ΛΥΣΕΙΣ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι -ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2006

Θέμα 1. (α) Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα:

A_1 : το ζεύγος (2,5) δεν εμφανίζεται στις ν ρίψεις,

A_2 : το ζεύγος (1,4) δεν εμφανίζεται στις ν ρίψεις και

A_3 : το ζεύγος (6,3) δεν εμφανίζεται στις ν ρίψεις.

Τότε η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} P(A_1^c A_2^c A_3^c) &= 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= 1 - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) + P(A_1A_2) + P(A_1A_3) + P(A_2A_3) - P(A_1A_2A_3) \\ &= 1 - 3\left(\frac{35}{36}\right)^\nu + 3\left(\frac{34}{36}\right)^\nu - \left(\frac{33}{36}\right)^\nu . \end{aligned}$$

(β) Έστω Y ο αριθμός των εμφανίσεων των εδρών της μορφής (x,y), όπου $x+y = 10$ στις ν ρίψεις. Θεωρώντας ως επιτυχία την εμφάνιση εδρών της μορφής (x,y), όπου $x+y=10$ σε μία ρίψη και υποθέτοντας τις ν ρίψεις ανεξάρτητες μεταξύ τους συμπεραίνουμε ότι Y ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν και $p = 3/36$. Συνεπώς η ζητουμένη πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) &= 1 - \binom{\nu}{0} p^0 (1-p)^\nu - \binom{\nu}{1} p^1 (1-p)^{\nu-1} \\ &= 1 - \left(\frac{33}{36}\right)^\nu - \nu \frac{3}{36}\left(\frac{33}{36}\right)^{\nu-1} . \end{aligned}$$

(γ) Ο αναμενόμενος αριθμός εμφανίσεων των εδρών της μορφής (x,y), όπου $x+y=10$, επειδή η τ.μ. Y ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή, είναι ίσος με

$$E(Y) = \nu p = \frac{3\nu}{36} = \frac{\nu}{12}.$$

Θέμα 2. Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα E_i : ο i ένορκος ψηφίζει ότι ο κατηγορούμενος είναι ένοχος, i=1,2,3,4,5,6 και το ενδεχόμενο E: ο κατηγορούμενος είναι ένοχος. Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$P(E) = 0.80 \quad P(E_i \mid E) = 0.90, \quad P(E_i \mid E^c) = 0.85, \quad i=1,2,3,4,5,6.$$

(α) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της Ολικής Πιθανότητας και τη (δεσμευμένη) στοχαστική ανεξαρτησία των $E_1,\ldots,E_6$ βρίσκουμε τη ζητούμενη πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(E_1E_2E_3E_4E_5E_6) &= P(E_1E_2E_3E_4E_5E_6 \mid E)P(E) + P(E_1E_2E_3E_4E_5E_6 \mid E^c)P(E^c) \\ &= \left[P(E_i \mid E)\right]^6 P(E) + \left[P(E_i \mid E^c)\right]^6 P(E^c) \\ &= (0.90)^6\, 0.80 + (0.85)^6 (1-0.80). \end{aligned}$$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από τον τύπο του Bayes

$$\begin{aligned} P(E \mid E_1E_2E_3E_4E_5E_6) &= \frac{P(E_1E_2E_3E_4E_5E_6 \mid E)P(E)}{P(E_1E_2E_3E_4E_5E_6)} \\ &= \frac{(0.90)^6\, 0.80}{(0.90)^6\, 0.80 + (0.85)^6 (1-0.80)} . \end{aligned}$$

Θέμα 3. (α) Ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση πυκνότητας παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = c\int_{-\infty}^{3} e^{-(3-x)}dx + c\int_{3}^{+\infty} e^{-(x-3)}dx = 2c\int_{0}^{+\infty} e^{-y}dy = -2c[e^{-y}]_0^{+\infty} = 2c$$

και επειδή $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ συμπεραίνουμε ότι $c = 1/2$.

(β) Από το (α) παίρνουμε ότι

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-3|},\ x \in R.$$

Η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ για $-\infty < x < 3$ δίνεται από την

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-(3-t)}dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{t-3}d(t-3) = \frac{1}{2}\left[e^{t-3}\right]_{-\infty}^{x} = \frac{e^{x-3}}{2},$$

ενώ για $3 \le x < \infty$ δίνεται από την

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{3} e^{-(3-t)}dt + \frac{1}{2}\int_{3}^{x} e^{-(t-3)}dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[e^{-(t-3)}\right]_{3}^{x} = 1 - \frac{e^{-(x-3)}}{2}.$$

(γ) Η $f(x)$ είναι συμμετρική περί το σημείο 3 και επομένως $E(X) = 3$. Πράγματι

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-3+3)f(x)dx = 3 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{3}(x-3)e^{-(3-x)}dx + \frac{1}{2}\int_{3}^{+\infty}(x-3)e^{-(x-3)}dx$$

$$= 3 - \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} ye^{-y}dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} ye^{-y}dy = 3 + 0 = 3.$$

Η διασπορά υπολογίζεται ως εξής:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-3)^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{3}(x-3)^2 e^{-(3-x)}dx + \frac{1}{2}\int_{3}^{+\infty}(x-3)^2 e^{-(x-3)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} y^2e^{-y}dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} y^2e^{-y}dy = \int_{0}^{+\infty} y^2e^{-y}dy = \Gamma(3) = 2.$$

(δ) Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $Y = e^{X-3}$ είναι $F_Y(y) = 0$ για $-\infty < y \le 0$ και

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(e^{X-3} \le y) = P(X - 3 \le \ln y) = P(X \le \ln y + 3) = F(\ln y + 3),$$

για $0 < y < \infty$. Συνεπώς

$$f_Y(y) = \frac{1}{y}f(\ln y + 3) = \frac{1}{2y}e^{-|\ln y + 3 - 3|} = \frac{1}{2y}e^{-|\ln y|},\ 0 < y < \infty$$

και επειδή $\ln y < 0$ για $0 < y < 1$ και $\ln y \ge 0$ για $1 \le y < \infty$, συμεραίνουμε ότι

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2y^2}, & y \ge 1 \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

Θέμα 4. (α) Αθροίζοντας τη συνάρτηση πιθανότητας, παίρνουμε

$$\sum_{x\in Z} f(x) = \sum_{x=-\infty}^{-1} f(x) + f(0) + \sum_{x=1}^{+\infty} f(x) = \sum_{x=-\infty}^{-1} c\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} + f(0) + \sum_{x=1}^{+\infty} c\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$$

$$= f(0) + 2\sum_{x=1}^{+\infty} c\left(\frac{1}{3}\right)^{x} = c + 2c\frac{1/3}{2/3} = c + c = 2c$$

και επειδή $\sum_{x\in Z} f(x) = 1$, συμπεραίνουμε ότι $c = 1/2$.

(β) Από το (α) έχουμε $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$, $x = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ και έτσι η σ.κ. $F(x)$ για $-\infty < x < 0$ δίνεται από την

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{[x]} f(k) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{[x]} \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} = \frac{1}{2}\sum_{k=-[x]}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{-[x]} \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{j} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{-[x]-1},$$

ενώ για $0 \le x < \infty$ δίνεται από την

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{[x]} f(k) = F(-1) + \sum_{k=0}^{[x]} f(k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{[x]}\left(\frac{1}{3}\right)^{k} = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{[x]}.$$

(γ) Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y = |X|$ δίνεται από την

$$f_Y(0) = P(Y=0) = P(|X|=0) = P(X=0) = f(0) = \frac{1}{2}$$

και

$$f_Y(y) = P(Y=y) = P(|X|=y) = P(X=\pm y) = P(X=y) + P(X=-y)$$

$$= f(y) + f(-y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{y} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{y}, \quad y = 1, 2, \ldots.$$

(δ) Για τη μέση τιμή της Y έχουμε ότι

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{+\infty} y f_Y(y) = \frac{1}{3}\sum_{y=1}^{+\infty} y\left(\frac{1}{3}\right)^{y-1} = \frac{1}{3}\sum_{y=1}^{+\infty} y\left(\frac{1}{3}\right)^{y-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^{2}} = \frac{3}{4}.$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς της τυχαίας μεταβλητής Y θα χρειαστούμε την παραγοντική ροπή $2^{ης}$ τάξης

$$E[(Y)_2] = \sum_{y=2}^{+\infty} y(y-1) f_y(y) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \sum_{y=2}^{+\infty} y(y-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{y-2} = \frac{1}{9}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3}} = \frac{3}{4}$$

και τελικά

$$V(Y) = E[(Y)_2] + E(Y) - E^2(Y) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^{2} = \frac{15}{16}.$$