ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2006

ΘΕΜΑ 1. Έστω ότι καταγράφεται σ'ένα κατάλογο ο μήνας γενεθλίων κάθε ατόμου τυχόντος συνόλου 5 φίλων $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$. Υποθέτουμε ότι και οι 12 μήνες του έτους $\{a_1, a_2, ..., a_{12}\}$ είναι το ίδιο πιθανοί ως μήνες γενεθλίων. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες καταγραφής

α) μια ακριβώς φορά του Σεπτεμβρίου και δύο ακριβώς φορές του Δεκεμβρίου,

β) των μηνών Ιανουαρίου και Φεβρουαρίου μια τουλάχιστον φορά τον καθένα,

γ) των μηνών Ιανουαρίου, Φεβρουαρίου και Μαρτίου μια τουλάχιστον φορά τον καθένα και

δ) του Νοεμβρίου δύο τουλάχιστον φορές.

ΘΕΜΑ 2. Ας θεωρήσουμε ένα πομπό ο οποίος εκπέμπει τυχαία τα σήματα $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ υπό αναλογία 1:2:2. Έστω X ο αριθμός εκπομπών του σήματος σ_0 σε 10 συνολικά εκπομπές σημάτων.

α) Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x) = P(X = x)$, $x = 0, 1, ..., 10$; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

β) Να βρεθεί η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$ (υπολογίζοντας τα σχετικά αθροίσματα).

γ) Έστω Y ο αριθμός των εκπομπών σημάτων μέχρι να παρατηρηθεί για πρώτη φορά η εκπομπή του σήματος σ_2. Να βρεθεί η μέση τιμή $E(Y)$ (υπολογίζοντας το σχετικό άθροισμα).

ΘΕΜΑ 3. Έστω X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής

$$F_X\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{a} \ln\left(\dfrac{a}{x}\right), & 0 < x \leq a \\ 1, & x > a \end{cases}$$

όπου a θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

β) Να βρεθούν η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y = \ln\left(aX^{-1}\right)$.

γ) Να υπολογισθεί η μέση τιμή $E\left(Y\right)$ και η διασπορά $V\left(Y\right)$ της Y.

Απαντήστε και στα 3 θέματα σε $2\frac{1}{2}$ ώρες. Καλή επιτυχία.

Απαντήσεις θεμάτων

Θέμα 1. *α)* Η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από τη σχέση

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}10^2}{12^5}=\frac{5\cdot 6\cdot 10^2}{12^5}=\frac{250}{12^4}.$$

β) Έστω A_1 το ενδεχόμενο μη καταγραφής του Ιανουαρίου και A_2 το ενδεχόμενο μη καταγραφής του Φεβρουαρίου στην 5-άδα $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\}$. Τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(A_1^c A_2^c)$ που υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned}P(A_1^c A_2^c)&=1-P(A_1\cup A_2)=1-P(A_1)-P(A_2)+P(A_1A_2)\\&=1-\frac{11^5}{12^5}-\frac{11^5}{12^5}+\frac{10^5}{12^5}=1-2\frac{11^5}{12^5}+\frac{10^5}{12^5}.\end{aligned}$$

γ) Έστω A_3 το ενδεχόμενο μη καταγραφής του Μαρτίου στην 5-άδα $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\}$. Χρησιμοποιώντας και τα ενδεχόμενα A_1, A_2 του ερωτήματος *β*), η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(A_1^c A_2^c A_3^c)$ που υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned}P(A_1^c A_2^c A_3^c)&=1-P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(A_1)-P(A_2)-P(A_3)\\&\quad+P(A_1A_2)+P(A_1A_3)+P(A_2A_3)-P(A_1A_2A_3)\\&=1-\frac{11^5}{12^5}-\frac{11^5}{12^5}-\frac{11^5}{12^5}+\frac{10^5}{12^5}+\frac{10^5}{12^5}+\frac{10^5}{12^5}-\frac{9^5}{12^5}\\&=1-3\frac{11^5}{12^5}+3\frac{10^5}{12^5}-\frac{9^5}{12^5}.\end{aligned}$$

δ) Έστω X ο αριθμός εμφανίσεων του μήνα Νοέμβριου στην 5-άδα $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\}$. Η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned}P(X\geq 2)=P(X<2)&=1-P(X=0)-P(X=1)\\&=1-\binom{5}{0}\left(\frac{1}{12}\right)^0\left(\frac{11}{12}\right)^5-\binom{5}{1}\left(\frac{1}{12}\right)^1\left(\frac{11}{12}\right)^4\\&=1-\left(\frac{11}{12}\right)^5-5\frac{11^4}{12^5}\end{aligned}$$

(οι πιθανότητες $P(X=0)$ και $P(X=1)$ υπολογίζονται είτε με τη χρήση της Διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους $n=5$ και $p=1/12$, είτε απευθείας με συνδυαστικό τρόπο).

Θέμα 2. ***α)*** Θεωρούμε τις εκπομπές των σημάτων ως δοκιμές και την εκπομπή του σήματος σ_0 ως 'επιτυχία. Υποθέτουμε ότι οι εκπομπές των σημάτων (δοκιμές) είναι **ανεξάρτητες**. Έτσι το X εκφράζει τον αριθμό των επιτυχιών (εκπομπών του σήματος σ_0) σε n =10 ανεξάρτητες δοκιμές (εκπομπές σημάτων) με πιθανότητα επιτυχίας **σταθερή** σε κάθε δοκιμή και ίση με 1/5. Επομένως η κατανομή της τ.μ. X είναι η **Διωνυμική** με παραμέτρους $\boldsymbol{n}$ **=10** και $\boldsymbol{p}$ **=1/5**:

$$f_X(x) = P(X = x) = \binom{10}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{10-x}, \ x = 0,1,...,10.$$

β) Θα βρούμε τις παραγοντικές ροπές της Διωνυμικής κατανομής. Έστω $r \le n$. Είναι

$$\mu_{(r)} = E(X_{(r)}) = \sum_{x=r}^{n}(x)_r\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

και επειδή

$$(x)_r\binom{n}{x} = (n)_r\binom{n-r}{x-r}$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned}\mu_{(r)} &= \sum_{x=r}^{n}(n)_r\binom{n-r}{x-r}p^x q^{n-x} = (n)_r p^r\sum_{x=r}^{n}\binom{n-r}{x-r}p^{x-r}q^{n-x}\\ &= (n)_r p^r\sum_{s=0}^{n-r}\binom{n-r}{s}p^s q^{n-r-s} = (n)_r p^r\left(p+q\right)^{n-r} = (n)_r p^r\end{aligned}$$

για $r = 1,2,\ldots,n$. Συνεπώς

$$E(X) = \mu_{(1)} = np = 2 \quad \text{και} \quad V(X) = \mu_{(2)} + \mu_{(1)} - (\mu_{(1)})^2 = npq = 8/5.$$

γ) Η κατανομή της τ.μ. Y είναι η **Γεωμετρική** με παράμετρο $\boldsymbol{p}$ **=2/5**, δηλαδή

$$f_Y(y) = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{y-1}, \ y = 1,2,...$$

Η μέση τιμή της Y δίνεται από την

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{\infty} y f_Y(y) = \frac{2}{5}\sum_{y=1}^{\infty} y\left(\frac{3}{5}\right)^{y-1}.$$

Έχουμε ότι

$$\sum_{y=0}^{\infty} z^y = \frac{1}{1-z}, \ |z| < 1$$

$$\sum_{y=1}^{\infty} y z^{y-1} = \frac{1}{\left(1-z\right)^2}, \ |z| < 1.$$

Συνεπώς

$$E(Y) = \frac{2}{5}\frac{1}{\left(1-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{5}{2} = \frac{1}{p}.$$

Θέμα 3. ***α)*** Η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. X προκύπτει με παραγώγιση της F_X και είναι

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a}{x}\right), & 0 \le x \le a \\ 0, & x < 0 \text{ ή } x > a. \end{cases}$$

β) Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $Y = \ln(aX^{-1})$ είναι

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}(y+1), & y \ge 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

διότι για $y \ge 0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(\ln(aX^{-1}) \le y) = P(aX^{-1} \le e^y) \\ &= P(X \ge ae^{-y}) = 1 - F_X(ae^{-y}) \\ &= 1 - \frac{ae^{-y}}{a} - \frac{ae^{-y}}{a}\ln\left(\frac{a}{ae^{-y}}\right) \\ &= 1 - e^{-y} - e^{-y}\ln e^y \\ &= 1 - e^{-y}(1+y). \end{aligned}$$

Επίσης η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. Y προκύπτει με παραγώγιση της F_Y και είναι

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y \ge 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Ένας δεύτερος τρόπος λύσης είναι να βρεθεί πρώτα η συνάρτηση πυκνότητας από τη σχέση

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$$

για $y = g(x) = \ln(a/x)$ και στη συνέχεια η συνάρτηση κατανομής μέσω της σχέσης

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt.$$

γ) Η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. Y είναι αντίστοιχα

$$E(Y) = 2 \quad \text{και} \quad V(Y) = 2$$

διότι

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)dy = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y}dy = \Gamma(3) = 2! = 2$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)dy = \int_0^{+\infty} y^3 e^{-y}dy = \Gamma(4) = 3! = 6$$

$$V(Y) = E(Y^2) - \left[E(Y)\right]^2 = 6 - 2^2 = 6 - 4 = 2.$$

Επίσης τα παραπάνω ολοκληρώματα μπορούν να λυθούν χωρίς τη χρήση της συνάρτησης Γάμμα με παραγοντική ολοκλήρωση.