Δεσμευμένη πιθανότητα και ανεξαρτησία
Ασκήσεις

Αντώνης Οικονόμου
aeconom@math.uoa.gr

29 Μαρτίου 2010

***Άσκηση* 1 (Ross, Exer. 3.9):** Θεωρούμε 3 κάλπες. Η κάλπη A περιέχει 2 λευκά και 4 κόκκινα σφαιρίδια, η κάλπη B περιέχει 8 λευκά και 4 κόκκινα σφαιρίδια και η κάλπη C περιέχει 1 λευκό και 3 κόκκινα σφαιρίδια. Επιλέγουμε ένα σφαιρίδιο από κάθε κάλπη. Ποια είναι η πιθανότητα το σφαιρίδιο που επιλέχθηκε από την κάλπη A να είναι λευκό, δεδομένου ότι γνωρίζουμε ότι ακριβώς δυο από τα τρία επιλεχθέντα σφαιρίδια ήταν λευκά.

***Άσκηση* 2 (Ross, Exer. 3.13):** Σε μια γειτονιά, το 36% των οικογενειών έχουν σκύλο και το 22% των οικογενειών που έχουν σκύλο έχει επιπλέον και γάτα. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι το 30% των οικογενειών της γειτονιάς έχει γάτα.

1. Ποιά είναι η πιθανότητα μια οικογένεια της γειτονιάς να έχει και σκύλο και γάτα;

2. Ποιά είναι η δεσμευμένη πιθανότητα μια οικογένεια της γειτονιάς να έχει σκύλο δεδομένου ότι έχει γάτα;

***Άσκηση* 3 (Ross, Exer. 3.21):** Θεωρούμε δυο κάλπες I και II. Η κάλπη I περιέχει 2 λευκά και 4 κόκκινα σφαιρίδια, ενώ η κάλπη II περιέχει 1 λευκό και 1 κόκκινο σφαιρίδιο. Επιλέγουμε στην τύχη ένα από τα σφαιρίδια της κάλπης I και το τοποθετούμε στην κάλπη II. Κατόπιν επιλέγουμε στην τύχη ένα από τα σφαιρίδια της κάλπης II.

1. Ποια είναι η πιθανότητα το σφαιρίδιο που επιλέχθηκε από την κάλπη II να είναι λευκό;

2. Ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα το σφαιρίδιο που μεταφέρθηκε από την κάλπη I στην κάλπη II να ήταν λευκό, δεδομένου ότι από την κάλπη II επιλέχθηκε λευκό σφαιρίδιο;

***Άσκηση* 4 (Ross, Exer. 3.29):** Η αγγλική και η αμερικάνικη ορθογραφία της λέξης 'ρίγκορ' (αυστηρότητα) είναι 'rigour' και 'rigor' αντίστοιχα. Σε ένα ξενοδοχείο μένουν 40 άγγλοι και 60 αμερικάνοι. Από αυτούς επιλέγεται τυχαία ένας και του ζητείται να γράψει τη λέξη 'ρίγκορ'. Κατόπιν από τα γράμματα της λέξης που γράφει επιλέγεται ένα στην τύχη. Ποιά είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ο άνθρωπος που επιλέχθηκε να είναι άγγλος, δεδομένου ότι το γράμμα που επιλέχθηκε στην τύχη ήταν φωνήεν;

***Άσκηση* 5 (Ross, Exer. 3.34):** Θεωρούμε 2 κάλπες A και B. Η κάλπη A έχει 5 λευκά και 7 μαύρα σφαιρίδια, ενώ η κάλπη B έχει 3 λευκά και 12 μαύρα σφαιρίδια. Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα. Αν το αποτέλεσμα είναι κορώνα τότε επιλέγεται ένα σφαιρίδιο από την κάλπη A ενώ αν είναι γράμματα τότε επιλέγεται ένα σφαιρίδιο από την κάλπη B. Ποιά η δεσμευμένη πιθανότητα το νόμισμα να έφερε γράμματα, δεδομένου ότι το σφαιρίδιο που επιλέχθηκε είναι λευκό;

Άσκηση 6 (Ross, Exer. 3.73): Οι παίκτες A και B παίζουν μια σειρά παιχνιδιών. Σε κάθε παιχνίδι, η πιθανότητα να κερδίσει ο A είναι p και η πιθανότητα να κερδίσει ο B είναι $1-p$. Το παιχνίδι σταματά την πρώτη φορά που κάποιος από τους δυο παίκτες έχει πάρει προβάδισμα 2 νικών και ο παίκτης αυτός ανακηρύσσεται νικητής του αγώνα.

1. Βρείτε την πιθανότητα ο αγώνας να διαρκέσει 4 παιχνίδια.
2. Βρείτε την πιθανότητα ο A να είναι ο νικητής του αγώνα.

Άσκηση 7 (Ross, Exer. 3.81): Έστω το σύνολο $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Επιλέγουμε εντελώς τυχαία και ανεξάρτητα δυο υποσύνολα A και B του S (δηλαδή όλα τα 2^n υποσύνολα του S, συμπεριλαμβανομένου του $\emptyset$ και του S είναι εξίσου πιθανά).

1. Βρείτε την πιθανότητα $P(A \subseteq B)$.
2. Βρείτε την πιθανότητα $P(AB = \emptyset)$.

Άσκηση 8 (Ross, Exer. 3.Theor15): Θεωρούμε ένα επαναλαμβανόμενο πείραμα τύχης το οποίο σε κάθε επανάληψή του έχει πιθανότητα επιτυχίας p και πιθανότητα αποτυχίας $1-p$ (ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli). Έστω P_n η πιθανότητα σε n επαναλήψεις του πειράματος να έχει σημειωθεί άρτιος αριθμός επιτυχιών (δηλαδή $0, 2, 4, \dots, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ επιτυχίες). Αποδείξτε ότι

1. $P_n = p(1-P_{n-1}) + (1-p)P_{n-1}, \quad n \geq 1,$
2. $P_n = \frac{1+(1-2p)^n}{2}$.

Άσκηση 9 (Tijms, Prob. 8.2): Ένα δίκαιο νόμισμα ρίπτεται 3 φορές. Γνωρίζουμε ότι μια τουλάχιστον από τις ρίψεις ήταν κορώνα. Ποια είναι τότε η πιθανότητα τουλάχιστον μια απο τις άλλες ρίψεις να ήταν επίσης κορώνα;

Άσκηση 10 (Tijms, Prob. 8.14): Οι εμπειρογνώμονες πιστεύουν ότι ένα ναυάγιο βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη θαλάσσια περιοχή με πιθανότητα $p = 0.4$. Αν το ναυάγιο βρίσκεται στη συγκεκριμένη περιοχή, τότε η αναζήτηση στην περιοχή θα το εντοπίσει με πιθανότητα $d = 0.9$. Ποια είναι η πιθανότητα το ναυάγιο να βρίσκεται στη συγκεκριμένη περιοχή αν μετά την αναζήτηση το ναυάγιο δεν εντοπίστηκε στην περιοχή αυτή;

Απαντήσεις

Άσκηση 1 (Ross, Exer. 3.9): Έστω τα ενδεχόμενα

$$
\begin{aligned}
W_A &= \text{το σφαιρίδιο που επιλέγεται από την κάλπη } A \text{ να είναι λευκό,} \\
W_B &= \text{το σφαιρίδιο που επιλέγεται από την κάλπη } B \text{ να είναι λευκό,} \\
W_C &= \text{το σφαιρίδιο που επιλέγεται από την κάλπη } C \text{ να είναι λευκό,} \\
W_2 &= \text{2 από τα επιλεχθέντα σφαιρίδια να είναι λευκά.}
\end{aligned}
$$

Ζητάμε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(W_A|W_2)$. Παρατηρούμε ότι $W_2 = W_A W_B W_C^c \cup W_A W_B^c W_C \cup W_A^c W_B W_C$ και έτσι έχουμε

$$
\begin{aligned}
P(W_A|W_2) &= \frac{P(W_A W_2)}{P(W_2)} \\
&= \frac{P(W_A W_B W_C^c) + P(W_A W_B^c W_C)}{P(W_A W_B W_C^c) + P(W_A W_B^c W_C) + P(W_A^c W_B W_C)} \\
&= \frac{\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{4}} \\
&= \frac{7}{11}.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2 (Ross, Exer. 3.13): Επιλέγουμε μια οικογένεια της γειτονιάς. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$
\begin{aligned}
D &= \text{η οικογένεια έχει σκύλο,} \\
C &= \text{η οικογένεια έχει γάτα.}
\end{aligned}
$$

Από τα δεδομένα του προβήματος έχουμε $P(D) = 0.36$, $P(C|D) = 0.22$ και $P(C) = 0.30$. Η πιθανότητα η επιλεχθείσα οικογένεια να έχει σκύλο και γάτα είναι

$$P(DC) = P(D)P(C|D) = 0.36 \cdot 0.22 = 0.0792.$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα να έχει σκύλο δεδομένου ότι έχει γάτα είναι

$$P(D|C) = \frac{P(DC)}{P(C)} = \frac{P(D)P(C|D)}{P(C)} = \frac{0.36 \cdot 0.22}{0.30} = \frac{0.0792}{0.30} = 0.264.$$

Άσκηση 3 (Ross, Exer. 3.21): Έστω τα ενδεχόμενα

$$
\begin{aligned}
I_W &= \text{επιλέγεται λευκό σφαιρίδιο από την κάλπη I και μεταφέρεται στην κάλπη II,} \\
II_W &= \text{επιλέγεται λευκό σφαιρίδιο από την κάλπη II.}
\end{aligned}
$$

Η πιθανότητα το σφαιρίδιο που επιλέχθηκε από την κάλπη II να είναι λευκό είναι

$$P(II_W) = P(I_W)P(II_W|I_W) + P(I_W^c)P(II_W|I_W^c) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα το σφαιρίδιο που μεταφέρθηκε από την κάλπη I στην κάλπη II να ήταν λευκό, δεδομένου ότι από την κάλπη II επιλέχθηκε λευκό σφαιρίδιο είναι

$$P(I_W|II_W) = \frac{P(I_W II_W)}{P(II_W)} = \frac{P(I_W)P(II_W|I_W)}{P(II_W)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 4 (Ross, Exer. 3.29): Έστω τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} E &= \text{ο άνθρωπος που επιλέχθηκε να είναι άγγλος,} \\ A &= \text{ο άνθρωπος που επιλέχθηκε να είναι αμερικάνος,} \\ V &= \text{το γράμμα που επιλέχθηκε να είναι φωνήεν.} \end{aligned}$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε $P(E) = 0.4$, $P(A) = 0.6$, $P(V|E) = 3/6 = 0.5$ και $P(V|A) = 2/5 = 0.4$. Η δεσμευμένη πιθανότητα ο άνθρωπος που επιλέχθηκε να είναι άγγλος, δεδομένου ότι το γράμμα που επιλέχθηκε ήταν φωνήεν είναι

$$P(E|V) = \frac{P(EV)}{P(V)} = \frac{P(E)P(V|E)}{P(E)P(V|E) + P(A)P(V|A)} = \frac{0.4 \cdot 0.5}{0.4 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.4} = \frac{5}{11}.$$

Άσκηση 5 (Ross, Exer. 3.34): Έστω τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} T &= \text{το νόμισμα έφερε γράμματα,} \\ H &= \text{το νόμισμα έφερε κορώνα,} \\ W &= \text{το σφαιρίδιο που επιλέχθηκε είναι λευκό.} \end{aligned}$$

Τότε η δεσμευμένη πιθανότητα το νόμισμα να έφερε γράμματα, δεδομένου ότι το σφαιρίδιο που επιλέχθηκε είναι λευκό είναι

$$P(T|W) = \frac{P(TW)}{P(W)} = \frac{P(T)P(W|T)}{P(T)P(W|T) + P(H)P(W|H)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{15}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{12}{37}.$$

Άσκηση 6 (Ross, Exer. 3.73): Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι

$$\{AA, BB, ABAA, ABBB, BAAA, BABB, \ldots\},$$

όπου κάθε σημείο του δειγματικού χώρου παριστάνεται με μια λεξη αποτελούμενη από A και B, που δείχνει τη διαδοχή νικητών στα παιχνίδια μέχρι να τελειώσει ο αγώνας. Το ενδεχόμενο ο αγώνας να διαρκέσει 4 παιχίδια είναι το $\{ABAA, ABBB, BAAA, BABB\}$. Η αντίστοιχη πιθανότητα είναι τότε $2p^3(1-p) + 2p(1-p)^3 = 2p(1-p)(p^2 + (1-p)^2)$. Για να βρούμε την πιθανότητα να είναι ο A ο νικητής του αγώνα, δεσμεύουμε στο αποτέλεσμα των πρώτων δυο παιχνιδιών. Έστω τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A-A &= \text{ο } A \text{ είναι ο νικητής των δυο πρώτων παιχνιδιών,} \\ A-B &= \text{ο } A \text{ είναι ο νικητής του πρώτου παιχνιδιού και ο } B \text{ του δεύτερου παιχνιδιού,} \\ B-A &= \text{ο } B \text{ είναι ο νικητής του πρώτου παιχνιδιού και ο } A \text{ του δεύτερου παιχνιδιού,} \\ B-B &= \text{ο } B \text{ είναι ο νικητής των δυο πρώτων παιχνιδιών,} \\ A &= \text{ο } A \text{ είναι ο νικητής του αγώνα.} \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας και έχουμε

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A-A)P(A|A-A) + P(A-B)P(A|A-B) + P(B-A)P(A|B-A) + P(B-B)P(A|B-B) \\ &= p^2 \cdot 1 + 2p(1-p)P(A) + (1-p)^2 \cdot 0. \end{aligned}$$

Λύνοντας για το $P(A)$ παίρνουμε

$$P(A) = \frac{p^2}{1 - 2p(1-p)}.$$

Άσκηση 7 (Ross, Exer. 3.81) Για να βρούμε την πιθανότητα $P(A \subseteq B)$, χρησιμοποιούμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας, δεσμεύοντας στον αριθμό των στοιχείων $|A|$ του συνόλου A. Έχουμε

$$\begin{aligned} P(A \subseteq B) &= \sum_{k=0}^{n} P(|A| = k) P(A \subseteq B|\, |A| = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \cdot \frac{2^{n-k}}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{(1+\frac{1}{2})^n}{2^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε $P(AB = \emptyset) = P(A \subseteq B^c) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, αφού το B^c είναι εξίσου πιθανό να είναι οποιοδήποτε από τα υποσύνολα.

Άσκηση 8 (Ross, Exer. 3.Theor15): Η σχέση $P_n = p(1 - P_{n-1}) + (1 - p)P_{n-1}$ αποδεικνύεται δεσμεύοντας στο αποτέλεσμα της πρώτης δοκιμής του πειράματος. Αν είναι επιτυχία, με πιθανότητα p, τότε για να έχουμε άρτιο αριθμό επιτυχιών στις n δοκιμές θα πρέπει να έχουμε περιττό αριθμό επιτυχιών στις $n - 1$ δοκιμές $2, 3, 4, \ldots, n$, ενδεχόμενο που συμβαίνει με πιθανότητα $1 - P_{n-1}$. Αν είναι αποτυχία, με πιθανότητα $1 - p$, τότε για να έχουμε άρτιο αριθμό επιτυχιών στις n δοκιμές θα πρέπει να έχουμε άρτιο αριθμό επιτυχιών στις $n - 1$ δοκιμές $2, 3, 4, \ldots, n$, ενδεχόμενο που συμβαίνει με πιθανότητα P_{n-1}. Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε αμέσως το ζητούμενο.

Η σχέση $P_n = p(1-P_{n-1})+(1-p)P_{n-1}$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή $P_n = p+(1-2p)P_{n-1}$, που φανερώνει ότι η P_n είναι μεικτή πρόοδος. Λύνοντας την εξίσωση $x = p+(1-2p)x$ βρίσκουμε το σταθερό σημείο της, $x = \frac{1}{2}$. Αφαιρώντας κατά μέλη την εξίσωση $x = p+(1-2p)x$ από την $P_n = p+(1-2p)P_{n-1}$, έχουμε $P_n - x = (1 - 2p)(P_{n-1} - x)$, δηλαδή η $P_n - x = P_n - \frac{1}{2}$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $1 - 2p$. Επομένως έχουμε

$$P_n - \frac{1}{2} = (1 - 2p)^n (P_0 - \frac{1}{2}) = (1 - 2p)^n (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1 - 2p)^n,$$

και παίρνουμε τελικά ότι

$$P_n = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}.$$

Άσκηση 9 (Tijms, Prob. 8.2): Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 8 ισοπίθανα δειγματικά σημεία, τα $HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT$. Έστω A το ενδεχόμενο δυό η περισσοτέρων κορώνων (H) σε τρεις ρίψεις και B το ενδεχόμενο μια τουλάχιστον κορώνας στις τρεις ρίψεις. Τότε έχουμε

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{4/8}{7/8} = \frac{4}{7}.$$

Άσκηση 10 (Tijms, Prob. 8.14): Έστω A το ενδεχόμενο το ναυάγιο να βρίσκεται πράγματι στη συγκεκριμένη θαλάσσια περιοχή και B το ενδεχόμενο το ναυάγιο να μην εντοπιστεί μετά την αναζήτηση στην περιοχή. Τότε τα δεδομένα του προβλήματος δείχνουν ότι $P(A) = p$ και $P(B|A) = 1 - d$ και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)} = \frac{p(1 - d)}{p(1 - d) + (1 - p)1} = \frac{1}{16} = 0.0625.$$

Πηγές

1. Ross, S. (2002) *A First Course in Probability, 6th Edition.* Prentice-Hall.

2. Tijms, H. (2007) *Understanding Probability: Chance Rules in Everyday Life.* Cambridge University Press.