

Πιθανότητες I
Τελική Εξέταση. 20 Φεβρουαρίου 2012
Ομάδα Α

Θέμα 1.[30 Βαθμοί] **(α)** Κατασκευάζουμε έναν 15-ψήφιο αριθμό που το κάθε ψηφίο του επιλέγεται ανεξάρτητα από την ομοιόμορφη κατανομή στο $\{1, 2, \dots, 9\}$. Ποιά η πιθανότητα να εμφανιστεί το ψηφίο 8 ακριβώς τρεις φορές, και μάλιστα σε διαδοχικές θέσεις;

(β) Από ένα κουτί που περιέχει 3 κόκκινες, 3 μαύρες, και 4 άσπρες μπάλες, εξάγουμε διαδοχικά με επανάθεση μία σφαίρα κάθε φορά.

(i) Ποιός ο αναμενόμενος αριθμός εξαγωγών (δοκιμών) μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά κόκκινη μπάλα;

(ii) Ποιός ο αναμενόμενος αριθμός εξαγωγών (δοκιμών) μέχρι να εμφανιστούν και τα δύο χρώματα, κόκκινο και μαύρο;

Θέμα 2.[30 Βαθμοί] **(α)** Έστω τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $N(0, 1)$. Να βρεθεί η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $W = |X|$.

(β) Έστω X τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με πυκνότητα $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}$. Να βρεθεί η πιθανότητα $P(X > t)$ για $t > 0$.

(γ) Ένα κιβώτιο περιέχει 10 λυχνίες οι οποίες έχουν διάρκεια ζωής, εκφρασμένη σε χρόνια, εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο $\lambda_1 = 1/4$ οι 3 από αυτές, και με παράμετρο $\lambda_2 = 1/2$ οι υπόλοιπες 7. Επιλέγουμε τυχαία μια λυχνία από το κιβώτιο. Ποιά η πιθανότητα η διάρκεια ζωής της λυχνίας να ξεπεράσει τα 5 χρόνια;

Θέμα 3.[25 Βαθμοί] Έστω συνεχής τυχαία μεταβλητή X με πυκνότητα $f_X(x) = 6x(1-x) \mathbf{1}_{0<x<1}$.

(α) Υπολογίστε τις $E(X)$, $\text{Var}(X)$.

(β) Βρείτε προσεγιστικά την πιθανότητα το άθροισμα 500 ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με πυκνότητα την f_X , να ξεπερνά το αριθμό 240.

Θέμα 4.[25 Βαθμοί] Η συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) έχει πυκνότητα

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < \frac{y}{2} < x < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Είναι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y ανεξάρτητες;

(β) Βρείτε την συνδιακύμανση $\text{Cov}(X, Y)$.

Για την συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής $N(0, 1)$ ισχύει: $\Phi(0.5) = 0.691$, $\Phi(1) = 0.841$, $\Phi(2) = 0.977$

Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Απαντήσεις

1. (α)

$$\frac{13 \times 8^{12}}{9^{15}}$$

(β) (i) $10/3$.

(ii) $(10/6) + (10/3)$. Λύση όπως στο πρόβλημα του συλλέκτη κουπονιών.

2. (α)

$$f_W(x) = \begin{cases} 2f_X(x) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{αν } x > 0, \\ 0 & \text{αν } x \leq 0. \end{cases}$$

(β) $e^{-\lambda t}$.

(γ) Θεώρημα ολικής πιθανότητας.

$$\frac{3}{10}e^{-5\lambda_1} + \frac{7}{10}e^{-5\lambda_2}.$$

3. (α) $E(X) = 1/2, \text{Var}(X) = 1/20$.

(β) $S_{500} := X_1 + \dots + X_{500}$. $E(S_{500}) = 250, \text{Var}(S_{500}) = 25$.

$$P(S_{500} \geq 240) = P\left(\frac{S_{500} - 250}{5} \geq -2\right) \approx 1 - \Phi(-2) = \Phi(2).$$

4. (α) Εξαρτημένες.

(β)

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{18}.$$