

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι
Εξετάσεις Ιανουαρίου 2005

Θέμα 1ο: Ένα ζάρι ρίχνεται 10 φορές. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες:

- α) η μεγαλύτερη ένδειξη που θα εμφανισθεί να είναι ο αριθμός 5,
- β) να εμφανισθούν οι άρτιοι αριθμοί 2, 4 και 6 μία τουλάχιστον φορά ο καθένας,
- γ) να εμφανισθούν οι ενδείξεις 3 και 5 δύο ακριβώς φορές η καθεμία.
- δ) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των εμφανίσεων της ένδειξης 1;

Θέμα 2ο: Ο πληθυσμός μιας περιοχής πάσχει από μία σοβαρή ασθένεια σε ποσοστό 0.01. Έστω ότι ένα άτομο από τον πληθυσμό αυτό υποβάλλεται σε ιατρικό τεστ το οποίο κάνει ορθή διάγνωση με πιθανότητα 0.95.

α) Να υπολογισθεί η δεσμευμένη πιθανότητα να πάσχει το άτομο δεδομένου ότι το τεστ είναι θετικό.

Έστω ότι ένα άτομο από τον πληθυσμό αυτό υποβάλλεται σε δύο ανεξάρτητα μεταξύ τους τεστ καθένα από τα οποία κάνει ορθή διάγνωση με πιθανότητα 0.95. Να υπολογισθούν:

- β) οι πιθανότητα και τα δύο τεστ να είναι θετικά και
- γ) η δεσμευμένη πιθανότητα να πάσχει το άτομο δεδομένου ότι και τα δύο τεστ είναι θετικά.

Θέμα 3ο: Ο αριθμός των λανθασμένων τηλεφωνικών κλήσεων που λαμβάνει ένας συνδρομητής ακολουθεί τη διαδικασία Poisson με ρυθμό 2 λανθασμένες κλήσεις ανά εβδομάδα. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες ο συνδρομητής να λάβει

- α) τουλάχιστον μία λανθασμένη κλήση σε μία εβδομάδα,
- β) το πολύ 2 λανθασμένες κλήσεις σε 2 εβδομάδες,
- γ) τουλάχιστον μία λανθασμένη κλήση σε κάθε μία από τις επόμενες δύο εβδομάδες.
- δ) Πόσες εβδομάδες πρέπει να περιμένει ο συνδρομητής έτσι ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 0.98 να λάβει τουλάχιστον μία λανθασμένη κλήση;
- ε) Ποια είναι η πιθανότητα σε 3 από τις επόμενες 5 εβδομάδες ο συνδρομητής να λάβει τουλάχιστον μία λανθασμένη κλήση σε κάθε μία από αυτές;

Θέμα 4ο: Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας f και Y τυχαία μεταβλητή που ορίζεται από τη σχέση

$$Y = e^{-X}.$$

- α) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής Y μέσω της f .
- β) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής Z όπου

$$Z = \alpha(e^{-X} + 1), \alpha > 0$$

όταν η X έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, x \in \mathbb{R}.$$

- γ) Να βρεθούν οι $E(Z^k)$ και $E(1/Z^k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ στην περίπτωση που υπάρχουν.

Να λυθούν 3 από τα 4 θέματα

Διάρκεια εξέτασης: 2 ½ ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ