

B

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2008

Σημείωση: Τα 2(β) και 3(β) είναι προαιρετικά και αξιολογούνται με μία μονάδα το καθένα.

Θέμα 1. Το δοχείο A περιέχει 6 κόκκινα και 4 πράσινα σφαιρίδια, ενώ το δοχείο B περιέχει 5 κόκκινα και 3 πράσινα (όλα τα σφαιρίδια θεωρούνται διακεκριμένα). Επιλέγουμε τυχαία δύο σφαιρίδια από το A και τα μεταφέρουμε στο B, και στη συνέχεια εξάγουμε στην τύχη ένα σφαιρίδιο από το B.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα:

(i) Να εξαχθεί κόκκινο σφαιρίδιο;

(ii) Να είχαμε μεταφέρει 2 κόκκινα σφαιρίδια από το A στο B αν είναι γνωστό ότι το χρώμα του σφαιριδίου που εξήχθη στην τελευταία δοκιμή είναι κόκκινο;

(iii) Να είχαμε μεταφέρει 2 πράσινα σφαιρίδια από το A στο B αν είναι γνωστό ότι το χρώμα του σφαιριδίου που εξήχθη στην τελευταία δοκιμή είναι κόκκινο;

(β) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα $A_1 = \{\text{κόκκινο τελικό εξαγόμενο}\}$ και $A_2 = \{\text{δύο κόκκινα σφαιρίδια μεταφέρθηκαν από το A στο B}\}$ είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Θέμα 2. (α) Ρίχνουμε ένα ζάρι μέχρι για πρώτη φορά να εμφανιστεί η ένδειξη «6», και έστω X ο αριθμός των δοκιμών που απαιτούνται μέχρι να συμβεί αυτό. Να βρείτε:

(i) Τον αναμενόμενο αριθμό δοκιμών, τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X και τη διασπορά της.

(ii) Την πιθανότητα να μην εμφανιστεί η ένδειξη «4», αν είναι γνωστό ότι το «6» εμφανίστηκε (για πρώτη φορά) στην k δοκιμή (για $k = 1, 2, \dots$).

(iii) Την πιθανότητα να εμφανιστεί το «4» (τουλάχιστον μία φορά).

(iv) Την πιθανότητα να εμφανιστούν και οι δύο ενδείξεις «4» και «5» από τουλάχιστον μία φορά η καθεμιά (πριν έρθει το «6»).

(β) Έστω X_1, X_2, \dots, X_ν ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή $\mathbb{E}(X_i) = 1$ και διασπορά $V(X_i) = 3$, $i = 1, 2, \dots, \nu$. Να προσδιορίσετε σταθερές $a_\nu \in \mathbb{R}$ και $b_\nu > 0$ τέτοιες ώστε η τυχαία μεταβλητή $a_\nu - b_\nu Y$ να έχει μέση τιμή 0 και διασπορά 1, όπου

$$Y = \sum_{i=1}^{\nu} 2^{i-1} X_i.$$

Θέμα 3. (α) Η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{|x|}}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 9), \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Θέτουμε $Y = \sqrt{|X|}$. Να υπολογισθούν:

(i) Η σταθερά c .

(ii) Η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$ της τυχαίας μεταβλητής Y .

(iii) Η μέση τιμή και η διασπορά των τυχαίων μεταβλητών X και Y .

(β) Έστω X τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή 1. Να βρεθεί η πιθανογεννήτρια της X .

Να λυθούν και τα 3 θέματα σε $\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!