Πιθανότητες Ι

Ασκήσεις

Άσκηση 1 . (Ένας χαρακτηρισμός της μέση τιμής) Έστω X τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}(X^2) \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ με $h(t) := \mathbf{E}\{(X - t)^2\}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ παίρνει ελάχιστη τιμή στο σημείο $\mathbf{E}(X)$.

Άσκηση 2. (Ένας χαρακτηρισμός του διάμεσου) Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}(X) \in \mathbb{R}$. Να δειχθούν τα εξής.

(α) Η συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ με $h(t) := \mathbf{E}|X - t|$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ παίρνει ελάχιστη τιμή.

(β) Ένα $m \in \mathbb{R}$ είναι σημείο ελαχίστου για την h αν και μόνο αν το m είναι διάμεσος της τυχαίας μεταβλητής X (Δηλαδή $\mathbf{P}(X \ge m) \ge /1/2$ και $\mathbf{P}(X \le m) \ge 1/2$).

Άσκηση 3. Ένας δεσμοφύλακας συμφωνεί να παίξει το εξής παιχνίδι με έναν κρατούμενο. Διαθέτει 50 μαύρα και 50 λευκά σφαιρίδια και δύο κάλπες, Α και Β. Αφήνει τον κρατούμενο να τοποθετήσει τα σφαιρίδια στις δύο κάλπες ώστε κάθε κάλπη να περιέχει τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο και καθένα από τα 100 σφαιρίδια να μπει σε μία από τις δύο κάλπες. Έπειτα ο κρατούμενος θα επιλέξει τυχαία μία κάλπη (στρίβοντας ένα αμερόληπτο νόμισμα) και θα επιλέξει τυχαία ένα σφαρίδιο μέσα από αυτή την κάλπη. Αν επιλέξει λευκό σφαιρίδιο, ο δεσμοφύλακας θα τον ελευθερώσει (διαφορετικά, θα τον κρατήσει στη φυλακή). Πώς πρέπει να μοιράσει τα σφαιρίδια στις δύο κάλπες στην αρχή ο κρατούμενος ώστε να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα να ελευθερωθεί;

Πιο απαιτητικές ασκήσεις

Πρόβλημα 1. Για $p \in (0, 1)$, μετατοπισμένη γεωμετρική με παράμετρο p λέμε κάθε τυχαία μεταβλήτη με συνάρτηση πιθανότητας

$$\mathbf{P}(X = k) = \begin{cases} (1-p)^k p & \text{αν } k = 0, 1, 2, ... \\ 0 & \text{αν } k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$$

[Τότε η X+1 είναι γεωμετρική τ.μ.] Γράφουμε $X \sim \text{ΜΓεωμ}(p)$. Σε ακολουθία ανεξάρτητων πραγματοποιήσεων πειράματος που έχει πιθανότητα επιτυχίας p, το πλήθος των αποτυχιών μέχρι την πρώτη επιτυχία ακολουθεί τη μετατοπισμένη γεωμετρική με παράμετρο p.

Έστω $p_1, p_2 \in (0, 1)$. Θεωρούμε μια πραγματοποίηση μιας $X \sim \text{ΜΓεωμ}(p_1)$. Έπειτα εκτελούμε X ανεξάρτητες φορές ένα πείραμα που έχει πιθανότητα επιτυχίας p_2 [Αν $X = 0$, τότε δεν εκτελούμε κάτι]. Έστω Y το πλήθος των επιτυχιών σε αυτές τις X πραγματοποιήσεις του πειράματος.

(α) Ποια η κατανομή της Y;

(β) Η κατανομή της Y είναι κάποια γνωστή κατανομή. Αν για τον προσδιορισμό της στο (α) χρειαστήκατε υπολογισμούς αθροισμάτων μπορείτε να βρείτε μια λύση που τους αποφεύγει;

Πρόβλημα 2. Λύστε την Άσκηση 2 πιο πάνω χωρίς να υποθέσετε ότι η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή. [Δηλαδή υποθέτουμε μόνο ότι παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$ και έχει πεπερασμένη μέση τιμή.]

Πρόβλημα 3.

Λύσεις/σχόλια

1. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της μέση τιμής βρίσκουμε $h(t) = t^2 - 2t\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X^2)$. Έπειτα μελετούμε αυτό το τριώνυμο ως προς τα ακρότατα.

2. (α) Από την υπόθεση έχουμε $\mathbf{E}|X| < \infty$. Η $|X-t| \geq |t| - |X|$ δίνει ότι $h(t) \geq |t| - \mathbf{E}(|X|)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα $h(-\infty) = h(\infty) = \infty$. Έπειτα, η h είναι Lipschitz με σταθερά 1 γιατί για κάθε $s, t \in \mathbb{R}$ έχουμε $|X-t| - |X-s| \leq |t-s|, |X-s| - |X-t| \leq |t-s|$ άρα $|h(t) - h(s)| \leq |t-s|$ (μάλιστα είναι και κυρτή). Έπεται με επιχειρήματα απειροστικού λογισμού ότι η h παίρνει ελάχιστη τιμή.

(β) Η $|X-t|$ είναι τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα (εύκολη άσκηση) οπότε από τη θεωρητική άσκηση 5.2 του Ross έχουμε[1]

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^\infty \mathbf{P}(|X-t| > s)\,ds = \int_0^\infty \{\mathbf{P}(X > t+s) + \mathbf{P}(X < t-s)\}\,ds \\ &= \int_0^\infty \{1 - F(t+s)\}\,ds + \int_0^\infty F(t-s)\,ds \\ &= \int_t^\infty \{1 - F(r)\}\,dr + \int_{-\infty}^t F(r)\,dr. \end{aligned}$$

Τα ολοκληρώματα στη δεύτερη γραμμή είναι πεπερασμένα αφού οι ολοκληρωτέοι τους είναι μη αρνητικοί και φράσσονται από πάνω από ολοκληρώσιμη συνάρτηση [την $s \mapsto \mathbf{P}(|X-t| > s)$]. Επειδή η F είναι συνεχής, η h είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(t) = -(1 - F(t)) + F(t) = 2F(t) - 1.$$

Τα υπόλοιπα είναι απειροστικός λογισμός.

[1] Η σχέση στην άσκηση του Ross ισχύει για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή της οποίας η μέση τιμή μπορεί να οριστεί, δεν χρειάζεται η τ.μ. να έχει η πυκνότητα, αλλά με τα εφόδια του μαθήματός μας δεν μπορούμε να το δείξουμε σε αυτή τη γενικότητα. Έτσι, η πρώτη ισότητα για την h ισχύει πάντοτε. Στην τρίτη ισότητα, χρησιμοποιήσαμε το ότι η X είναι συνεχής τ.μ. για να γράψουμε $\mathbf{P}(X < t-s) = F(t-s)$.