

## ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2006

**ΘΕΜΑ 1.** Έστω ότι καταγράφεται σ'ένα κατάλογο ο μήνας γενεθλίων κάθε ατόμου τυχόντος συνόλου 5 φίλων  $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ . Υποθέτουμε ότι και οι 12 μήνες του έτους  $\{a_1, a_2, \dots, a_{12}\}$  είναι το ίδιο πιθανοί ως μήνες γενεθλίων. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες καταγραφής

- α) μια ακριβώς φορά του Σεπτεμβρίου και δύο ακριβώς φορές του Δεκεμβρίου,
- β) των μηνών Ιανουαρίου και Φεβρουαρίου μια τουλάχιστον φορά τον καθένα,
- γ) των μηνών Ιανουαρίου, Φεβρουαρίου και Μαρτίου μια τουλάχιστον φορά τον καθένα και
- δ) του Νοεμβρίου δύο τουλάχιστον φορές.

**ΘΕΜΑ 2.** Ας θεωρήσουμε ένα πομπό ο οποίος εκπέμπει τυχαία τα σήματα  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$  υπό αναλογία 1:2:2. Έστω  $X$  ο αριθμός εκπομπών του σήματος  $\sigma_0$  σε 10 συνολικά εκπομπές σημάτων.

α) Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας  $f_X(x) = P(X = x)$ ,  $x = 0, 1, \dots, 10$ ; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

β) Να βρεθεί η μέση τιμή  $E(X)$  και η διασπορά  $V(X)$  (υπολογίζοντας τα σχετικά αθροίσματα).

γ) Έστω  $Y$  ο αριθμός των εκπομπών σημάτων μέχρι να παρατηρηθεί για πρώτη φορά η εκπομπή του σήματος  $\sigma_2$ . Να βρεθεί η μέση τιμή  $E(Y)$  (υπολογίζοντας το σχετικό άθροισμα).

**ΘΕΜΑ 3.** Έστω  $X$  τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \ln\left(\frac{a}{x}\right), & 0 < x \leq a \\ 1, & x > a \end{cases}$$

όπου  $a$  θετικός πραγματικός αριθμός.

- α) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής  $X$ .
- β) Να βρεθούν η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής  $Y = \ln(aX^{-1})$ .
- γ) Να υπολογισθεί η μέση τιμή  $E(Y)$  και η διασπορά  $V(Y)$  της  $Y$ .

Απαντήστε και στα 3 θέματα σε  $2\frac{1}{2}$  ώρες. Καλή επιτυχία.