

A

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ I, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2008

Σημείωση: Τα 2(β) και 3(β) είναι προαιρετικά και αξιολογούνται με μία μονάδα το καθένα.

Θέμα 1. Το δοχείο A περιέχει 4 λευκά και 6 μαύρα σφαιρίδια, ενώ το δοχείο B περιέχει 3 λευκά και 5 μαύρα (όλα τα σφαιρίδια θεωρούνται διακεκριμένα). Επιλέγουμε τυχαία δύο σφαιρίδια από το A και τα μεταφέρουμε στο B, και στη συνέχεια εξάγουμε στην τύχη ένα σφαιρίδιο από το B.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα:

(i) Να εξαχθεί λευκό σφαιρίδιο;

(ii) Να είχαμε μεταφέρει 2 λευκά σφαιρίδια από το A στο B αν είναι γνωστό ότι το χρώμα του σφαιριδίου που εξήχθη στην τελευταία δοκιμή είναι λευκό;

(iii) Να είχαμε μεταφέρει 2 μαύρα σφαιρίδια από το A στο B αν είναι γνωστό ότι το χρώμα του σφαιριδίου που εξήχθη στην τελευταία δοκιμή είναι λευκό;

(β) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα $A_1 = \{\text{λευκό τελικό εξαγόμενο}\}$ και $A_2 = \{\text{δύο λευκά σφαιρίδια μεταφέρθηκαν από το A στο B}\}$ είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Θέμα 2. (α) Ρίχνουμε ένα ζάρι μέχρι για πρώτη φορά να εμφανιστεί η ένδειξη «4», και έστω X ο αριθμός των δοκιμών που απαιτούνται μέχρι να συμβεί αυτό. Να βρείτε:

(i) Τον αναμενόμενο αριθμό δοκιμών, τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X και τη διασπορά της.

(ii) Την πιθανότητα να μην εμφανιστεί η ένδειξη «3», αν είναι γνωστό ότι το «4» εμφανίστηκε (για πρώτη φορά) στην κ δοκιμή (για $\kappa = 1, 2, \dots$).

(iii) Την πιθανότητα να εμφανιστεί το «3» (τουλάχιστον μία φορά).

(iv) Την πιθανότητα να εμφανιστούν και οι δύο ενδείξεις «3» και «5» από τουλάχιστον μία φορά η καθεμιά (πριν έρθει το «4»).

(β) Έστω X_1, X_2, \dots, X_ν ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή $\mathbb{E}(X_i) = 2$ και διασπορά $V(X_i) = 8$, $i = 1, 2, \dots, \nu$. Να προσδιορίσετε σταθερές $a_\nu \in \mathbb{R}$ και $b_\nu > 0$ τέτοιες ώστε η τυχαία μεταβλητή $a_\nu + b_\nu Y$ να έχει μέση τιμή 0 και διασπορά 1, όπου

$$Y = \sum_{i=1}^{\nu} 3^{i-1} X_i.$$

Θέμα 3. (α) Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{|x|}}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 4), \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Θέτουμε $Y = \sqrt{|X|}$. Να υπολογισθούν:

(i) Η σταθερά c .

(ii) Η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$ της τυχαίας μεταβλητής Y .

(iii) Η μέση τιμή και η διασπορά των τυχαίων μεταβλητών X και Y .

(β) Έστω X τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της X (όπου αυτή υπάρχει).

Να λυθούν και τα 3 θέματα σε $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!