων του X ανά k, προφανώς πρέπει $k \leq n$. Για διατάξεις με επανάληψη, αυτό δεν είναι απαραίτητο.

Παρακάτω, στη θεωρία ή σε ασκήσεις, όταν λέμε διάταξη σκέτο θα εννοούμε διάταξη χωρίς επανάληψη, δεν θα το γράφουμε ρητά.

Παράδειγμα.

1) Μια στήλη ΠΡΟΠΟ είναι μια διάταξη των $\{1, 2, X\}$ ανά 14.

2) $X =$ οι 10 γυναίκες που τρέχουν στον τελικό των 100 μέτρων στους Ολυμπιακούς. Η τριάδα των τριών πρώτων, με τη σειρά που τερματίζουν, είναι μια διάταξη των 10 στοιχείων του X ανά 3.

Πρόταση. *1) Το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των n ανά k είναι n^k.*

2) Το πλήθος των διατάξεων (χωρίς επανάληψη) των n ανά k είναι

$$(n)_k := n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

3) Το πλήθος των μεταθέσεων των n στοιχείων είναι $n!$.

Απόδειξη. 1) Για διατάξεις με επανάληψη έχουμε n επιλογές σε καθεμιά από τις k θέσεις, οπότε, από την πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε n^k επιλογές.

2) Χωρίς επανάληψη έχουμε n επιλογές για την πρώτη θέση, $n-1$ για τη δεύτερη, ..., $n-k+1$ για την k-οστή.

3) Για $k = n$ στο 2) προκύπτει πλήθος $(n)_n = n!$.

Άσκηση 1.4 (φυλλάδιο). Δέκα αθλητές διαγωνίζονται σε 3 αθλήματα (κολύμπι, ποδηλασία, τρέξιμο). Για τον νικητή κάθε αθλήματος υπάρχει ένα έπαθλο που θα τερματίσει πρώτος. Πόσοι είναι οι τρόποι κατανομής των τριών επάθλων στους 10 αθλητές; [Δεν απαγορεύεται ένας αθλητής να πάρει πάνω από ένα έπαθλο.]

Λύση. Για το έπαθλο της κολύμβησης υπάρχουν 10 επιλογές, για της ποδηλασίας επίσης 10, και για του τρεξίματος επίσης 10. Από την πολλαπλασιαστική αρχή: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. Είναι διατάξεις των 10 ανά 3 με επανάληψη.

Δείτε και τις 1.3, 1.5.

Η αρχή του βοσκού - Διόρθωση στην υπερκαταμέτρηση - Η αρχή της διαίρεσης

Παράδειγμα. Ένας βοσκός μεταφέρει στο μαντρί 120 πόδια. Πόσα πρόβατα έχει;

Απάντηση: $120/4 = 30$.

Άσκηση. n άτομα συναντιούνται και έχουν χειραψία όλοι με όλους. Πόσες χειραψίες γίνονται;

Λύση. Καθένας κάνει $n-1$ χειραψίες. Αθροίζοντας σε n άτομα, έχουμε $n(n-1)$ χειραψίες, όμως κάθε χειραψία μετρήθηκε 2 φορές. Άρα ο σωστός αριθμός είναι

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Μια τυπική διατύπωση της παραπάνω τεχνικής είναι το εξής.

Πρόταση (Η αρχή του βοσκού). *Έστω A, B πεπερασμένα σύνολα και $f : A \to B$ ώστε $|f^{-1}(\{b\})| = k$ για κάθε $b \in B$. Τότε $|B| = |A|/k$.*

Δηλαδή όταν κάθε σημείο του B το μετράμε πολλές φορές, και όλα τα σημεία τα μετράμε το ίδιο πλήθος φορών, k, τότε διαιρούμε με k το αριθμό που έχουμε υπολογίσει για να βρούμε το σωστό

πλήθος. Αν κάθε σημείο το μετράμε πολλές φορές, αλλά το πλήθος φορών μεταβάλλεται ανάλογα με το σημείο, τότε η αρχή δεν εφαρμόζεται.

Συμβολισμός. Για $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{N}^+$,

$$(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1),$$

και $(x)_0 = 1$. Το $(x)_k$ λέγεται *καθοδικό παραγοντικό* του x τάξης k.

Επίσης, για $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{x}{k} := \frac{(x)_k}{k!}$$

Ειδική περίπτωση Αν $n, k \in \mathbb{N}$ με $k \le n$, τότε $(n)_k = n!/(n-k)!$ και επομένως

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad 0 \le k \le n.$$

Οι περιπτώσεις $n = 0$ ή $k = 0 < n, k = n > 0$ ελέγχονται εύκολα. Η ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $1 \le k < n$, και τότε

$$(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

02/10/2026 — Συνδυασμοί

Έστω $n \in \mathbb{N}^+$, $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ σύνολο με n στοιχεία, και $k \in \mathbb{N}$.

Ορισμός.

1) Συνδυασμός (χωρίς επανάληψη) των n στοιχείων του X ανά k λέγεται κάθε υποσύνολο του X με k στοιχεία.

2) Συνδυασμός με επανάληψη των n στοιχείων του X ανά k λέγεται κάθε συλλογή k στοιχείων $a_1, \dots, a_k$ με $a_i \in X$ για κάθε i (χωρίς διάταξη).

Παράδειγμα. $\{1, 1, 3, 3, 3, 7\}$ είναι ένας συνδυασμός με επανάληψη των $\{1, 2, \dots, 9\}$ ανά 5 (βέβαια η γραφή ως σύνολο είναι σωστή γιατί σε ένα σύνολο δεν επιτρέπονται επαναλήψεις). Το γράφουμε με τον συμβολισμό πολυσυνόλου, δηλαδή ως $[1, 1, 3, 3, 3, 7]$.

Τυπικά, κάθε συνδυασμός με επανάληψη των στοιχείων του X ανά k είναι κάθε απεικόνιση:

$$f : X \to \mathbb{N} \text{ με } f(x_1) + \cdots + f(x_n) = k.$$

Το $f(x_i)$ μετράει τον αριθμό των εμφανίσεων του x_i στον συνδυασμό με επανάληψη.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, $f(1) = 2, f(3) = 2, f(7) = 1, f(i) = 0$ για $i \in [9] \setminus \{1, 3, 7\}$.

Παράδειγμα.(Συνδυασμός) Επιλέγουμε 5 άτομα από 14 για να φτιάξουμε μια ομάδα. η πεντάδα που θα επιλέξουμε θα είναι ένας συνδυασμός των 14 ατόμων ανά 5. Στα 5 άτομα δεν έχουν ανατεθεί ειδικοί ρόλοι στο καθένα, όλα έχουν τον ίδιο ρόλο στην ομάδα.

(Συνδυασμός με επανάληψη) Μια μπυραρία έχει 4 είδη μπύρας, Fix, Jasmin, Septem, Μύθος. 10 άτομα παραγγέλλουν. Η λίστα που παραδίδεται στο άτομο που ετοιμάζει τον δίσκο για τον σερβιτόρο γράφει κάτι περίπου ως εξής 3 Jasmin, 0 μύθος, 5 Septem, 2 Fix, ή ισοδύναμα J, J, J, S, S, S, S, S, F, F. Είναι ένας συνδυασμός των 4 ανά 10 με απανάληψη. Το άτομο που ετοιμάζει τον δίσκο δεν ενδιαφέρεται για το ποιος πελάτης έχει παραγγείλει τι (ο σερβιτόρος ενδιαφέρεται, και η δική του λίστα είναι διάταξη με επανάληψη των 4 ανά 10).

Πρόταση. *1. Για $0 \le k \le n$ το πλήθος των συνδυασμών των $\{x_1, \dots, x_n\}$ ανά k είναι $\binom{n}{k}$.*

2. *Για $n, k \in \mathbb{N}^+$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των $\{x_1, \dots, x_n\}$ ανά k είναι*

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Στην ελληνική βιβλιογραφία, ο αριθμός στο 2 συμβολίζεται με $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$ ενώ στη διεθνή συμβολίζεται με $\left(\binom{n}{k}\right)$.

Απόδειξη (α). Για $k = 0$, ο ισχυρισμός ισχύει γιατί υποσύνολο με 0 στοιχεία είναι μόνο το κενό, και $\binom{n}{0} = 1$. Θεωρούμε λοιπόν ότι $k \geq 1$ και θα εφαρμόσουμε την αρχή του βοσκού. Έστω Δ_k το σύνολο των διατάξεων των $\{x_1, \dots, x_n\}$ ανά k και Σ_k το σύνολο των συνδυασμών ανά k. Στέλνουμε τη διάταξη $(a_1, \dots, a_k)$ στο σύνολο $\{a_1, \dots, a_k\}$. Δηλαδή θεωρούμε την $f : \Delta_k \to \Sigma_k$ με

$$f((a_1, \dots, a_k)) = \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Από κάθε συνδυασμό προκύπτουν $k!$ διατάξεις, η f είναι $k!$ προς 1. Άρα

$$|\Sigma_k| = \frac{|\Delta_k|}{k!} = \frac{(n)_k}{k!} = \binom{n}{k}.$$

Απόδειξη (β). Θα φτιάξουμε δύο 1-1 και επί απεικονίσεις:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{συνδυασμοί με επανάληψη} \\ \text{των } n \text{ ανά } k \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{τοποθετήσεις } k \text{ ομοίων} \\ \text{μπαλών σε } n \text{ κουτιά} \end{array} \right\}$$
$$\longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{τοποθετήσεις σε μια γραμμή} \\ n-1 \text{ καθέτων «|» και } k \text{ μπαλών} \end{array} \right\}$$

Απεικόνιση 1: Για κάθε αντικείμενο x_i φτιάχνουμε ένα κουτί. Όσες φορές επιλέγεται ένα αντικείμενο στον συνδυασμό, τόσες μπάλες βάζουμε στο κουτί του.

Απεικόνιση 2:

Φτιάχνουμε τον πίνακα θέσεων $1, 2, \dots, n+k-1$. Τοποθετούμε σε $n-1$ από τις θέσεις χωρίσματα και στις υπόλοιπες k σφαιρίδια. Καθένα από τα n κουτιά περιέχει τόσα σφαιρίδια όσα περικλείονται από τα αντίστοιχα χωρίσματα. Έχουμε $n-1$ χωρίσματα και k σφαιρίδια, άρα

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

τρόπους.

Από το φυλλάδιο τις ασκήσεις 1.6, 1.7, 1.9.

05/10/2026 — §1.4 (συνέχεια)

	Διατάξεις	Συνδυασμοί
Με επανάληψη	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Χωρίς επανάληψη	$(n)_k$	$\binom{n}{k}$

Από το φυλλάδιο τις ασκήσεις 1.11, 1.12, 1.10.

Άσκηση. Ποιοι είναι οι διαφορετικοί αναγραμματισμοί της λέξης:

α′) ΝΕΡΟ;

β′) ΑΛΑΤΙ;

γ′) ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΟΣ;

Λύση. (α) 4! γιατί όλες οι μεταθέσεις των τεσσάρων γραμμάτων δίνουν διαφορετική λέξη.

(β) Σημαδεύουμε τα δύο Α ώστε θεωρούνται διαφορετικά γράμματα, έστω A_1, A_2. Θα έχουμε τότε 5! μεταθέσεις των 5 γραμμάτων, αλλά κάθε λέξη μετριέται δύο φορές. Π.χ., η λέξη ΑΙΛΤΑ μετριέται και ως A_1ΙΛΤA_2 και ως A_2ΙΛΤA_1 Εφαρμόζοντας την αρχή του βοσκού, το πλήθος που ζητούμε είναι

$$\frac{5!}{2} = 60.$$

(γ) Εδώ, πάλι σημαδεύουμε τα γράμματα που έχουν πολλαπλές εμφανίσεις. Και φαινομενικά θα έχουμε 12! λέξεις. Αν διαγράψουμε τις ταμπέλες που διαφοροποιούν τα Τ, θα πάρουμε

$$\frac{12!}{3!}$$

λέξεις. Έπειτα σε αυτές τις λέξεις, αν διαγράψουμε τις ταμπέλες που διαφοροποιούν τα Ι, θα πάρουμε

$$\frac{12!}{3!2!}$$

διαφορετικές λέξεις. Κάνοντας το ίδιο με όλα τα γράμματα, βρίσκουμε τον ζητούμενο αριθμό.

$$\frac{12!}{3!2!2!2!}$$

Τα παραγοντικά στον παρονομαστή αφορούν τα γράμματα Τ, Ι, Α, Σ.

Φυλλάδιο, άσκηση 1.16.

Άσκηση. Πόσοι τρόποι υπάρχουν να μοιράσουμε 12 άτομα σε μια ομάδα των 2, μια δεύτερη ομάδα των 5 και μια τρίτη ομάδα των 5;

Λύση

$$\binom{12}{5}\binom{7}{5}\frac{1}{2!}.$$

Οι δύο ομάδες των 5 είναι ίδιου μεγέθους και δεν διακρίνονται.

Αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού για πληθάριθμους

Έστω $A_1, \dots, A_n$ πεπερασμένα σύνολα. Ορίζουμε

$$S_{n,1} = |A_1| + \cdots + |A_n|, \qquad S_{n,2} = \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j|,$$

και γενικά

$$S_{n,k} = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Το $S_{n,k}$ είναι άθροισμα $\binom{n}{k}$ όρων, ένας όρος για κάθε υποσύνολο $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ του $[n]$ με k στοιχεία.

Θεώρημα.

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = S_{n,1} - S_{n,2} + S_{n,3} - \cdots + (-1)^{n-1} S_{n,n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_{n,k}.$$

Ειδικές περιπτώσεις.

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|,$$
$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

06/10/2026 — §1.4 (συνέχεια)

Φυλλάδιο, ασκήσεις 1.17, 1.14.

Δείτε την 1.15.

§1.5 — Αφηγηματικές αποδείξεις

Για πολλές συνδυαστικές ταυτότητες, μπορούμε να κάνουμε αφηγηματικές αποδείξεις. Τις προτιμούμε. Για παράδειγμα

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}.$$

Για τη δεύτερη, φανταζόμαστε ότι θέλουμε από n άτομα να φτιάξουμε μια ομάδα k ατόμων στην οποία θα ένα θα έχει τον ρόλο του αρχηγού. Τα δύο μέλη της ισότητας δείχνουν δύο τρόπους να γίνει αυτή η κατασκευή.

1ος τρόπος: Επιλέγουμε ένα άτομο από τα n ως αρχηγό. Έπειτα επιλέγουμε τα υπόλοιπα $k-1$ για να συμπληρωθεί η ομάδα.

2ος τρόπος: Επιλέγουμε k άτομα από τα n, και έπειτα επιλέγουμε ένα άτομο από τα k ως αρχηγό.

§1.6 — Ο γενικός ορισμός της πιθανότητας

Έστω Ω ένα σύνολο.

Ορισμός. Συνάρτηση πιθανότητας στο Ω λέμε κάθε συνάρτηση

$$P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

με τις εξής ιδιότητες:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $P\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$, για κάθε ακολουθία $(A_j)_{j\geq 1}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του Ω.

Η ιδιότητα 2 ονομάζεται *αριθμήσιμη προσθετικότητα*. Το ζεύγος (Ω, P) το λέμε χώρο πιθανότητας.

Σκεφτόμαστε το Ω ως δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και το $P(A)$ ως την πιθανότητα να συμβεί το A (δηλαδή το αποτέλεσμα, ω, του πειράματος να είναι στοιχείο του A).

Ερμηνείες του αριθμού $P(A)$.

Συχνοτική: Σχετική συχνότητα πραγματοποίησης του A σε άπειρο πλήθος πειραματοποιήσεων του πειράματος.

Μπεϋζιανή: Βαθμός πεποίθησης ότι θα συμβεί το A.

Πρόταση 1 (Συνέπειες του ορισμού) Έστω P μια συνάρτηση πιθανότητας στο Ω. Τότε

(α) $P(\emptyset) = 0$.

(β) $P\big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\big) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$, αν τα $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ είναι ανά δύο ξένα.

(γ) $P(B\setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$, για $A, B \subset \Omega$.

Ειδικές περιπτώσεις.

$$P(B\setminus A) = P(B) - P(A), \qquad \text{αν } A \subset B \subset \Omega,$$
$$P(A^c) = 1 - P(A), \qquad \text{αν } A \subset \Omega.$$

(δ) $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

(ε) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$.

Απόδειξη. (α) Θεωρούμε την εξής ακολουθία ξένων ανά δύο ενδεχομένων: $A_1 = \Omega$ και $A_n = \emptyset$ για $n \geq 2$. Από το αξίωμα 2 του ορισμού (η αριθμήσιμη προσθετικότητα),

$$P(\Omega) = P(\Omega) + \sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset),$$

οπότε $P(\emptyset) = 0$.

(β) Εφαρμόζουμε το αξίωμα 2 του ορισμού στην ακολουθία $(B_n)_{n\geq 1}$, όπου $B_n = A_n$ για $n \leq k$ και $B_n = \emptyset$ για $n > k$.

(γ) Το $A \cap B$ και το $B\setminus A$ είναι ξένα μεταξύ τους και έχουν ένωση B, άρα

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B\setminus A).$$

(δ) Από το (γ), έχουμε $P(B) - P(A) = P(B\setminus A) \geq 0$ για $A \subset B$.

(ε) Το $A \cup B$ είναι η ξένη ένωση του A και του $B\setminus A$. Επομένως

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B\setminus A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Άσκηση. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και $A, B \subset \Omega$. Να αποδειχθεί ότι η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς ένα από τα A, B ισούται με

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B),$$

όπου $A\triangle B = (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$.

Λύση. Το ενδεχόμενο στην εκφώνηση είναι η συμμετρική διαφορά των A, B. Δηλαδή το $A\triangle B := (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$. Εφόσον $(A\setminus B) \cap (B\setminus A) = \emptyset$, από την πεπερασμένη προσθετικότητα έχουμε

$$\begin{aligned} P(A\triangle B) &= P(A\setminus B) + P(B\setminus A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B). \end{aligned}$$

Μάθημα 6 — 9/10/2026

Σήμερα: Ασκήσεις για την §1.6.

Πρόταση (Αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού για πιθανότητες)**.** *Αν $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$, τότε*

$$\boldsymbol{P}\Big(\cup_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_{n,k}, \qquad \textit{όπου } S_{n,k} = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \boldsymbol{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

Παρατήρηση. *Η κλασική πιθανότητα ικανοποιεί τα αξιώματα της συνάρτησης πιθανότητας. Έχουμε* Ω *πεπερασμένο και*

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \qquad A \subset \Omega.$$

Προφανώς, $\boldsymbol{P}(A) \in [0,1]$ *και* $\boldsymbol{P}(\Omega) = |\Omega|/|\Omega| = 1$. *Επίσης, αν τα* $(A_n)_{n\geq 1}$ *είναι ξένα ανά δύο, τότε*

$$|\cup_{n=1}^{\infty} A_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{P}\Big(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{P}(A_n).$$

Άσκηση. Ρίχνουμε δύο ζάρια. Ποιο άθροισμα ενδείξεων είναι πιο πιθανό, το 11 ή το 12;

Λύση. $\Omega = \{(x,y) \,:\, x,y \in [6]\}$, όπου x είναι η ένδειξη του πρώτου ζαριού και y του δεύτερου. Τα σημεία του Ω είναι ισοπίθανα. Αν

$$A_{11} = \{(5,6),(6,5)\}, \qquad A_{12} = \{(6,6)\},$$

τότε $\mathbf{P}(A_{11}) = 2/36$ και $\mathbf{P}(A_{12}) = 1/36$. Άρα πιο πιθανό άθροισμα είναι το 11. Ο Leibniz θεωρούσε ότι πρέπει να είναι ισοπίθανα.

Άσκηση 24 (βιβλίο). Οικογένεια έχει 6 παιδιά: 3 αγόρια και 3 κορίτσια. Υποθέτοντας ότι όλες οι σειρές γέννησης είναι ισοπίθανες, ποια είναι η πιθανότητα τα 3 μεγαλύτερα παιδιά να είναι κορίτσια;

Λύση. Θεωρούμε ως δειγματικό χώρο τις δυνατές εξάδες φύλων των έξι παιδιών, με τον περιορισμό να υπάρχουν ακριβώς 3 αγόρια.

$$\Omega = \{(x_1,\dots,x_6) \,:\, x_i \in \{\mathrm{A},\mathrm{K}\},\ 3 \text{ αγόρια και } 3 \text{ κορίτσια}\}.$$

Ο δειγματικός χώρος έχει πληθικότητα

$$|\Omega| = \binom{6}{3} = \frac{(6)_3}{3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} = 20$$

και τα σημεία του θεωρούνται ισοπίθανα. Το ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει είναι το $A = \{(\mathrm{K},\mathrm{K},\mathrm{K},\mathrm{A},\mathrm{A},\mathrm{A})\}$ και έχει πιθανότητα

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{20}.$$

Άσκηση 1.23 (φυλλάδιο). Σε ένα ράφι τοποθετούμε 6 βιβλία μαθηματικών, 4 φυσικής, 3 ιστορίας, 7 ξένων γλωσσών και 10 λεξικά. Ποια η πιθανότητα τα βιβλία ίδιου είδους να τοποθετηθούν μαζί;

Λύση. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_{30}$ τα ονόματα των βιβλίων. Δειγματικός χώρος είναι το σύνολο των μεταθέσεων των $X_1, X_2, \dots, X_{30}$, οπότε $|\Omega| = 30!$. Το πλήθος των ευνοϊκών διατάξεων είναι $5!\,6!\,4!\,3!\,7!\,10!$. Το βλέπουμε ως εξής. Κάθε ομάδα ομοειδών βιβλίων τα θεωρούμε ως ένα μπλοκ, τα βάζουμε δίπλα δίπλα. Υπάρχουν $5!$ τρόποι να μετατεθούν αυτά τα 5 μπλοκ. Έπειτα, στο μπλοκ των βιβλίων μαθηματικών μπορούμε να μεταθέσουμε τα 6 βιβλία με $6!$ τρόπους. Συνεχίζουμε το ίδιο και με τα άλλα μπλοκ. Έτσι προκύπτει το παραπάνω γινόμενο. Έτσι

$$\mathbf{P}(A) = \frac{5!\,6!\,4!\,3!\,7!\,10!}{30!}.$$

Άσκηση. Από μια τράπουλα επιλέγουμε δύο φύλλα, το ένα κλειστό και το άλλο ανοιχτό. Ποια είναι η πιθανότητα το κλειστό να είναι άσος και το ανοιχτό κούπα;

Λύση. Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος είναι ο

$$\Omega = \{(x,y) \,:\, x,y \in [52],\ x \neq y\}, \qquad |\Omega| = 52\cdot 51.$$

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι $3 \cdot 13 + 1 \cdot 12 = 51$ (το κλειστό άσος όχι κούπα και το ανοιχτό κούπα, και έπειτα το κλειστό άσος κούπα και το ανοιχτό κούπα). Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{51}{52 \cdot 51} = \frac{1}{52}.$$

Παράδειγμα 1.4.10 (Το πρόβλημα των γενεθλίων). Σε ένα δωμάτιο βρίσκονται k άτομα. Υποθέτουμε ότι όλες οι χρονιές έχουν 365 ημέρες και όλες οι 365^k κατανομές γενεθλίων στα k άτομα είναι ισοπίθανες. Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον δύο άτομα να έχουν την ίδια ημέρα γενέθλια;

Λύση. Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος είναι ο

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_k) \,:\, x_1, x_2, \dots, x_k \in [365]\}$$

και το ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει είναι το $A = \{(x_1, \dots, x_k) \,:\, \exists i, j \in [k],\ i \neq j \,:\, x_i = x_j\}$.

Παίρνοντας το συμπλήρωμα (A^c: όλοι έχουν διαφορετικά γενέθλια),

$$p_k := \mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(A^c) = 1 - \frac{(365)_k}{365^k},$$

όπου $(365)_k = 365 \cdot 364 \cdots (365 - k + 1)$ (για $k \leq 365$). Ενδεικτικά:

k	5	10	20	23	30	40	50	60
p_k	2.7%	11.7%	41.1%	50.7%	70.6%	89.1%	97%	99.4%

Χοντρική προσέγγιση στο p_k (εκτός μαθήματος). Χρησιμοποιούμε[1] την $1 - x \simeq e^{-x}$ για x κοντά στο 0.

$$\begin{aligned} p_k &= 1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{365}\right) \simeq 1 - \exp\left(-\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{365}\right) \\ &= 1 - e^{-k(k-1)/(2 \cdot 365)} \simeq 1 - e^{-k^2/730} =: f(k). \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, $f(23) \simeq 0.51$ και $f(40) \simeq 0.88$.

Άσκηση 1.35 (φυλλάδιο). Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με 13 διαφορετικούς φοιτητές και κάνει 4 στάσεις. Να υπολογιστεί η πιθανότητα στην πρώτη στάση να κατέβουν 3 φοιτητές, στη δεύτερη 4, στην τρίτη 4 και στην τέταρτη 2.

Λύση. Υποθέτουμε ότι κάθε φοιτητής επιλέγει ανεξάρτητα και ισοπίθανα μία από τις τέσσερις στάσεις. Οι δυνατές αποβιβάσεις είναι 4^{13}. Οι ευνοϊκές είναι

$$\binom{13}{3}\binom{10}{4}\binom{6}{4}\binom{2}{2}.$$

Άρα

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\binom{13}{3}\binom{10}{4}\binom{6}{4}}{4^{13}}.$$

Να δούμε την άσκηση 1.36.

Άσκηση 1.39 (φυλλάδιο). Ρίχνουμε ένα ζάρι n φορές ($n \geq 2$). Να βρεθούν οι πιθανότητες:
(α) το 6 να εμφανιστεί τουλάχιστον 2 φορές,
(β) τουλάχιστον 2 φορές το 6 και καθόλου το 1.

Λύση. (α) $\Omega = [6]^n$. Το συμπλήρωμα του ενδεχομένου A είναι να εμφανιστεί το 6 μηδέν ή μία φορά. Επομένως

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \left(\frac{5^n}{6^n} + \frac{n \cdot 1 \cdot 5^{n-1}}{6^n}\right).$$

[1] Από το ανάπτυγμα Taylor της e^{-x} ή από το γνωστό όριο $\lim_{x \to 0}(1 - e^{-x})/x = 1$.

Στο τελευταίο κλάσμα μετράμε τις ευνοϊκές του να εμφανιστεί ακριβώς μία φορά το 6. Έχουμε n τρόπους να επιλέξουμε τη φορά που θα εμφανιστεί το 6, και έπειτα για εκείνη τη ρίψη υπάρχει μόνο μία επιλογή ενώ για καθεμία από τις υπόλοιπες υπάρχουν 5 επιλογές.

(β) Έστω $C = \{\text{δεν εμφανίζεται καθόλου το 1}\}$ και $B = \{\text{το 6 εμφανίζεται τουλάχιστον 2 φορές}\}$. Τότε

$$\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(B^c \cap C) = \frac{5^n}{6^n} - \frac{4^n + n4^{n-1}}{6^n}.$$

Μάθημα 7 — 12/10/2026

Σήμερα: Ασκήσεις από το Κεφάλαιο 1. §2.2 και §2.3.

Άσκηση 1.44 (φυλλάδιο). $n \geq 6$. Ρίχνουμε n φορές δύο «δίκαια» ζάρια. Ποια η πιθανότητα να εμφανιστούν όλες οι διπλές (i,i), $i \in [6]$, τουλάχιστον μία φορά η καθεμία;

Λύση. Εδώ χρειάζεται η αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού. Έστω

$$A_i = \{\text{η ένδειξη } (i,i) \text{ εμφανίζεται στις } n \text{ ρίψεις}\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_6) &= 1 - \mathbf{P}(A_1^c \cup \cdots \cup A_6^c) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{6} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq 6} \mathbf{P}(A_{i_1}^c \cap \cdots \cap A_{i_k}^c) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{6} (-1)^{k-1} \binom{6}{k} \frac{(36-k)^n}{36^n} \\
&= \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} \left(\frac{36-k}{36}\right)^n.
\end{aligned}$$

Άσκηση 1.48 (φυλλάδιο. Επίσης, Παράδειγμα 1.6.4 βιβλίου). Για n διαφορετικές επιστολές ετοιμάζουμε αντίστοιχους φακέλους. Σε κάθε επιστολή αντιστοιχεί συγκεκριμένος φάκελος. Τοποθετούμε τις επιστολές τυχαία στους φακέλους (όλοι οι $n!$ τρόποι είναι ισοπίθανοι). Ποια η πιθανότητα καμία επιστολή να μην τοποθετηθεί στον σωστό φάκελο;

Λύση. Έστω A_i το ενδεχόμενο «η επιστολή i τοποθετείται σε λάθος φάκελο». Από την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &= 1 - \mathbf{P}(A_1^c \cup \cdots \cup A_n^c) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1}^c \cap \cdots \cap A_{i_k}^c) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1}.
\end{aligned}$$

Γεωμετρική πιθανότητα

Στο πνεύμα του κλασικού ορισμού ορίζεται φυσιολογικά η έννοια πιθανότητας αν ο δειγματικός χώρος $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ έχει πεπερασμένο d-διάστατο μέτρο (μήκος, εμβαδόν, όγκο, ...) και χωρία με ίσο μέτρο

θεωρούνται ισοπίθανα. Τότε

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{μέτρο}(A)}{\text{μέτρο}(\Omega)}.$$

Άσκηση 1.27 (φυλλάδιο). Θεωρούμε κύκλο ακτίνας 1. Επιλέγουμε στην τύχη δύο σημεία Α,Β στην περιφέρειά του. Ποια η πιθανότητα η χορδή ΑΒ να είναι μεγαλύτερη από την πλευρά ενός εγγεγραμμένου ισόπλευρου τριγώνου;

Λύση. Σταθεροποιούμε το A και φτιάχνουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με κορυφές Α, Γ, Δ. Το B πρέπει να επιλεγεί στο τόξο μεταξύ των άλλων δύο κορυφών Γ, Δ του ισόπλευρου τριγώνου (το τόξο που δεν περιέχει το A). Συνεπώς

$$\mathbf{P}(B \text{ στο τόξο } \Gamma\Delta) = \frac{\text{μήκος τόξου } \Gamma\Delta}{\text{μήκος κύκλου}} = \frac{2\pi/3}{2\pi} = \frac{1}{3}.$$

Να δούμε το παράδοξο Bertrand.

§2.2 Δεσμευμένη πιθανότητα

Έχουμε μια κάλπη με 5 άσπρες, 15 μαύρες και 10 κόκκινες μπάλες. Ένας φίλος εξάγει μία μπάλα στην τύχη (όλες ισοπίθανες).

α) Ποια η πιθανότητα η μπάλα να είναι άσπρη;

β) Ποια η πιθανότητα η μπάλα να είναι άσπρη αν ο φίλος μάς πει ότι δεν είναι κόκκινη;

Λύση. α) $5/30 = 1/6$. β) $5/20 = 1/4$.

Ορισμός. Έστω $(\Omega, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $B \subset \Omega$ με $\mathbf{P}(B) > 0$. Για κάθε $A \subset \Omega$, η δεσμευμένη πιθανότητα του A δεδομένου του B ορίζεται ως

$$\mathbf{P}(A \mid B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Ορίζεται αφού $\mathbf{P}(B) \neq 0$. Επιπλέον $A \cap B \subset B$, άρα $\mathbf{P}(A \cap B) \leq \mathbf{P}(B)$ και $\mathbf{P}(A \mid B) \leq 1$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, αν $A = \{\text{η μπάλα είναι άσπρη}\}$ και $B = \{\text{η μπάλα δεν είναι κόκκινη}\}$, τότε

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{5/30}{20/30} = \frac{1}{4}.$$

Σημασία του αριθμού $\mathbf{P}(A \mid B)$.

Υποκειμενική ερμηνεία: Ο βαθμός πεποίθησης για την πραγματοποίηση του A γνωρίζοντας ότι έχει συμβεί το B.

Συχνοτική ερμηνεία: Κάνουμε το τυχαίο πείραμα N φορές. Έστω N_B το πλήθος των φορών που συμβαίνει το B και $N_{A\cap B}$ το πλήθος των φορών που συμβαίνει το $A \cap B$. Τότε

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_{A\cap B}}{N_B},$$

όταν οι σχετικές συχνότητες συγκλίνουν στις αντίστοιχες πιθανότητες και $\mathbf{P}(B) > 0$. Δηλαδή πρόκειται για τη σχετική συχνότητα πραγματοποιήσεων του A μόνο μέσα στο σύνολο των δοκιμών που πραγματοποιείται το B.

Δικαιολόγηση του ορισμού. Από τη συχνοτική ερμηνεία,

$$\frac{N_{A\cap B}}{N_B} = \frac{N_{A\cap B}/N}{N_B/N} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Υπολογισμός της $\mathbf{P}(A \mid B)$.

• Πρώτος τρόπος: από τον ορισμό $\mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$.

• Δεύτερος τρόπος: αλλάζουμε δειγματικό χώρο και ξανασκεφτόμαστε ποιος είναι ο κατάλληλος δειγματικός χώρος για το πείραμα.

Άσκηση 5 (Blitzstein). Μοιράζονται τυχαία 3 φύλλα από μια τυπική τράπουλα. Παρατηρούμε ότι το πρώτο είναι άσος μπαστούνι και το δεύτερο είναι 8 σπαθί. Ποια η πιθανότητα το τρίτο να είναι άσος δεδομένων αυτών των πληροφοριών; Βρείτε την (α) με τον ορισμό και (β) με ένα επιχείρημα συμμετρίας.

Λύση. α) Ένας φυσιολογικός δειγματικός χώρος είναι οι διατεταγμένες τριάδες διαφορετικών φύλλων $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \,:\, \omega_i \in [52],\ \omega_i \text{ διαφορετικά}\}$. Έστω B το ενδεχόμενο οι δύο πρώτες θέσεις να περιέχουν τα συγκεκριμένα φύλλα και A το τρίτο φύλλο να είναι άσος. Τότε

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{(1 \cdot 1 \cdot 3)/(52 \cdot 51 \cdot 50)}{(1 \cdot 1 \cdot 50)/(52 \cdot 51 \cdot 50)} = \frac{3}{50}.$$

β) Από τα 52 φύλλα λείπουν τα δύο που έχουν μοιραστεί ήδη. Τα υπόλοιπα 50 είναι ισοπίθανα, και εκεί υπάρχουν 3 άσοι, άρα η απάντηση είναι $3/50$ (είμαστε σε δειγματικό χώρο 50 στοιχείων).

Μάθημα 8 — 14/10/2026

§2.3 Πολλαπλασιαστικός τύπος — Νόμος ολικής πιθανότητας — Τύπος Bayes

Χρήσιμος τύπος:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(A \mid B), \qquad \text{αν } \mathbf{P}(B) > 0.$$

Χρήσιμος όταν η $\mathbf{P}(A \mid B)$ υπολογίζεται με τον δεύτερο τρόπο που είδαμε πριν.

Παράδειγμα. Κάλπη περιέχει 6 άσπρα και 4 μαύρα σφαιρίδια. Εξάγουμε διαδοχικά δύο σφαιρίδια χωρίς επανάθεση. Ποια η πιθανότητα να είναι και τα δύο άσπρα;

Λύση. $A_i = \{\text{το } i\text{-οστό σφαιρίδιο είναι άσπρο}\}$, $i = 1, 2$. Τότε

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2 \mid A_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}.$$

Άλλη λύση. Με διατεταγμένα ζεύγη διαφορετικών σφαιριδίων,

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{6 \cdot 5}{10 \cdot 9}.$$

Παρατήρηση. *Αν $\boldsymbol{P}(A), \boldsymbol{P}(B) > 0$, τότε*

$$\boldsymbol{P}(A \cap B) = \boldsymbol{P}(B)\boldsymbol{P}(A \mid B) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B \mid A).$$

Ποιον τύπο προτιμούμε; Ανάλογα με το ποιο ενδεχόμενο προηγείται χρονικά (προτιμούμε να δεσμεύουμε ως προς αυτό) και ποια δέσμευση είναι ευκολότερη. Επίσης ο τύπος $\boldsymbol{P}(A \cap B) = \boldsymbol{P}(B)\boldsymbol{P}(A \mid B)$ μπορεί να διαβαστεί ως πραγματοποίηση του $A \cap B$ σε δύο βήματα. Γενίκευση αυτού του τύπου είναι ο επόμενος τύπος.

Πρόταση (Πολλαπλασιαστικός τύπος)**.** *Αν $n \geq 2$ και $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ με $\boldsymbol{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, τότε*

$$\boldsymbol{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}(A_2 \mid A_1)\boldsymbol{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \boldsymbol{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Απόδειξη. Το δεξί μέλος είναι

$$\mathbf{P}(A_1) \cdot \frac{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbf{P}(A_1)} \cdot \frac{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)}{\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})} = \mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n).$$

Άσκηση 2.8 (φυλλάδιο). Ο Shaquille O'Neal ρίχνει βολές σε μια μπασκέτα. Ρίχνει 2 για προθέρμανση, πετυχαίνει την πρώτη, αστοχεί στη δεύτερη. Έπειτα ρίχνει άλλες 100 βολές και η πιθανότητα επιτυχίας για κάθε μία ισούται με το ποσοστό επιτυχιών του στις έως τότε βολές μαζί με τις 2 της προθέρμανσης. Έστω $1 \leq k \leq 100$. Ποια η πιθανότητα οι πρώτες k βολές να είναι επιτυχίες και οι επόμενες $100-k$ να είναι αποτυχίες;

Λύση. Έστω $E_i = \{\text{η } i\text{-οστή βολή είναι επιτυχία}\}$, $i = 1, \dots, 100$ (αριθμούμε τις επόμενες βολές, όχι της προθέρμανσης). Από τον πολλαπλασιαστικό τύπο,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E_1 \cap \cdots \cap E_k \cap E_{k+1}^c \cap \cdots \cap E_{100}^c) =& \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\cdots \mathbf{P}(E_k|E_1 \cap \cdots E_{k-1}) \\ &\times \mathbf{P}(E_{k+1}^c|E_1 \cap \cdots \cap E_k)\cdots \mathbf{P}(E_{100}^c|E_1 \cap \cdots E_k \cap E_{k+1}^c \cdots \cap E_{99}^c) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{k+2}\cdot\frac{2}{k+3}\cdots\frac{100-k}{101} \\ &= \frac{k!(100-k)!}{101!} = \frac{1}{101\binom{100}{k}}.\end{aligned}$$

Πρόταση (Νόμος ολικής πιθανότητας). *Έστω $A_1, \dots, A_n$ διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω (δηλαδή $A_i \neq \emptyset$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$ και $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$), με $\boldsymbol{P}(A_i) > 0$ για κάθε i. Τότε για κάθε $B \subset \Omega$,*

$$\boldsymbol{P}(B) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{P}(A_i)\boldsymbol{P}(B \mid A_i).$$

Απόδειξη. Ισχύει $B = \cup_{i=1}^n (B \cap A_i)$ γιατί $\cup_{i=1} A_i = \Omega$. Έπειτα, τα $B \cap A_i, i \in [n]$ είναι ξένα ανά δύο. Οπότε η προσθετικότητα της πιθανότητας δίνει

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B \mid A_i).$$

Άσκηση 2.9 (φυλλάδιο). Η κάλπη K_1 περιέχει 5 άσπρα και 7 μαύρα σφαιρίδια. Η κάλπη K_2 περιέχει 3 άσπρα και 5 μαύρα σφαιρίδια. Επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την K_1 και το μεταφέρουμε στην K_2. Έπειτα επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την K_2. Ποια είναι η πιθανότητα το δεύτερο σφαιρίδιο να είναι άσπρο;

Λύση. Έστω

$$\begin{aligned}A_1 &:= \{\text{το πρώτο σφαιρίδιο είναι άσπρο}\}, \\ A_2 &:= \{\text{το πρώτο σφαιρίδιο είναι μαύρο}\}, \\ B &:= \{\text{το δεύτερο σφαιρίδιο είναι άσπρο}\}.\end{aligned}$$

Έχουμε

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B \mid A_1) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(B \mid A_2) = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{9} + \frac{7}{12}\cdot\frac{3}{9} = \frac{41}{108}.$$

Η $\mathbf{P}(B)$ δεν προκύπτει αμέσως με τον κλασικό ορισμό γιατί όταν επιλέγουμε το δεύτερο σφαιρίδιο η σύνθεση της κάλπης είναι ασαφής αν δεν γνωρίζουμε τι ήταν το πρώτο σφαιρίδιο.
Χρησιμοποιούμε τον νόμο ολικής πιθανότητας όταν έχουμε πείραμα με δύο ή περισσότερα στάδια και δεσμεύουμε ως προς το τι συνέβη πριν το τελευταίο στάδιο.

Πρόταση (Τύπος Bayes). *Έστω $\{A_1, \dots, A_n\}$ διαμέριση του Ω, με $\boldsymbol{P}(A_i) > 0$ για κάθε $i \in [n]$, και $B \subset \Omega$ με $\boldsymbol{P}(B) > 0$. Τότε, για $i = 1, \dots, n$,*

$$\boldsymbol{P}(A_i \mid B) = \frac{\boldsymbol{P}(A_i)\boldsymbol{P}(B \mid A_i)}{\boldsymbol{P}(B)} = \frac{\boldsymbol{P}(A_i)\boldsymbol{P}(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^n \boldsymbol{P}(A_j)\boldsymbol{P}(B \mid A_j)}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό και τον πολλαπλασιαστικό τύπο,

$$\mathbf{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B \mid A_i)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Για την $\mathbf{P}(B)$ στον παρονομαστή, χρησιμοποιούμε την έκφραση από τον ΝΟΠ.

Άσκηση 2.14 (φυλλάδιο). Έχουμε δύο κάλπες X, Y με την εξής σύνθεση:
X: 5 μαύρα και 5 άσπρα σφαιρίδια
Y: 1 μαύρο και 9 άσπρα σφαιρίδια.
Ένα άτομο επιλέγει τυχαία μία κάλπη (50% πιθανότητα για την καθεμία) και εξάγει τυχαία με επανάθεση 4 σφαιρίδια. Μας πληροφορεί ότι και τα 4 σφαιρίδια είναι άσπρα. Ποια είναι η πιθανότητα να είχε επιλέξει στην αρχή την κάλπη X;

Λύση. Έστω

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\text{επιλέγει την } X\}, \\ A_2 &:= \{\text{επιλέγει την } Y\}, \\ B &:= \{\text{επιλέγει 4 άσπρα σφαιρίδια}\}. \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1 \mid B) &= \frac{\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B \mid A_1)}{\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B \mid A_1) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(B \mid A_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\frac{5^4}{10^4}}{\frac{1}{2}\frac{5^4}{10^4} + \frac{1}{2}\frac{9^4}{10^4}} = \frac{5^4}{5^4 + 9^4} \simeq 0.087. \end{aligned}$$

Η $\mathbf{P}(A_1)$ λέγεται η *a priori* πιθανότητα του A_1. Εδώ ήταν 0.5.
Η $\mathbf{P}(A_1|\mathrm{B})$ λέγεται η *a posteriori* πιθανότητα του A_1. Εδώ ήταν 0.087.
Η πεποίθησή μας για το αν συνέβη το A_1 εξαρτάται από τις πληροφορίες που έχουμε.

Μάθημα 9 — 16/10/2026

Άσκηση 2.15 (φυλλάδιο). Σε έναν πληθυσμό το 0.1% πάσχει από ασθένεια X. Ένα τεστ, αν το άτομο είναι ασθενές, κάνει λάθος στο 5% των περιπτώσεων, ενώ αν το άτομο είναι υγιές κάνει λάθος στο 1% των περιπτώσεων. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, του κάνουμε το τεστ και το τεστ βγαίνει θετικό. Ποια η πιθανότητα το άτομο να είναι ασθενές;

Λύση. Έστω $A = \{\text{το άτομο είναι ασθενές}\}$, $\mathbf{P}(A) = 10^{-3}$, και $B = \{\text{το τεστ βγαίνει θετικό}\}$. Οι δεσμευμένες πιθανότητες είναι

	Ασθενής	Υγιής
Θετικό	0.95	0.01
Αρνητικό	0.05	0.99

Με τον τύπο Bayes,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \mid B) &= \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) + \mathbf{P}(A^c)\mathbf{P}(B \mid A^c)} \\ &= \frac{10^{-3} \cdot 95/100}{10^{-3} \cdot 95/100 + (999/1000) \cdot 1/100} = \frac{95}{95 + 999} \simeq 0.0868. \end{aligned}$$

Κατανόηση. Σε πληθυσμό 10^5 ατόμων, περίπου 100 είναι ασθενείς και 99.900 υγιείς. Από τους ασθενείς περίπου 95 έχουν θετικό και 5 αρνητικό τεστ. Από τους υγιείς περίπου 999 έχουν ψευδώς θετικό και 98.901 αρνητικό τεστ. Επομένως από τα $95 + 999$ θετικά τεστ μόνο τα 95 αντιστοιχούν σε ασθενείς.

Άσκηση (το πρόβλημα Monty Hall). Ο Monty Hall παρουσιάζει ένα παιχνίδι με 3 κλειστές πόρτες, αριθμημένες $1, 2, 3$. Τυχαία σε μία από αυτές τοποθετείται ένα αυτοκίνητο, ενώ στις άλλες δύο από μία κατσίκα. Ο παίκτης επιλέγει μία πόρτα. Ο Monty ανοίγει μία από τις άλλες δύο πόρτες.

Σενάριο 1. Ο Monty γνωρίζει πού είναι το αυτοκίνητο. Ανοίγει πόρτα που δεν έχει το αυτοκίνητο και, αν υπάρχουν δύο επιλογές, επιλέγει καθεμία με πιθανότητα $1/2$.

Σενάριο 2. Ο Monty δεν γνωρίζει και ανοίγει μία πόρτα τυχαία, με πιθανότητα $1/2$ για καθεμία.

Σε ένα συγκεκριμένο παιχνίδι, ο παίκτης επιλέγει την πόρτα 1, ο Monty ανοίγει την 2, αυτή περιέχει κατσίκα, και ο Monty δίνει στον παίκτη τη δυνατότητα να αλλάξει πόρτα. Τι πρέπει να κάνει ο παίκτης (α) στο σενάριο 1; (β) στο σενάριο 2;

Λύση. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} C_i &:= \{\text{το αμάξι είναι στην πόρτα } i\}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \Pi_2 &:= \{\text{ο Monty ανοίγει την πόρτα 2 και αυτή έχει κατσίκα}\}. \end{aligned}$$

Ψάχνουμε την πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης αν αλλάξει, δηλαδή την $\mathbf{P}(C_3 \mid \Pi_2)$. Ισοδύναμα, υπολογίζουμε την πιθανότητα $\mathbf{P}(C_1 \mid \Pi_2)$ για το να μείνει στην πόρτα 1. Ο τύπος του Bayes δίνει ότι

$$\mathbf{P}(C_1 \mid \Pi_2) = \frac{\mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(\Pi_2 \mid C_1)}{\mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(\Pi_2 \mid C_1) + \mathbf{P}(C_2)\mathbf{P}(\Pi_2 \mid C_2) + \mathbf{P}(C_3)\mathbf{P}(\Pi_2 \mid C_3)}.$$

Στο *σενάριο 1*, έχουμε

$$\mathbf{P}(C_1 \mid \Pi_2) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{1}{3}.$$

Άρα η αλλαγή στην πόρτα 3 κερδίζει με πιθανότητα $2/3$ και συμφέρει.
Στο *σενάριο 2*, έχουμε

$$\mathbf{P}(C_1 \mid \Pi_2) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Άρα, δεδομένου ότι ανοίχτηκε πόρτα με κατσίκα, η αλλαγή και η παραμονή έχουν την ίδια πιθανότητα επιτυχίας.

Η διαφορά είναι στην πιθανότητα $\mathbf{P}(\Pi_2 \mid C_3)$. Στο σενάριο 1, ο Monty ανοίγει την πόρτα 2 επειδή ξέρει ότι στην πόρτα 3 βρίσκεται το αυτοκίνητο. Στο σενάριο 2, το να ανοίξει την πόρτα 2 δεν γίνεται αυτόματα γιατί έχει άγνοια, έχει πιθανότητα $1/2$ να την ανοίξει.

§2.5 Ανεξαρτησία

Ορισμός. Δύο ενδεχόμενα $A, B \subset \Omega$ λέγονται *ανεξάρτητα* αν

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Αν $\mathbf{P}(A) > 0$, τότε ανεξαρτησία $\iff \mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B)$.
Αν $\mathbf{P}(B) > 0$, τότε ανεξαρτησία $\iff \mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A)$.
Δηλαδή, η γνώση της πραγματοποίησης του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.

Παραδείγματα. 1) Ρίχνουμε ένα δίκαιο ζάρι δύο φορές. Έστω $A = \{\text{η πρώτη ένδειξη είναι 4}\}$, $B = \{\text{η δεύτερη ένδειξη είναι 1}\}$. Τα A, B είναι ανεξάρτητα, γιατί

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{1}{6}, \quad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

2) Στο ίδιο πείραμα έστω $\Sigma_1 = \{$το άθροισμα των ενδείξεων είναι 6$\}, \Sigma_2 = \{$το άθροισμα των ενδείξεων είναι 7$\}$ και $F = \{$η πρώτη ένδειξη είναι 4$\}$. Τα Σ_1, F δεν είναι ανεξάρτητα:

$$\mathbf{P}(\Sigma_1) = \frac{5}{36}, \qquad \mathbf{P}(F) = \frac{1}{6}, \qquad \mathbf{P}(F \mid \Sigma_1) = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{6} = \mathbf{P}(F).$$

Όμοια, τα Σ_2, F είναι ανεξάρτητα (καθώς $\mathbf{P}(\Sigma_2) = 6/36$ και $\mathbf{P}(F \cap \Sigma_2) = 1/36$).

Άσκηση 2.26 (φυλλάδιο). Αν τα $A, B \subset \Omega$ είναι ανεξάρτητα, τότε επίσης ανεξάρτητα είναι τα εξής ζεύγη: (α) A, B^c, (β) A^c, B, (γ) A^c, B^c.

Λύση. α) Επειδή $A = (A \cap B) \dot\cup (A \cap B^c)$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cap B^c) &= \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) \\ &= \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B^c).\end{aligned}$$

β) Όμοια, αλλάζουμε τους ρόλους των A, B στο (α). γ) Έπεται από το (α) και το (β).

Άσκηση 31. Ποια $A \subset \Omega$ έχουν την ιδιότητα τα A, A να είναι ανεξάρτητα;

Λύση. $\mathbf{P}(A \cap A) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(A)$, άρα

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A)^2 \iff \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(A)) = 0 \iff \mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}.$$

Άσκηση 30. Μια οικογένεια έχει τρία παιδιά με ονόματα Α, Β, Γ. Έστω

$$\begin{aligned}A_1 &:= \{\text{το Α είναι μεγαλύτερο από το Β}\}, \\ A_2 &:= \{\text{το Α είναι μεγαλύτερο από το Γ}\}.\end{aligned}$$

(α) Συζητήστε διαισθητικά αν τα A_1, A_2 ανεξάρτητα. (β) Υπολογίστε την $\mathbf{P}(A_1 \mid A_2)$.

Λύση. Υποθέτουμε ότι όλες οι 3! σειρές ηλικίας των Α, Β, Γ είναι ισοπίθανες.
(α) Δεν είναι ανεξάρτητα. Θα δικαιολογήσουμε γιατί πρέπει $\mathbf{P}(A_1|A_2) > \mathbf{P}(A_1)$. Αυτό ισχύει γιατί χωρίς καμία πληροφορία, για λόγους συμμετρίας, τα Α>Β, Α<Β είναι ισοπίθανα, και άρα το πρώτο έχει πιθανότητα 1/2. Γνωρίζοντας όμως ότι Α>Γ, πλέον έχουμε μια πληροφορία για το παιδί Α, ότι ηλικιακά είναι προς μεγάλο. Ενώ για το Β δεν έχουμε καμία πληροφορία.

Σκεφτείτε μια τριάδα παικτών που παίζει σκάκι για τους οποίους δεν γνωρίζουμε πόσο ικανός είναι ο καθένας. Αν ο Α κερδίσει τον Γ και μετά παίζει ο Α με τον Β, σε ποιον θα ποντάρατε ότι θα κερδίσει;

(β) Έχουμε $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = 1/2$ και

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2),$$

(οι δύο ευνοϊκές σειρές για το $A_1 \cap A_2$ είναι $A > B > \Gamma$ και $A > \Gamma > B$) οπότε δεν είναι ανεξάρτητα. Επιπλέον,

$$\mathbf{P}(A_1 \mid A_2) = \frac{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbf{P}(A_2)} = \frac{2/6}{1/2} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}.$$