ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Ι, ΙΟΥΛΙΟΥ 2007

Θέμα 1. (α) Έστω A_j το ενδεχόμενο να μη εκλεγεί το γράμμα ω_j, $j=1,2,3$. Τότε η ζητουμένη πιθανότητα εκφράζεται ως $P(A_1'A_2'A_3')$ και σύμφωνα με τον τύπο του Poincare δίνεται από την

$$P(A_1'A_2'A_3') = 1-\{P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\}$$
$$+\{P(A_1A_2)+P(A_1A_3)+P(A_2A_3)\}-P(A_1A_2A_3).$$

Επειδή

$$P(A_j)=\left(\frac{19}{20}\right)^5,\ P(A_iA_j)=\left(\frac{18}{20}\right)^5,\ i\neq j,\ P(A_1A_2A_3)=\left(\frac{17}{20}\right)^5,$$

παίρνουμε

$$P(A_1'A_2'A_3') = 1-3\left(\frac{19}{20}\right)^5+3\left(\frac{18}{20}\right)^5-\left(\frac{17}{20}\right)^5. \qquad \textbf{(5μ)}$$

(β) Θεωρώντας την εκλογή φωνηέντου ως επιτυχία, οι διαδοχικές εκλογές γραμμάτων αποτελούν ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p=1/4$. Επομένως ο αριθμός X των φωνηέντων που εκλέγονται στις 5 δοκιμές ακολουθεί τη διωνυμική με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x)=\binom{5}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{5-x},\ x=0,1,\dots,5.$$

Η μέση τιμή αυτής υπολογίζεται ως εξής:

$$E(X)=\sum_{x=1}^{5}x\binom{5}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}=5\cdot\frac{1}{4}\sum_{x=1}^{5}\binom{4}{x-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{4-(x-1)}=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^4=\frac{5}{4}.$$

Επίσης

$$E[(X)_2]=\sum_{x=2}^{5}x(x-1)\binom{5}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}=5\cdot4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\sum_{x=2}^{5}\binom{3}{x-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}\left(\frac{3}{4}\right)^{3-(x-2)}=\frac{5}{4}$$

και επομένως η διασπορά είναι

$$V(X)=E[(X)_2]+E(X)-[E(X)]^2=\frac{5}{4}+\frac{5}{4}-\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{15}{16}. \qquad \textbf{(5μ)}$$

Θέμα 2. (α) Έστω A το ενδεχόμενο το εκλεγόμενο άτομο να είναι άνδρας και B το ενδεχόμενο να πάσχει από αχρωματοψία. Αν $N(A)$ είναι ο αριθμός των ανδρών και $N(A')=N-N(A)$ ο αριθμός των γυναικών στο πληθυσμό, όπου N είναι το μέγεθος του πληθυσμού, τότε $N(A)=\theta N(A')=\theta\{N-N(A)\}$ και επομένως

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{\theta}{1+\theta}.$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τους τύπους της ολικής πιθανότητας και του Bayes παίρνουμε

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(A')P(B\mid A')=\frac{\theta q}{1+\theta}+\frac{q^2}{1+\theta}=\frac{q(\theta+q)}{1+\theta}$$

και

$$P(A'\mid B)=\frac{P(A')P(B\mid A')}{P(A)P(B\mid A)+P(A')P(B\mid A')}=\frac{q^2/(1+\theta)}{q(\theta+q)/(1+\theta)}=\frac{q}{\theta+q}. \qquad \textbf{(6μ)}$$

(β) Έστω B_j το ενδεχόμενο το εκλεγόμενο άτομο να πάσχει από αχρωματοψία, $j=1,2$. Τότε η ζητουμένη πιθανότητα εκφράζεται ως $P(B_1\cup B_2)$ και, χρησιμοποιώντας το ότι τα ενδεχόμενα B_1 και B_2 είναι ανεξάρτητα, δίνεται από την

$$P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)-P(B_1)P(B_2)=2\frac{q(\theta+q)}{1+\theta}-\left(\frac{q(\theta+q)}{1+\theta}\right)^2,$$

ή ισοδύναμα

$$P(B_1\cup B_2)=1-P(B_1'B_2')=1-P(B_1')P(B_2')=1-\left(1-\frac{q(\theta+q)}{1+\theta}\right)^2. \qquad \textbf{(4μ)}$$

Θέμα 3. (α) Η συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$, $-\infty<y<\infty$, της τυχαίας μεταβλητής $Y=|X|$, εκφράζεται συναρτήσει της συνάρτησης κατανομής $F_X(x)$, $-\infty<x<\infty$ της X ως

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)=F_X(y)-F_X(-y),\ -\infty<y<\infty,$$

και έτσι χρησιμοποιώντας την έκφραση της $F_X(x)$, $-\infty<x<\infty$, συνάγουμε την $F_Y(y)$, $-\infty<y<\infty$, και παραγωγίζοντας αυτή παίρνουμε την $f_Y(y)$, $-\infty<y<\infty$,

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & -\infty<y<0\\ \dfrac{2y}{3}, & 0\le y<1\\ \dfrac{y+1}{3}, & 1\le y<2\\ 1, & 2\le y<\infty\end{cases},\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}, & 0\le y<1\\ \dfrac{1}{3}, & 1\le y<2\\ 0, & -\infty<y<0,\\ & 2\le y<\infty\end{cases} \qquad \textbf{(5μ)}$$

(β) Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $Y=|X|$ υπολογίζεται ως εξής:

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy=\frac{2}{3}\int_0^1 ydy+\frac{1}{3}\int_1^2 ydy=\left[\frac{y^2}{3}\right]_0^1+\left[\frac{y^2}{6}\right]_1^2=\frac{2+4-1}{6}=\frac{5}{6}.$$

Επίσης

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty}y^2f_Y(y)dy=\frac{2}{3}\int_0^1 y^2dy+\frac{1}{3}\int_1^2 y^2dy=\left[\frac{2y^3}{9}\right]_0^1+\left[\frac{y^3}{9}\right]_1^2=\frac{2+8-1}{9}=1$$

και επομένως η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $Y=|X|$ είναι

$$V(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{36-25}{36}=\frac{11}{36}. \qquad \textbf{(5μ)}$$