Πιθανοτητες Ι. Ασκησεις

1. Κλασικος ορισμος της πιθανοτητας

1.1. Σε μια πόλη $n+1$ ατόμων ένα άτομο επιλέγει τυχαία ένα από τα υπόλοιπα και λέει μια φημολογία. Το δεύτερο άτομο κάνει το ίδιο, και η διαδικασία συνεχίζεται όμοια. Να βρεθούν οι πιθανότητες

(α) Η φημολογία να ειπωθεί r φορές χωρίς να γυρίσει σε αυτόν που την άρχισε.
(β) Η φημολογία να ειπωθεί $r \leq n$ φορές χωρίς να ακουστεί απο κάποιο άτομο που την ξέρει ήδη.

1.2. (Πρόβλημα Γαλιλαίου) Ρίχνουμε 3 συνηθισμένα ζάρια. (α) Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 9; (β) Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 10;

1.3. Ένα λεωφορείο ξεκινάει απο την αφετηρία με k φοιτητές και περνάει απο n στάσεις.

(α) Να κατασκευαστεί κατάλληλος δειγματικός χώρος για τις δυνατές αποβιβάσεις των φοιτητών.
(β) Να υπολογισθεί ο αριθμός των δυνατών αυτών αποβιβάσεων.
(γ) Να υπολογισθεί η πιθανότητα τουλάχιστον σε μια στάση να αποβιβαστούν περισσότεροι από έναν φοιτητές.

1.4. Σε μια τάξη k μαθητών $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ ποια είναι η πιθανότητα ο a_1 να έχει γενέθλια την ίδια μέρα με κάποιον από τους υπόλοιπους $k-1$ μαθητές;

1.5. Σε ένα ράφι τοποθετούνται με τυχαία σειρά 6 βιβλία μαθηματικών, 4 βιβλία φυσικής, 3 βιβλία ιστορίας, 7 βιβλία ξένων γλωσσών, και 10 λεξικά. Ποια είναι η πιθανότητα όλα τα βιβλία του ίδιου είδους να τοποθετηθούν μαζί;

1.6. (Ο φιλότιμος αγράμματος) Τα γράμματα μιας πινακίδας που έγραφε OHIO USA σε δύο σειρές (σειρά 1η: OHIO, σειρά 2η: USA) έχουν πέσει. Ένας φιλότιμος αγράμματος τα τοποθετεί στην τύχη, 4 στην πρώτη σειρά και 3 στη δεύτερη. Κάθε γράμμα το τοποθετεί είτε σωστά με πιθανότητα 1/2 είτε ανάποδα (στην κάθετη διεύθυνση) με πιθανότητα 1/2 (πχ. το 5 ανάποδα θα μοιάζει με ? χωρίς την τελεία). Βρείτε την πιθανότητα

(α) Η πρώτη λέξη να είναι σωστή.
(β) Η δεύτερη λέξη να είναι σωστή.

1.7. (Παιχίδι Franc-carreau) Το παιχνίδι αυτό ήταν δημοφιλές στη Γαλλία τον 18ο αιώνα και παίζεται ως εξής. Ένα νόμισμα ρίχνεται τυχαία σε μια σκακιέρα (θεωρήστε την απεριόριστη). Ο παικτης κερδίζει αν το νόμισμα πέσει εξ ολοκλήρου μέσα σε κάποιο τετράγωνο της σκακιέρας. Θεωρώντας ότι το νόμισμα είναι κυκλικό διαμέτρου d και ότι κάθε τετράγωνο της σκακιέρας έχει πλευρά a με $a > d$, να βρείτε την πιθανότητα νίκης σε μια ρίψη.

Διασαφηνίζουμε την «τυχαία ρίψη» θεωρώντας ότι η θέση του κέντρου του νομίσματος επιλέγεται τυχαία μέσα σε ένα συγκεκριμένο τετράγωνο της σκακιέρας («τυχαία» σημαίνει ότι υποσύνολα του τετραγώνου με ίση επιφάνεια έχουν ίση πιθανότητα).

1.8. Δύο φίλοι συμφωνούν να συναντηθούν για καφέ κάποια στιγμή μεταξύ 12 και 1 το μεσημέρι. Ο καθένας διαλέγει ανεξάρτητα από τον άλλον και τυχαία ένα χρονικό σημείο στο διάστημα αυτό και εμφανίζεται στο ραντεβού. Ποια είναι η πιθανότητα κανείς από τους δύο φίλους να μην «στηθεί» περισσότερο από 10 λεπτά περιμένοντας;

1.9. Επιλέγουμε στην τύχη δύο σημεία A, B πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου. Να βρεθεί η πιθανότητα η χορδή AB να έχει μήκος μεγαλύτερο από την πλευρά ενός εγγεγραμμένου ισόπλευρου τριγώνου στον κύκλο.

1.10. Έχουμε μία Βασιλόπιτα με n κομμάτια και μια ουρά n ατόμων. Σε ένα ακριβώς κομμάτι υπάρχει ένα νόμισμα. Ένα άτομο (εκτός της ουράς) μοιράζει τα κομμάτια ένα προς ένα επιλέγοντας κάθε φορά ένα στην τύχη. Για δεδομένο $r \in \{1, \ldots, n\}$, ποιες είναι οι πιθανότητες

(α) Το νόμισμα να βρεθεί στην r-οστή δοκιμή.
(β) Το νόμισμα να μην βρεθεί ως την r-οστή δοκιμή.

1.11. Έχουμε r δοχεία και κάθε φορά επιλέγουμε ένα στην τύχη και τοποθετούμε έναν βώλο σε αυτό. Η διαδικασία σταματάει όταν ένα δοχείο έχει δύο βώλους. Ποια είναι η πιθανότητα αυτό να συμβεί με τον n-οστο βώλο;

1.12. Μία κάλπη περιέχει 100 μαύρα και 200 άσπρα σφαιρίδια. Βγάζουμε τυχαία 100 σφαιρίδια. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει ακριβώς 10 μαύρα;

1.13. Μια κάλπη περιέχει 1000 σφαιρίδια απο τα οποία τα 25 είναι μαύρα, τα 30 άσπρα, και τα 945 κόκκινα. Επιλέγουμε τυχαία 15 σφαιρίδια απο την κάλπη. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει

(α) ακριβώς 3 κόκκινα σφαιρίδια;
(β) ακριβώς 2 μαύρα και 3 άσπρα;
(γ) ακριβώς 4 κόκκινα και τουλάχιστον 2 μαύρα;

1.14. 16 ομάδες, συμπεριλαμβανομένων του Παναθηναϊκού και του Ολυμπιακού, παίρνουν μέρος σε ένα τουρνουά κυπέλλου με σύστημα νοκ-αουτ που διαρκεί για 4 γύρους. Σε κάθε γύρο, τα ζεύγη των ομάδων για κάθε αγώνα σχηματίζονται με κλήρωση.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ο Παναθηναϊκός με τον Ολυμπιακό να αναμετρηθούν στον 1ο γύρο;
(β) Ποια είναι η πιθανότητα ο Παναθηναϊκός με τον Ολυμπιακό να αναμετρηθούν στον τελικό; (Υποτίθεται ότι σε κάθε αγώνα είναι εξίσου πιθανό να κερδίσει μια από τις δύο ομάδες.)

1.15. Σε έναν διαγωνισμό παίρνουν μέρος n παντρεμένα ζευγάρια. Αν πρόκειται να απονεμηθούν τυχαία στους $2n$ διαγωνιζόμενους n βραβεία, ποια είναι η πιθανότητα να πάρει βραβείο ακριβώς ένα από τα δύο άτομα σε κάθε ένα από τα ζευγάρια;

1.16. Από n ανδρόγυνα κατασκόπων ($2n$ συνολικά άτομα) διαλέγουμε στην τύχη k άτομα για να τα συμπεριλάβουμε σε μία μυστική αποστολή. Ποιες είναι οι πιθανότητες

(α) Να συμπεριληφθούν ακριβώς j άνδρες στην αποστολή;
(β) Να μην συμπεριληφθούν άτομα του ίδιου ανδρόγυνου στη αποστολή;

1.17. Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με 13 φοιτητές και περνάει από 4 στάσεις. Να υπολογιστεί η πιθανότητα στην πρώτη στάση να αποβιβαστούν 3 φοιτητές, στη δεύτερη 4, στην τρίτη 4, και στην τέταρτη 2 φοιτητές.

1.18. Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με $k \geq 3$ φοιτητές και περνάει από n στάσεις ($n \geq k-2$). Να υπολογιστεί η πιθανότητα σε ακριβώς μία στάση να αποβιβαστούν ακριβώς 3 φοιτητές ενώ σε καθεμία από τις υπόλοιπες στάσεις να αποβιβαστεί το πολύ ένας φοιτητής.

1.19. Επιλέγουμε διαδοχικά χωρίς επανάθεση 5 σφαιρίδια απο μια κάλπη με 60 σφαιρίδια αριθμημένα 1, 2,..., 60. Έστω ότι οι ενδείξεις τους είναι $k_1, k_2, \ldots, k_5$, με τη σειρά με την οποία εξάγονται.

(α) Ποια η πιθανότητα να ισχύει $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5$;

(β) Ποια η πιθανότητα να ισχύει $k_5 > \max\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$;

1.20. (α) Για τα ενδεχόμενα A, B γνωρίζουμε ότι $P(A) = 0.6, P(B) = 0.9$. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η πιθανότητα $P(A \cap B)$; Για κάθε μια από αυτές τις τιμές, κατασκευάστε χώρο πιθανότητας Ω και ενδεχόμενα $A, B \subset \Omega$ ώστε η $P(A \cap B)$ να παίρνει αυτή την τιμή.

(β) Αποδείξτε ότι γενικά $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

1.21. Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι n φορές ($n \geq 2$). Να βρεθούν οι πιθανότητες

(α) Να εμφανιστεί τουλάχιστον δύο φορές ο αριθμός 6.

(β) Να εμφανιστεί τουλάχιστον δύο φορές ο αριθμός 6 και να μην εμφανιστεί καθόλου ο αριθμός 1.

1.22. Ρίχνουμε n συνηθισμένα ζάρια. Για $k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ να υπολογιστούν οι πιθανότητες

(α) Η μεγαλύτερη ένδειξη (από τις n) να ισούται με k.

(β) Η μικρότερη ένδειξη (από τις n) να ισούται με k.

1.23.[1] Απο μια κληρωτίδα που περιέχει n λαχνούς αριθμημένους $1, 2, \ldots, n$ εξάγεται ένα λαχνός, καταγράφουμε το νούμερο του, και τον επιστρέφουμε. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία $k \geq 3$ φορές. Να βρεθούν οι πιθανότητες

(α) Να επιλεγεί ο λαχνός 1 τουλάχιστον μια φορά.

(β) Να επιλεγούν οι λαχνοί 1, 2, 3 τουλάχιστον μια φορά ο καθένας.

1.24. (Παιχίδι Chuck-a-luck) Στο συγκεκριμένο παιχνίδι των καζίνο, 3 ζάρια περιέχονται σε μια περιστρεφόμενη κληρωτίδα. Ένας παίκτης στοιχηματίζει σε έναν αριθμό από το 1 ως το 6. Κατόπιν η κληρωτίδα περιστρέφεται και τα 3 ζάρια ρίπτονται. Ο παικτης κερδίζει αν ο αριθμός που στοιχημάτισε εμφανιστεί σε κάποιο από τα 3 ζάρια. Τα καζίνο διαφημίζουν το παιχνίδι ως δίκαιο (πιθανότητα νίκης του παίκτη 1/2) υποβάλλοντας την ιδέα ότι αφού η πιθανότητα να εμφανιστεί ο αριθμός που στοιχηματίστηκε σε ένα από τα ζάρια της κληρωτίδας είναι 1/6, η πιθανότητα να εμφανιστεί ο αριθμός σε κάποιο από τα 3 ζάρια είναι $3 \cdot (1/6) = 1/2$. Είναι σωστό αυτό;

1.25. Από τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 1050$ διαλέγουμε έναν στην τύχη.

(α) Ποια η πιθανότητα ο επιλεγμένος αριθμός να διαιρείται με τουλάχιστον έναν από τους αριθμούς 3 ή 5;

(β) Ποια η πιθανότητα ο επιλεγμένος αριθμός να διαιρείται με τουλάχιστον έναν από τους αριθμούς 3 ή 5 ή 7;

1.26. Ρίχνουμε n φορές δύο συνηθισμένα ζάρια. Ποια η πιθανότητα να εμφανιστούν όλες οι διπλές ζαριές $(1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)$ από τουλάχιστον μία φορά η καθεμία;

1.27. 15 τουρίστες μιας τουριστικής εκδρομής, με δυνατότητα διαμονής σε ένα από 4 ξενοδοχεία μιας συγκεκριμένης πόλης, διαλέγουν στην τύχη και ανεξάρτητα ξενοδοχείο. Υποθέτουμε ότι κάθε ξενοδοχείο έχει ικανή διαθεσιμότητα να τους εξυπηρετήσει όλους αν χρειαστεί. Να βρεθεί η πιθανότητα τουλάχιστον ένα ξενοδοχείο να μην επιλεγεί από κανέναν.

1.28. Ποια είναι η πιθανότητα στη μοιρασιά μιας συνήθους τράπουλας 52 φύλλων σε 4 παίκτες (13 φύλλα στον καθένα), το χέρι ενός συγκεκριμένου παίκτη να μην περιέχει τουλάχιστον ένα χρώμα από τα $\clubsuit\heartsuit\spadesuit\diamondsuit$

1.29. Ποια είναι η πιθανότητα στη μοιρασιά μιας συνήθισμένης τράπουλας 52 φύλλων σε 4 παίκτες (13 φύλλα στον καθένα), το χέρι ενός συγκεκριμένου παίκτη να περιέχει και τα 4 χρώματα ενός είδους (αριθμού ή J, Q, K, A);

[1] Οι ασκήσεις 1.23-1.30, 1.36 είναι εφαρμογές της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού

1.30. Για n διαφορετικές επιστολές ετοιμάζουμε τους αντίστοιχους φακέλους. Σε κάθε επιστολή αντιστοιχεί ένας συγκεκριμένος φάκελος. Τοποθετούμε τυχαία τις επιστολές στους φακέλους (δηλαδή κάθε μία απο τις $n!$ τοποθετησεις ειναι ισοπιθανη). Ποια είναι η πιθανότητα καμία επιστολή να μην έχει τοποθετηθεί στον φάκελο που της αντιστοιχεί;

1.31. (Κατανομές σφαιριδίων σε κελιά). Έχουμε n κελιά στα οποία κατανέμουμε k σφαιρίδια.
(α) Θεωρούμε ότι τα σφαιρίδια είναι διαφορετικά. Για παράδειγμα, τα αριθμούμε. Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών κατανομών των σφαιριδίων στα κελιά σε καθένα από τα εξής σενάρια

(i) κάθε κελί είναι απεριόριστης χωρητικότητας,
(ii) κάθε κελί χωράει μόνο ένα σφαιρίδιο,
*(iii) κάθε κελί είναι απεριόριστης χωρητικότητας και σε κάθε κελί πρέπει να τοποθετήσουμε τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο.

(β) Θεωρούμε ότι τα σφαιρίδια είναι όμοια. Δηλαδή μια κατανομή χαρακτηρίζεται από το διάνυσμα $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ όπου s_i είναι το πλήθος των σφαιριδίων που περιέχονται στο κελί i. Δεν έχει σημασία ποια σφαιρίδια είναι σε κάθε κελί, μόνο το πλήθος τους. Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών κατανομών των όμοιων σφαιριδίων στα κελιά σε καθένα από τα σενάρια (i), (ii), (iii) πιό πάνω.
Και στις δύο περιπτώσεις, για το (ii) υποθέτουμε ότι $k \leq n$ ενώ για το (iii) υποθέτουμε ότι $k \geq n$.

1.32. Να βρεθεί το πλήθος των συναρτήσεων $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ που είναι

(α) οτιδήποτε,
(β) 1-1,
(γ) γνησίως αύξουσες,
(δ) αύξουσες,
(ε) αύξουσες και επί,
*(ζ) επί.

Στα (β), (γ) υποθέτουμε ότι $k \leq n$ ενώ στα (ε), (ζ) ότι $k \geq n$.

1.33. Έχουμε ένα πεπερασμένο σύνολο $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ με s στοιχεία, $n \in \mathbb{N}^+$, και φυσικούς $r_1, r_2, \ldots, r_s$ με $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$. Φτιάχνουμε διατεταγμένες n-αδες ώστε κάθε μία να περιέχει r_1 φορές το a_1, r_2 φορές το a_2, ..., r_s φορές το a_s. Να δειχθεί ότι το πλήθος των διαφορετικών τέτοιων n-αδων είναι

$$\frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_s!}$$

1.34. Ανελκυστήρας ξεκινάει με k άτομα από το ισόγειο n-όροφης οικοδομής. Υποθέτοντας ότι όλες οι αποβιβάσεις είναι εξίσου πιθανές, να υπολογισθούν οι πιθανότητες

(α) Όλα τα άτομα αποβιβασθούν σε διαφορετικούς ορόφους.
(β) Ακριβώς k_1 άτομα αποβιβασθούν στον πρώτο όροφο, ακριβώς k_2 άτομα αποβιβασθούν στον δεύτερο όροφο, …, ακριβώς k_n άτομα αποβιβασθούν στον n-οστό όροφο (εδώ $k_1 + \cdots + k_n = k$).

1.35. *(α) Ζευγάρωμα των στοιχείων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ λέμε κάθε σύνολο της μορφής[2]

$$\{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \ldots \{a_{2n-1}, a_{2n}\}\},$$

όπου $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ είναι τα στοιχεία του $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Να δειχθεί ότι το πλήθος των διαφορετικών ζευγαρωμάτων του $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ είναι

$$\frac{(2n)!}{n! 2^n}.$$

[2] Σε ένα ζευγάρωμα, δεν έχει σημασία η σειρά των ζευγαριών, ούτε υπάρχει σειρά μέσα σε κάθε ζευγάρι, για αυτό και χρησιμοποιούμε άγκιστρα και όχι παρενθέσεις

(β) Καθένα από n ξυλάκια τα σπάμε σε ένα μικρό και ένα μεγάλο κομμάτι. Τα $2n$ κομμάτια που προκύπτουν ζευγαρώνονται τυχαία και δημιουργούνται n ξυλάκια. Να βρεθούν οι πιθανότητες

(i) Κάθε κομμάτι ζευγαρώνεται με εκείνο με το οποίο ήταν πριν συγκολλημένο.

(ii) Κάθε μεγάλο κομμάτι ζευγαρώνεται με μικρό κομμάτι.

1.36. Δέκα παντρεμένα ζευγάρια παίρνουν μέρος σε τουρνουα μπριτζ. Οι συμπαίκτες στο μπριτζ ζευγαρώνονται στην τύχη. Ποια είναι η πιθανότητα ότι κανένας/καμία δεν θα έχει για συμπαίκτη τη/τον σύζυγό του/της;

2. Δεσμευμενη πιθανοτητα και ανεξαρτησια

2.1. Ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα μια διπλή ζαριά να είναι εξάρες δεδομένου ότι γνωρίζουμε ότι περιέχει τουλάχιστον ένα έξι;

2.2. Τρεις μαθητές, ο Αντώνης, η Βάσω, και ο Γιάννης, παίρνουν μέρος σε ένα διαγώνισμα. Οι πιθανότητες να γράψουν άριστα είναι $1/3, 1/4$, και $1/5$ αντίστοιχα. Ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ο Αντώνης να μην γράψει άριστα δεδομένου ότι δυο μαθητές έγραψαν άριστα;

2.3. Ο μικρός Γιαννάκης έχει διαπιστώσει ότι όταν ρωτάει κάτι τον πατέρα του αυτός του απαντάει σωστά με πιθανότητα $90/100$ ενώ όταν ρωτάει τον δάσκαλό του αυτός του απαντά σωστά με πιθανότητα $80/100$. Ο Γιαννάκης μόλις ρώτησε και τους δυο αν η ομπρέλα εφευρέθηκε από τον Τζώρτζ Μπίμερ και ο πατέρας του τού είπε ναι ενώ ο δάσκαλος είπε όχι. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι σωστός ο πατέρας του (θεωρώντας ότι οι απαντήσεις πατέρα-δάσκαλου είναι ανεξάρτητες).

2.4. Έστω ότι κάποιος ρίχνει ένα δίκαιο νόμισμα 3 φορές. Δεδομένου ότι μία από τις ρίψεις ήρθε κεφαλή, ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον μία από τις άλλες ρίψεις να έρθει κεφαλή;

2.5. Έστω ότι σε έναν παίκτη μοιράζεται ένα χέρι 13 φύλλων από συνήθη τράπουλα 52 φύλλων. Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα ότι το χέρι περιέχει ακριβώς έναν άσσο δεδομένου ότι περιέχει τουλάχιστον έναν άσσο; Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα ότι το χέρι περιέχει ακριβώς έναν άσσο δεδομένου ότι περιέχει τον άσσο-σπαθί;

2.6. Να λυθεί η Άσκηση 1.10 με χρήση του πολλαπλασιαστικού τύπου.

2.7. r φοιτητές s και φοιτήτριες βρίσκονται έξω από τη γραμματεία του Μαθηματικού περιμένοντας να εγγραφούν. Κάθε φορά επιλέγεται ένα ατομο στην τύχη, εγγράφεται, και φεύγει απο την αναμονή. Ποια η πιθανότητα στις πρώτες $2k$ εγγραφές να έχουμε συνεχή εναλλαγή φύλου. Υποθέτουμε ότι $r, s \geq k \geq 1$.

2.8. Ένας μπασκετμπολίστας πρόκειται να εκτελέσει 100 βολές. Στην προθέρμανση εκτελεί δύο βολές απο τις οποίες η μία είναι επιτυχημένη και η άλλη όχι. Για καθεμία από τις μετέπειτα 100 βολές, η πιθανότητα επιτυχίας ισούται με το ποσοστό επιτυχίας του ως τότε μετρώντας και τις δύο βολές της προθέρμανσης. Για παράδειγμα, στην πρώτη βολή έχει πιθανότητα επιτυχίας $1/2$, και αν είναι επιτυχία, θα έχει για τη δεύτερη βολή πιθανότητα επιτυχίας $2/3$.

(α) Ποια η πιθανότητα οι πρώτες k βολές να είναι επιτυχίες και οι υπόλοιπες αποτυχίες;
(β) Ποια η πιθανότητα k επιτυχίες να συμβούν στις θέσεις $11, 12, 13, \ldots, 10 + k$ ενώ οι υπόλοιπες βολές να είναι αποτυχίες;
(γ) Ποια η πιθανότητα να έχει k ακριβώς επιτυχίες;

Στο (β) υποθέτουμε ότι $k \leq 90$, ενώ στα (α), (γ) ότι $k \in \{0, 1, \ldots, 100\}$.

2.9. Μια κάλπη περιέχει 5 άσπρα και 7 μαύρα σφαιρίδια ενώ μια δεύτερη κάλπη περιέχει 3 άσπρα και 5 μαύρα σφαιρίδια. Επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την πρώτη και το τοποθετούμε στη δεύτερη. Έπειτα επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο απο τη δεύτερη κάλπη. Ποια είναι η πιθανότητα το δεύτερο σφαιρίδιο να είναι άσπρο;

2.10. Ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά και αν η ένδειξη είναι i διαλέγουμε ένα σφαιρίδιο από μια κάλπη που περιέχει $2i$ άσπρα και $14 - 2i$ μαύρα σφαιρίδια. Σε μια πραγματοποίηση αυτού του πειράματος, ποια είναι η πιθανότητα το σφαιρίδιο που επιλέγουμε να είναι άσπρο;

2.11. Ένα κουτί περιέχει $n \geq 2$ διακεκριμένους λαχνούς αριθμημένους από το 1 μέχρι το n. Ένας λαχνός επιλέγεται στην τύχη και στη συνέχεια ρίχνουμε ένα τίμιο ζάρι τόσες ανεξάρτητες φορές όσες ήταν η ένδειξη του λαχνού που επιλέχθηκε. Ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης και των δύο ενδείξεων 3 και 5 από τουλάχιστον μία φορά η καθεμιά;

2.12. Τρεις φίλοι A, B, C ταξιδεύουν με αεροπλάνο για πρώτη φορά και έχουν κλείσει αντίστοιχα τις θέσεις παράθυρο, μεσαίο, και διάδρομος στην αριστερή πλευρά μιας σειράς (δηλαδή ο B κάθεται δεξιά του A και ο C δεξιά του B). Οι επιβάτες A και C δεν υπάρχει περίπτωση να κάνουν λάθος στο δέσιμο των ζωνών, αλλά ο B μπορεί να δέσει λάθος τη ζώνη του παίρνοντας το δεξί εξάρτημα του A και το αριστερό του C (αν είναι και τα δύο διαθέσιμα) με πιθανότητα 50/100. Υποθέτοντας ότι οι τρεις φίλοι πιάνουν τις θέσεις τους ένας ένας σε τυχαία διάταξη, ποια είναι η πιθανότητα να γίνει λάθος στο δέσιμο;

2.13. Μια κάλπη περιέχει k άσπρα και $n - k$ μαύρα σφαιρίδια. Εξάγουμε διαδοχικά 3 σφαιρίδια ως εξής. Μετά από κάθε εξαγωγή, αν το σφαιρίδιο είναι άσπρο, το επιστρέφουμε στην κάλπη, ενώ αν είναι μαύρο, το αντικαθιστούμε με άσπρο. Ποια είναι η πιθανότητα το τρίτο σφαιρίδιο να είναι άσπρο;

2.14. Ένας επιβάτης ταξιδεύει από την Αθήνα στη Μελβούρνη με ενδιάμεσες στάσεις στην Κων/πολη (1η) και στη Σιγκαππούρη (2η). Έχει παραδώσει μια βαλίτσα η οποία σε κάθε αεροδρόμιο μεταφέρεται από ένα αεροπλάνο σε άλλο. Στα αεροδρόμια της Αθήνας, της Κων/πολης και της Σιγκαπούρης η πιθανότητα απώλειας μιας αποσκευής είναι αντίστοιχα 5/100, 3/100 και 2/100. Ποια είναι η πιθανότητα ο επιβάτης να μην βρει τη βαλίτσα του στη Μελβούρνη; Αν δεν τη βρει, ποια η πιθανότητα να χάθηκε στην Κων/πολη;

2.15. Μια ομάδα συμμετέχει σε ένα τουρνουά με σύστημα νοκ-αουτ που διαρκεί για 4 γύρους. Αν η ομάδα φτάσει στον γύρο i, η πιθανότητα να περάσει στον επόμενο γύρο είναι $P_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ (P_4 η πιθανότητα νίκης στον τελικό). Ποια ειναι η δεσμευμένη πιθανότητα η ομάδα να αποκλείστηκε στο γύρο i δεδομένου ότι δεν είναι η τελική νικήτρια;

2.16. Θεωρούμε δύο κάλπες X, Y με την εξής σύνθεση:
X: 5 μαύρα και 5 άσπρα σφαιρίδια,
Y: 1 μαύρο και 9 άσπρα σφαιρίδια.
Ένα άτομο επιλέγει τυχαία (με ίση πιθανότητα) μία από τις δύο κάλπες και εξάγει απο αυτήν το ένα μετά το άλλο με επανάθεση 4 σφαιρίδια (δηλαδή μετά απο κάθε εξαγωγή, επιστρέφει το σφαιρίδιο στην κάλπη). Σε εμάς, απο όλη τη διαδικασία, φανερώνεται μόνο ότι και τα τέσσερα σφαιρίδια είναι άσπρα. Δεδομένου αυτού, ποια είναι η πιθανότητα να είχε επιλεγεί στην αρχή η κάλπη X;

2.17. Σε έναν πληθυσμό, το 0.1% πάσχει απο μια ασθένεια X. Ένα τεστ κάνει λάθος διάγνωση στο 5% των περιπτώσεων που το άτομο που κάνει το τεστ έχει την ασθένεια ενώ κάνει λάθος στο 1% των περιπτώσεων που το άτομο είναι υγιές. Επιλέγουμε στην τύχη ένα άτομο απο τον πληθυσμό και το τεστ δηλώνει ότι το άτομο έχει την ασθένεια. Δεδομένου αυτού, ποια είναι η πιθανότητα το άτομο όντως να έχει την ασθένεια;

2.18. Ένα φιλικό ζευγάρι ενός μαθηματικού του ανακοινώνει ότι το 100/100 αξιόπιστο υπερηχογράφημα που έκανε έδειξε ότι πρόκειται να αποκτήσουν δίδυμα αγόρια. Επιπλέον, όταν ρώτησαν τον γυναικολόγο τους ποια είναι η πιθανότητα μονοωικών (όμοιων γεννετικά) διδύμων, ο γιατρός είπε πως το μόνο που γνωρίζει είναι ότι το ποσοστό των κυήσεων μονοωικών διδύμων επί των κυήσεων διδύμων είναι 1/3. Γνωρίζοντας ότι τα μονοωικά δίδυμα είναι πάντα του ίδιου φύλου ενώ τα ετεροζυγωτικά είναι ίδιου ή διαφορετικού φύλου με πιθανότητα $50/100 - 50/100$, μπορείτε να υπολογίσετε την πιθανότητα που ζήτησε το ζευγάρι; Θεωρούμε ότι όποτε υπάρχει αβεβαιότητα για το φύλο ενός παιδιού, αυτό είναι αγόρι με πιθανότητα 50%.

2.19. Έχουμε τρία χαρτιά τα οποία καλούμε AA, MM, AM. Το AA έχει και τις δύο πλευρές χρωματισμένες άσπρες, το MM και τις δύο μαύρες, ενώ το AM έχει τη μία πλευρά χρωματισμένη άσπρη και την άλλη μάυρη. Ένας φίλος μας επιλέγει ένα χαρτί στην τύχη και μας δείχνει μόνο ότι η μία πλευρά του είναι άσπρη. Για το ποια πλευρά της κάρτας επιλέγει να μας δείξει, θεωρούμε δύο εκδοχές.

(α) Επιλέγει στην τύχη[3] μία από τις δύο πλευρές.
(β) Επιλέγει πάντοτε άσπρη πλευρά αν υπάρχει διαθέσιμη.

Για κάθε μία από αυτές τις δύο εκδοχές, να υπολογιστεί η πιθανότητα η άλλη πλευρά του χαρτιού που είδαμε να είναι μαύρη.

2.20. Το συρτάρι Σ_1 περιέχει 3 χρυσά και 3 αργυρά νομίσματα ενώ το συρτάρι Σ_2 περιέχει 3 χρυσά και 6 αργυρά. Κλέφτης (στα σκοτεινά) ανοίγει ένα συρτάρι στην τύχη και αρπάζει δύο νομίσματα στην τύχη.

(α) Ποια η πιθανότητα να είναι και τα δύο χρυσά;
(β) Αν διαπιστωθεί (κατά τη σύλληψή του) ότι έχει κλέψει δύο χρυσά νομίσματα, ποια είναι η πιθανότητα να είχε ανοίξει το συρτάρι Σ_1;

2.21. Οι ασφαλιστικές εταιρείες κατατάσσουν τους οδηγούς σε 10 κατηγορίες, $A_1, A_2, \dots, A_{10}$, ανάλογα με την πιθανότητα να κάνουν ατύχημα στη διάρκεια του έτους. Συγκεκριμένα, ένας οδηγός της κατηγορίας A_k ($k \in \{1, 2, \dots, 10\}$) έχει πιθανότητα $k/100$ να πραγματοποιήσει ατύχημα στη διάρκεια του έτους. Υποθέτουμε ότι στη συγκεκριμένη ασφαλιστική εταιρεία τα $k/55$ των οδηγών που ασφαλίζει ανήκουν στην κατηγορία A_k, $k = 1, 2, \dots, 10$. Αν ένας οδηγός, ασφαλισμένος στη συγκεκριμένη εταιρεία, αναφέρει ατύχημα στη διάρκεια του έτους, ποια είναι η πιθανότητα να ανήκει στην κατηγορία k;

2.22. Δύο ενδεχόμενα A, B με $P(A), P(B) > 0$ λέγονται θετικά συσχετισμένα αν $P(A \,|\, B) > P(A)$, ενώ αρνητικά συσχετισμένα αν $P(A \,|\, B) < P(A)$.

(α) Να δειχθεί ότι αν τα A, B είναι θετικά συσχετισμένα, τότε $P(B \,|\, A) > P(B)$ και $P(A \cap B) > P(A)P(B)$ (προφανώς και οι τρείς περιορισμοί είναι ισοδύναμοι εφόσον $P(A), P(B) > 0$).
(β) Ρίχνουμε ένα ζάρι δυό φορές και ορίζουμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{Εμφανίζεται 1 τουλάχιστον μια φορά}\}, \\ B &:= \{\text{Οι δύο ενδείξεις είναι διαφορετικές}\}, \\ C &:= \{\text{Η πρώτη ένδειξη δεν είναι 1}\}. \end{aligned}$$

Είναι τα A, B θετικά ή αρνητικά συσχετισμένα; Τα A, C;

2.23. (Δέσμευση δεσμευμένης πιθανότητας) Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας, και $\Gamma \in \mathcal{A}$ με $P(\Gamma) > 0$. Η συνάρτηση $p_\Gamma : \mathcal{A} \to [0, 1]$ με $p_\Gamma(A) = P(A \,|\, \Gamma)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι συνάρτηση πιθανότητας[4]. Αν $p_\Gamma(B) > 0$, τότε για $A \in \mathcal{A}$ ορίζεται κατά τα γνωστά η δεσμευμένη πιθανότητα $p_\Gamma(A \,|\, B)$. Να δειχθεί ότι

$$p_\Gamma(A \,|\, B) = P(A \,|\, B \cap \Gamma).$$

Δηλαδή στην πληροφορία ότι το Γ συνέβη προστίθεται η πληροφορία ότι και το B συνέβη.

2.24. (Θεώρημα ολικής πιθανότητας για δεσμευμένη πιθανότητα) Έστω ενδεχόμενα A, Γ, B_1, B_2, με $\{B_1, B_2\}$ διαμέριση του δειγματικού χώρου, και $P(\Gamma \cap B_1), P(\Gamma \cap B_2) > 0$. Να δειχθεί ότι

$$P(A \,|\, \Gamma) = P(B_1 \,|\, \Gamma) P(A \,|\, \Gamma \cap B_1) + P(B_2 \,|\, \Gamma) P(A \,|\, \Gamma \cap B_2).$$

2.25. Εστω ενδεχόμενα A, B με $P(A) > 0$. Να δειχθεί ότι

(α) $P(A \cap B \,|\, A \cup B) \le P(A \cap B \,|\, A)$.
(β) $P(B \,|\, B \cup A) \ge P(B \,|\, A)$.

---

[3] Δηλαδή πιθανότητα 1/2 για κάθε πλευρά. Γενικά όταν έχουμε πεπερασμένο πλήθος επιλογών και λέμε ότι επιλέγουμε στην τύχη, εννούμε ότι οι επιλογές όλες είναι ισοπίθανες.

[4] Δηλαδή ικανοποιεί τα αξιώματα του Kolmogorov, §2.3 στο βιβλίο του S. Ross.

2.26. Αν τα A, B είναι ανεξάρτητα να δειχθεί ότι καθένα απο τα ακόλουθα ζεύγη είναι ανεξάρτητα (α) A, B^c, (β) A^c, B, (γ) A^c, B^c.

2.27. Θεωρούμε $k \geq 1$ ρίψεις ενός αμερόληπτου νομίσματος και τα ενδεχόμενα

$$A: \text{και οι δυό όψεις εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά.}$$
$$B: \text{η ένδειξη κορώνα εμφανίζεται το πολύ μια φορά.}$$

Για ποιες τιμές του k είναι τα A, B ανεξάρτητα;

2.28. Η μητέρα της Μαρίας για να την ενθαρρύνει στο τέννις, της προσφέρει ένα δώρο αν κερδίσει σε τουλάχιστον 2 συνεχόμενα παιχνίδια σε ένα τουρνουά 3 παιχνιδιών που θα αντιμετωπίσει τη μητέρα της και τον προπονητή της εναλλάξ. Η Μαρία μπορεί να επιλέξει να παίξει τη σειρά αντιπάλων Μητέρα-Προπονητής-Μητέρα ή Προπονητής-Μητέρα-Προπονητής. Γνωρίζει ότι ο προπονητής είναι καλύτερος παικτης από τη μητέρα της (δηλαδή η πιθανότητα να τον κερδίσει σε ένα παιχίδι είναι μικρότερη από την πιθανότητα να κερδίσει τη μητέρα της). Ποια σειρά αντιπάλων πρέπει να επιλέξει για να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα να κερδίσει το δώρο;

2.29. Διαθέτουμε δύο φαινομενικά όμοια νομίσματα N_1, N_2, πλην όμως, το ένα φέρνει «Κ» με πιθανότητα $p_1 = 1/2$ (δίκαιο) ενώ το άλλο με πιθανότητα $p_2 = 3/4$ (κίβδηλο) . Διαλέγουμε ένα νόμισμα στην τύχη και το ρίχνουμε δύο ανεξάρτητες φορές. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A_1 := \{\text{η πρώτη ρίψη είναι K}\},$$
$$A_2 := \{\text{η δεύτερη ρίψη είναι K}\}.$$

Είναι τα A_1, A_2 ανεξάρτητα;

2.30. Για δυό παθήσεις α, β, είναι γνωστό ότι το ποσοστό των ατόμων του πληθυσμού που πάσχουν μόνο από την α είναι 0.6%, αυτών που πάσχουν μόνο απο τη β είναι 0.5%, και αυτών που πάσχουν και απο τις δύο είναι 0.2%. Είναι οι δυό παθήσεις ανεξάρτητες;

2.31. Ένα πείραμα έχει πιθανότητα επιτυχίας $p \in (0, 1)$. Εκτελούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών του πειράματος.

(α) Να δειχθεί ότι η πιθανότητα να έχουμε k επιτυχίες στις πρώτες n δοκιμές είναι

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Θεωρούμε ότι $0 \leq k \leq n$.

(β) Να δειχθεί ότι η πιθανότητα σε όλες τις δοκιμές της ακολουθίας να έχουμε αποτυχία είναι 0.

(γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα η πρώτη επιτυχία να συμβαίνει στην k δοκιμή, όπου $k \in \mathbb{N}^+$.

(δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να χρειαστούν τουλάχιστον k δοκιμές ως την πρώτη επιτυχία, όπου $k \in \mathbb{N}^+$.

***2.32.** Τρεις παίκτες, οι a_1, a_2, a_3, παίζουν το εξής παιχνίδι. Ρίχνουν διαδοχικά ένα συνηθισμένο νόμισμα με τη σειρά $a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3$ κ.ο.κ., και κερδίζει αυτός που θα φέρει πρώτος κορώνα. Έστω p_j η πιθανότητα να κερδίσει το παιχνίδι ο παίκτης j. Να δείξετε ότι $p_2 = p_1/2$ και $p_3 = p_2/2$, και να συμπεράνετε ότι $p_1 = 4/7$, $p_2 = 2/7$ και $p_3 = 1/7$.

2.33. (Διαγωνίσματα πολλαπλής επιλογής) Ένας διαγωνιζόμενος απαντάει σε n ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Σε κάθε ερώτηση υπάρχουν j διαφορετικές απαντήσεις από τις οποίες μία είναι η σωστή. Ο διαγωνιζόμενος επιλέγει μία απάντηση στην τύχη αν δεν γνωρίζει τη σωστή απάντηση – προφανώς επιλέγει τη σωστή απάντηση όταν τη γνωρίζει. Υποθέτουμε ότι η προετοιμασία του εξεταζόμενου καθορίζει μια πιθανότητα $p \in (0, 1)$ να γνωρίζει τη σωστή απάντηση σε οποιαδήποτε ερώτηση. Υποθέτουμε επίσης ότι ένας συγκεκριμένος εξεταζόμενος έχει προετοιμαστεί έτσι ώστε $p = 1/2$.

(α) Ποια η πιθανότητα να απαντήσει σωστά σε k (από τις n) ερωτήσεις;
(β) Δεδομένου ότι απάντησε σωστά σε k ερωτήσεις, ποια η πιθανότητα να γνώριζε στην πραγματικότητα ακριβώς s ερωτήσεις; ($s \in \{0, 1, \ldots, k\}$)

***2.34.** (Απροσδόκητη ανεξαρτησία) Απο μια κάλπη που περιέχει n σφαιρίδια αριθμημένα $1, 2, ..., n$ εξάγουμε το ένα μετά το άλλο τυχαία τα n σφαιρίδια. Έστω k_i η ένδειξη του σφαιριδίου που παίρνουμε στην i εξαγωγή. Λέμε ότι στην i εξαγωγή έχουμε ρεκόρ αν το σφαιρίδιο της έχει μεγαλύτερη ένδειξη απο τα προηγούμενα σφαιρίδια, δηλαδή αν $i = 1$ ή αν $i > 1$ και $k_i > \max\{k_1, \ldots, k_{i-1}\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A_i := \{\text{Στην } i \text{ εξαγωγή έχουμε ρεκόρ}\},$$

για $i = 1, 2, \ldots, n$.

(α) Να δειχθεί ότι $P(A_j) = 1/j$ για $j = 1, \ldots, n$.
(β) Να δειχθεί ότι τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι ανά δύο ανεξάρτητα.
(γ) Να δειχθεί ότι τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι πλήρως ανεξάρτητα.

3. Συναρτηση κατανομης, μεση τιμη για διακριτες τυχαιες μεταβλητες

3.1. Έστω τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < 0, \\ 1 - e^{-t^2} & \text{αν } t \geq 0. \end{cases}$$

Ποια η συνάρτηση κατανομής για την τυχαία μεταβλητή $Y := e^X$;

3.2. Έστω $f(x) = c/2^{|x|}$ για $x \in \mathbb{Z}$ και $f(x) = 0$ για $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, όπου η c είναι μια σταθερά.

(α) Για ποια τιμή της c είναι η f συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής;
(β) Για την τιμή της c του ερωτήματος (α), ποια είναι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής που αντιστοιχεί στην f;

3.3. Να εξεταστεί αν ορίζεται η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X αν αυτή έχει συνάρτηση πιθανότητας

(α) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi^2}\frac{1}{x^2} & \text{αν } x \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$ (β) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi^2}\frac{1}{x^2} & \text{αν } x \in \mathbb{Z}, x < 0, \\ \frac{1}{2^{x+1}} & \text{αν } x \in \mathbb{Z}, x > 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

3.4. Από μια κάλπη που περιέχει n κλήρους αριθμημένους $1, 2, \ldots, n$ εξάγονται διαδοχικά χωρίς επανάθεση k κλήροι ($1 \leq k \leq n$). Έστω X ο μεγαλύτερος αριθμός που εξάγεται. Να υπολογιστούν

*(α) Η συνάρτηση πιθανότητας της X.
(β) Η μέση τιμή της X.

3.5. Δυό παίκτες παίζουν το εξής παιχνίδι. Ρίχνουν συνεχώς ένα ζάρι μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά η ένδειξη 1 ή 2. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών που απαιτούνται. Αν ο X είναι περιττός, τότε ο Α κερδίζει και παίρνει β Ευρώ από τον Β ενώ αν ο X είναι άρτιος, τότε ο Α χάνει και δίνει α Ευρώ στον Β.

(α) Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X;
(β) Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει το παιχνίδι ο Α;
(γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ α και β ώστε το παιχνίδι να είναι δίκαιο;

3.6. (Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης) Παίζουμε το εξής παιχνίδι. Ένα αμερόληπτο νόμισμα ρίχνεται διαδοχικά, και αν η ένδειξη κορώνα εμφανίζεται για πρώτη φορά στην k ρίψη τότε κερδίζουμε 2^k Ευρώ. Ποιο είναι το μέσο κέρδος του παιχνιδιού; Θα έδινες 50 Ευρώ για να παίξεις το παιχνίδι;

3.7. Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)} & x \in \mathbb{N}^+ = \{1, 2, \ldots\}, \\ 0 & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Για ποια $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $E(X^a) < \infty$;

3.8. Εκτελούμε ακολουθία ανεξάρτητων ρίψεων νομισμάτων. Στη n-οστή ρίψη ($n \geq 1$) ρίχνουμε ένα νόμισμα που φέρνει «Κ» με πιθανότητα $p_n = a/(n+1)$, όπου $a \in (0, 2]$ είναι μια σταθερά. Έστω Z η πρώτη ρίψη στην οποία έρχεται «Κ». Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της Z και να δειχθεί ότι $E(Z) < \infty \Leftrightarrow a > 1$.

3.9. Στο τέλος μιας καταστροφής, από $2n$ ανθρώπους που αποτελούσαν n ζευγάρια έχουν πεθάνει m ($m < n$). Υποθέτοντας ότι κάθε άνθρωπος από τους $2n$ είναι εξίσου πιθανό να έχει πεθάνει, να βρεθεί η μέση τιμή του πλήθους των επιζώντων ζευγαριών (προβλημα του Daniel Bernoulli, 1768).

3.10. (Το μοντέλο διάχυσης του Daniel Bernoulli 1769) Μια κάλπη Κ περιέχει n κόκκινα σφαιρίδια και μια κάλπη Μ περιέχει n μπλε σφαιρίδια. Σε κάθε στάδιο, ένα σφαιρίδιο επιλέγεται τυχαία από κάθε κάλπη και τα δυο επιλεχθέντα σφαιρίδια αλλάζουν κάλπες. Βρείτε τον μέσο αριθμό κόκκινων σφαιριδίων στην κάλπη Κ μετα το k-οστο στάδιο.

4. Ειδικες διακριτες κατανομες

4.1. Κατασκευάζουμε έναν αριθμό στο $[0, 1)$ με 80 δεκαδικά ψηφία επιλέγοντας καθένα απο αυτά απο το $\{0, 1, \ldots, 9\}$ ομοιόμορφα (δηλαδή, όλα τα ψηφία έχουν την ίδια πιθανότητα επιλογής). Ποια είναι η κατανομή του αριθμού των εμφανίσεων του 3 και ποια η μέση της τιμή;

4.2. Δύο ζάρια A και B ρίχονται 90 φορές. Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των ρίψεων που η ένδειξη του A ξεπερνάει την ένδειξη του B κατά δύο μονάδες τουλάχιστον;

4.3. Ένας σκοπευτής ρίχνει 10 βολές προς ένα στοχο. Η πιθανότητα να πετύχει τον στόχο 4 φορές είναι τριπλάσια της πιθανότητας να τον πετύχει τρείς. Να υπολογιστεί η ευστοχία του σκοπευτή, δηλαδή η πιθανότητα να πετύχει τον στόχο σε μία δεδομένη βολή. Έπειτα να υπολογιστούν οι πιθανότητες σε 5 βολές να πετύχει τον στόχο

(α) Δύο τουλάχιστον φορές.
(β) Ή όλες ή καμία φορά.
(γ) Το πολύ 4 φορές αν είναι γνωστό ότι πέτυχε τουλάχιστον δύο φορές.

4.4. Μια αεροπορική εταιρεία έχει παρατηρήσει ότι 5% όσων έχουν αγοράσει εισιτήριο δεν εμφανίζεται για να ταξιδέψει. Τη σημερινή πτήση εκτελεί ένα αεροπλάνο με 200 θέσεις και η εταιρεία έχει πουλήσει 203 εισιτήρια. Ποια είναι η πιθανότητα να μην μπορέσει να εξυπηρετήσει έναν επιβάτη με εισιτήριο; Υποθέστε ότι αν A_i είναι το ενδεχόμενο να εμφανιστεί ο επιβάτης i, τα ενδεχόμενα $\{A_i : 1 \leq i \leq 203\}$ είναι ανεξάρτητα.

4.5. Έστω ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli, η κάθε μία με πιθανότητα επιτυχίας p και έστω X ο αριθμός των δοκιμών μέχρι και τη δεύτερη επιτυχία. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας, f_X, της τυχαίας μεταβλητής X και να ελεγχθεί ότι $\sum_{x\in\mathbb{R}} f_X(x) = 1$.

4.6. Θεωρούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων ρίψεων ενός τίμιου τετραέδρου και έστω X ο αριθμός των ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί για 2η φορά η ένδειξη «3». Στη συνέχεια, από ένα κουτί που περιέχει 7 κόκκινα και 3 πράσινα σφαιρίδια επιλέγουμε τυχαία με επανάθεση X σφαιρίδια και έστω Y ο αριθμός των κόκκινων σφαιριδίων που επιλέγονται. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Y = 1)$.

4.7. Ρίχνουμε ένα ζάρι μέχρι για πρώτη φορά να εμφανιστεί η ένδειξη «5» και έστω X ο αριθμός των δοκιμών που απαιτούνται μέχρι να συμβεί αυτό. Να βρείτε:

(α) Τον αναμενόμενο αριθμό δοκιμών, τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X, και τη διασπορά της.
(β) Την πιθανότητα να μην εμφανιστεί η ένδειξη «3», αν είναι γνωστό ότι το «5» εμφανίστηκε (για πρώτη φορά) στην k δοκιμή (για $k \in \mathbb{N}^+$).
(γ) Την πιθανότητα να εμφανιστεί το «3» (τουλάχιστον μία φορά).
(δ) Την πιθανότητα να εμφανιστούν και οι δύο ενδείξεις «3» και «6» από τουλάχιστον μία φορά η καθεμιά (πριν έρθει το «5»).

4.8. Άν η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p με $p \in (0, 1)$, να δειχθεί ότι

$$E(t^X) = (pt + q)^n,\ E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, όπου $q = 1 - p$.

4.9. Ο αριθμός των ληστειών που γίνονται σε όλα τα καταστήματα της τράπεζας ABC σε έναν μήνα ακολουθεί την κατανομή Poisson. Αν η πιθανότητα να συμβεί το πολύ μια ληστεία σε έναν μήνα ισούται με 12 φορές την πιθανότητα να συμβούν ακριβώς 2 ληστείες, να βρεθεί η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον μία ληστεία σε ένα μήνα.

4.10. (Εκλέπτυνση της Poisson) Ο αριθμός X των πελατών που εισέρχονται σε ένα κατάστημα στη διάρκεια μιας μέρας ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή 120. Κάθε πελάτης, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, πληρώνει με κάρτα με πιθανότητα 1/4 ή με μετρητά (με πιθανότητα 3/4). Έστω Y ο αριθμός των πελατών που πληρώνει με κάρτα στη διάρκεια μιας ημέρας. Να δειχθεί ότι η Y ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $(1/4) \cdot 120 = 30$.

4.11. Ένας ασφαλιστής ασφαλίζει 100 οδηγούς για μία χρονιά. Καθένας από τους οδηγούς προκαλεί ατύχημα τη δεδομένη χρονιά με πιθανότητα $p = 1/1000$. Έστω X ο αριθμός των οδηγών που προκαλούν ατύχημα εκείνη τη χρονιά. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(X \leq 1), P(X = 3), P(X = 10)$, και έπειτα οι προσεγγίσεις τους χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της κατανομής της X απο κατάλληλη κατανομή Poisson.

4.12. (α) Αν η τυχαία μεταβητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$, να δειχθεί ότι

$$E(Xh(X)) = \lambda E(h(X+1)) \tag{1}$$

για κάθε $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$.
(β) Αν η τυχαία μεταβλητή X παίρνει μη αρνητικές ακέραιες τιμές και υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε η X να ικανοποιεί την (1) για κάθε $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, να δειχθεί ότι η X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$.

4.13. Μία κάλπη περιέχει 20 μαύρα και 60 άσπρα σφαιρίδια. Εξάγουμε σφαιρίδια το ένα μετά το άλλο με επανάθεση. (α) Ποια είναι η πιθανότητα το 7ο σφαιρίδιο να είναι το πρώτο μαύρο σφαρίδιο που εξάγεται; (β) Ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστούν τουλάχιστον 10 εξαγωγες για να εμφανιστεί μαύρο σφαιρίδιο. (γ) Ποια είναι η μέση τιμή του αριθμού των άσπρων σφαιριδίων που εμφανίζονται πριν την πρώτη εμφάνιση μαύρου σφαιριδίου.

4.14. Θεωρούμε ακολουθία ρίψεων ενός αμερόληπτου ζαριού. Περιμένουμε ώσπου να εμφανιστούν και οι δύο ενδείξεις 3 και 4. Για παράδειγμα, ένα δυνατό σενάριο των αποτελεσμάτων της ακολουθίας είναι

$$5, 1, 1, 4, 6, 5, 4, 2, 6, 3$$

και τότε σταματάμε. Έστω X ο αριθμός των ρίψεων που απαιτούνται (στο παράδειγμα, $X = 10$). Ποια η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X;

4.15. (Ο αμνήμων τουρίστας) Ένας τουρίστας επιθυμεί να επισκεφθεί 4 πρωτεύουσες Α,Β,Γ,Δ. Διαλέγει μια στην τύχη και την επισκέπτεται την 1η μέρα. Τη 2η μέρα διαλέγει μια από τις 3 που δεν επισκέφθηκε την 1η μέρα. Την 3η μέρα διαλέγει μια από τις 3 που δεν επισκέφθηκε την 2η μέρα (αλλά μπορεί να ξαναεπισκεφθεί αυτή που επισκέφθηκε την 1η μέρα). Βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των ημερών N μέχρι να έχει επισκεφθεί όλες τις πρωτεύουσες τουλάχιστον μία φορά.

4.16.(Το πρόβλημα του συλλέκτη κουπονιών) Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n είδη διαφορετικών κουπονιών, και κάθε φορά που κάποιος αγοράζει ένα κουπόνι, αυτό μπορεί να είναι ισοπίθανα οποιοδήποτε απο τα n διαφορετικά είδη. Ποια είναι η μέση τιμή μ_n του αριθμού κουπονιών που πρέπει να αγοράσει κανείς ώστε να έχει συλλέξει ένα κουπόνι απο κάθε είδος; Ποια είναι η ασυμπτωτική συμπεριφορά της μ_n για $n \to \infty$;

Υπόδειξη: Έστω Y_i η αγορά κατά την οποία βρίσκουμε το i-στο νέο κουπόνι. Ζητάμε την $E(Y_n)$. Ποια είναι η κατανομή καθεμίας από τις διαφορές $Y_2 - Y_1, \dots, Y_n - Y_{n-1}$;

4.17. Κατασκευάζουμε έναν αριθμό $x = 0.\, a_1 a_2 a_3 ...$ στο $[0, 1)$ επιλέγοντας τα δεκαδικά του ψηφία απο αριστερά προς τα δεξιά το ένα μετά το άλλο απο το $\{0, 1, \dots, 9\}$ ομοιόμορφα. Στον αριθμό που σχηματίζεται ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός δεκαδικών ψηφίων

(α) Πρίν απο την εμφάνιση για πρώτη φορά του ψηφίου 7.
(β) Πριν την εμφάνιση για πρώτη φορά ενός απο τα ψηφία 2, 4, 6.

(γ) Πριν την 8η εμφάνιση του ψηφίου 4.
(δ) Μέχρι την 4η εμφάνιση ζυγού ψηφίου.
(ε) Μέχρι την εμφάνιση και των τριών ψηφίων 3, 5, 6.

5. Συνεχεις κατανομες

5.1. Ένα βενζινάδικο γεμίζει πλήρως τη δεξαμενή του μια φορά την εβδομάδα. Αν ο εβδομαδιαίος όγκος πωλήσεων σε χιλιάδες λίτρα είναι μια τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{αν } x \in (0,1), \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R}\backslash(0,1), \end{cases}$$

πόση πρέπει να είναι η χωρητικότητα της δεξαμενής ώστε η πιθανότητα να εξαντληθούν τα αποθέματα κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης εβδομάδας να είναι ίση με $1/100$;

5.2. Η τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα $f_X(x) = cx^{-r}\mathbf{1}_{x\geq 1}$, όπου οι c, r είναι θετικές σταθερές.

(α) Ποιες είναι οι επιτρεπτές τιμές του r;
(β) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c συναρτήσει του r.
(γ) Για ποιες τιμές του r ισχύει $EX < \infty$;
(δ) Για δεδομένο $r > 1$, για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $E(X^a) < \infty$;

5.3. Αν η X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή σε κάποιο διάστημα (a, b), $X \sim U(a, b)$, και έχει μέση τιμή $\mu = 5$ και διασπορά $\sigma^2 = 3$, να βρείτε τους αριθμούς a, b και την πιθανότητα $P(|X - 5| > 2)$.

5.4. Ρίχνουμε ένα ζάρι και αν εμφανιστεί η ένδειξη i, τότε διαλέγουμε τυχαία έναν αριθμό, έστω X, από το διάστημα $(0, i)$ (σύμφωνα με την ομοιόμορφη κατανομή $U(0, i)$). Βρείτε την πυκνότητα της X. Κατά μέσο όρο ποιον αριθμό διαλέγουμε;

5.5. Έστω ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Αν $P(X > 1.85) = 0.2$ και $P(X > 1.70) = 0.9$ να βρεθούν τα μ, σ^2. Δίνεται ότι $\Phi^{-1}(0.8) = 0.85, \Phi^{-1}(0.9) = 1.29$

5.6. Το βάρος X ενός κουτιού αναψυκτικού ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 330$gr και τυπική απόκλιση $\sigma = 10$gr. Βρείτε

(α) Την πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο κουτί να έχει βάρος μεγαλύτερο των 340gr.
(β) Την πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο κουτί να έχει βάρος μικρότερο των 310gr.
(γ) Την πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο κουτί να έχει βάρος μεταξύ των 310gr και των 340gr.
(δ) Την πιθανότητα μεταξύ δέκα τυχαία επιλεγμένων κουτιών, το πολύ 8 από αυτά να έχουν βάρος μικρότερο των 340gr.
(ε) Τον αναμενόμενο αριθμό κουτιών, μεταξύ δέκα τυχαία επιλεγμένων κουτιών, που έχουν βάρος μικρότερο των 340gr.

5.7. Για μια συνεχή κατανομή, ο αριθμός a λέγεται *διάμεσος* της κατανομής αν $P(X \geq a) = P(X \leq a)$, όπου η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη δεδομένη κατανομή.

(α) Να δειχθεί ότι κάθε συνεχής κατανομή έχει τουλάχιστον έναν διάμεσο.
(β) Ποιος είναι ένας διάμεσος για την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$; Είναι μοναδικός;

5.8. Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα f που είναι συμμετρική γύρω από το $\mu \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f(\mu + x) = f(\mu - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι το μ είναι διάμεσος της X. Αν επιπλέον $E|X| < \infty$, δείξτε ότι $E(X) = \mu$.

5.9. Αν $X \sim N(0, 1)$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και με $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ φραγμένο, να δειχθεί ότι

$$E(f'(X)) = E(Xf(X)).$$

5.10. Υπολογίστε τις *απόλυτες* ροπές $E|Z|^p$, $p > 0$, όταν η Z ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική $N(0,1)$ συναρτήσει της συνάρτησης Γάμμα και δείξτε ότι $E|X-\mu| = \sigma\sqrt{2/\pi}$ όταν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

5.11. Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με κάποια παράμετρο $\theta > 0$. Η X παριστάνει τον χρόνο ζωής (σε έτη) ενός ηλεκτρονικού εξαρτήματος. Ο κατασκευαστής προσφέρει εγγύηση $a = 2$ ετών και αυτό είναι το μέγιστο a έτσι ώστε τουλάχιστον το 95% των εξαρτημάτων να λειτουργούν τουλάχιστον μέχρι το χρόνο εγγύησης (ώστε να μην χρειάζεται να τα αντικαταστήσει). Ποιος είναι ο μέσος χρόνος ζωής των εξαρτημάτων και ποια η διασπορά αυτού του χρόνου ζωής;

5.12. Να βρεθεί ένας διάμεσος για την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

5.13. Αν $X \sim \exp(\lambda)$, να δειχθεί ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$E(X^k) = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

Συναρτηση τυχαιας μεταβλητης

5.14. Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα $f_X(x) = \frac{1}{2x^2}\mathbf{1}_{|x|\geq 1}$, να βρεθεί η πυκνότητα της $Y := X^2$.

5.15. Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα $f_X(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$, να βρεθεί η πυκνότητα της

$$Y := \begin{cases} X & \text{αν } X \leq 1, \\ 1/X & \text{αν } X > 1. \end{cases}$$

5.16. Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(1,2)$. Θέτουμε $Y := X + \frac{2}{X}$. Να προσδιοριστούν για την Y η μέση τιμή $E(Y)$, η συνάρτηση κατανομής F_Y, και η πυκνότητα f_Y.
[Υπόδειξη για την εύρεση της F_Y: Κάντε τη γραφική παράσταση της $x \mapsto x + 2x^{-1}$ στο $[1,2]$.]

5.17. Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x>0}$ όπου λ είναι μια θετική σταθερά[5], να προσδιοριστεί η κατανομή της $Y = [X]$ (ακέραιο μέρος του X). Ποια είναι η μέση τιμή της Y;

5.18. (α) Αν η U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$, τότε για $a < b$ η

$$X := a + (b-a)\,U$$

ακολουθεί την ομοιόμορφη στο (a,b).

(β) Αν η X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (a,b), όπου $a < b$, τότε η

$$U := \frac{X-a}{b-a}$$

ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$.

(γ) Αν η U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$, τότε και η $Y := 1-U$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$.

5.19. Έστω $\theta > 0$. Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$.

(α) Αποδείξτε ότι η τυχαία μεταβλητή $X := -\log(U)/\theta$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο θ.

[5] Δηλαδή η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

(β) Βρείτε την πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής[6] $Y := \log\left(\frac{U}{1-U}\right)$.

5.20. Αν $X \sim N(0,1)$, να δειχθεί ότι $X^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$.

5.21. (Κατανομή Weibul) Έστω $c > 0$. Όταν η X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta > 0$ τότε λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή $Y = X^{1/c}$ ακολουθεί την κατανομή Weibul με παραμέτρους c και θ. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας της Y.

5.22. Αν η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$ και r είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, τότε η $Y = rX$ ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda/r)$.

5.23. Αν η F είναι συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής, τότε ξέρουμε ότι ικανοποιεί τα εξής:

(i) είναι αύξουσα,
(ii) είναι δεξιά συνεχής,
(iii) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$,
(iv) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Αντίστροφα τώρα, υποθέτουμε ότι μια $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις (i)-(iv) και επιπλέον ότι είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Και έστω U τυχαία μεταβλητή με κατανομή την ομοιόμορφη στο $(0,1)$. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$X := F^{-1}(U).$$

Να δειχθεί ότι η X έχει συνάρτηση κατανομής F.

Σχόλιο: Η υπόθεση ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής δεν χρειάζεται. Χωρίς αυτήν, ορίζει κανείς για $t \in [0,1]$

$$F^{-1}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}.$$

Και αποδεικνύεται πάλι ότι η $F^{-1}(U)$ έχει συνάρτηση κατανομής F.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

(α) Κάθε F που ικανοποιεί τις (i)-(iv) είναι συνάρτηση κατανομής κάποιας τυχαίας μεταβλητής, π.χ., της $F^{-1}(U)$. Και επομένως οι συνθήκες (i)-(iv) είναι ικανές και αναγκαίες ώστε μια συνάρτηση να είναι συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής.

(β) Αν έχουμε έναν μηχανισμό που παράγει μια τυχαία μεταβλητή U με κατανομή ομοιομορφη στο $(0,1)$, τότε μπορούμε να παραγάγουμε οποιαδήποτε άλλη τυχαία μεταβλητή μέσω του μετασχηματισμού $F^{-1}(U)$. Αρκεί βέβαια να μπορούμε να υπολογίσουμε την F^{-1}. Αυτό κάναμε στην άσκηση 5.19(α).

[6] Η συγκεκριμένη Y λέμε ότι ακολουθεί τη Λογιστική (Logistic) κατανομή.

6. Πολυδιαστατες τυχαιες μεταβλητες

6.1. Εξάγουμε διαδοχικά χωρίς επανάθεση έξι σφαιρίδια απο μια κάλπη που περιέχει 50 σφαιρίδια αριθμημένα $1, 2, \ldots, 50$. Έστω X η μικρότερη ένδειξη και Y η μεγαλύτερη ένδειξη απο τις 6. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y).

6.2. Έστω ότι οι X, Y έχουν από κοινού πυκνότητα

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x^c y & \text{αν } (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \\ 0 & \text{αν } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,1)\times(0,1). \end{cases}$$

(α) Ποια η τιμή της σταθεράς c;
(β) Να βρεθούν οι περιθώριες της (X, Y).
(γ) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(X < 1/3)$, $P(Y > 2X)$.

6.3. Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y δίνεται από τον τύπο

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\left(x^2 + \dfrac{xy}{2}\right) & \text{αν } (x,y) \in (0,1)\times(0,2), \\ 0 & \text{αν } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,1)\times(0,2). \end{cases}$$

Υπολογίστε
(α) Την σταθερά c.
(β) Την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της X.
(γ) Την $P(X > Y)$.
(δ) Την $P(Y > \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2})$.
(ε) Την $E(X)$.

6.4. Οι αριθμοί B, C επιλέγονται τυχαία και ανεξάρτητα από το $(-1, 1)$. Ποια είναι η πιθανότητα η δευτεροβάθμια εξίσωση $z^2 + Bz + C = 0$ να έχει πραγματικές ρίζες; Λύστε το ίδιο πρόβλημα όταν αντί του $(-1, 1)$ χρησιμοποιείται το $(-q, q)$ για κάποιο $q > 0$.

***6.5.** Έστω ότι επιλέγουμε ένα σημείο (X, Y) ομοιόμορφα στο $(0,1)\times(0,1)$. Να διεχθεί ότι η πιθανότητα ο εγγύτερος ακέραιος στον Y/X να είναι άρτιος είναι $(5-\pi)/4$. Δίνεται ότι η αντίστροφη εφαπτομένη $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ έχει το εξής ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά

$$\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1, 1].$$

6.6. Διαθέτουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 1 το οποίο κόβουμε τυχαία σε τρία κομμάτια ακολουθώντας μία από τις εξής διαδικασίες.

(α) Επιλέγουμε με ανεξάρτητο τρόπο και ομοιόμορφα 2 σημεία πάνω στο τμήμα και σε εκείνα τα σημεία το κόβουμε.
(β) Επιλέγουμε ομοιόμορφα ένα σημείο στο τμήμα, το κόβουμε εκεί και βάζουμε στην άκρη το τμήμα που περιέχει το A. Έπειτα επιλέγουμε ομοιόμορφα ένα σημείο στο τμήμα που έχει μείνει και το κόβουμε σε εκείνο το σημείο.

Για καθεμία από αυτές τις διαδικασίες, να βρεθεί η πιθανότητα τα τρία κομμάτια που θα προκύψουν να μπορούν να είναι οι πλευρές ενός τριγώνου.

6.7. Έστω X, Y από κοινού συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με πυκνότητα $f(\cdot,\cdot)$. Να δειχθεί ότι $P(X = Y) = 0$, δηλαδή δεν έχουμε ποτέ σύμπτωση/ισοπαλία των X, Y.

Ειδική περίπτωση είναι όταν οι X, Y είναι ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και έχουν και οι δυό τους πυκνότητα.

6.8. Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ και συνάρτηση κατανομής F_X, F_Y αντίστοιχα. Να βρεθούν

(α) Η συνάρτηση κατανομής της $X \wedge Y := \min\{X, Y\}$.

(β) Η συνάρτηση κατανομής της $X \vee Y := \max\{X, Y\}$.

(γ) Η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $X \wedge Y, X \vee Y$.

6.9. Έστω X_1, X_2, X_3, X_4 ανεξάρτητες και ισόνομες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με πυκνότητα $f(\cdot)$. Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε μετάθεση των (i_1, i_2, i_3, i_4) των (1, 2, 3, 4), π.χ. $(i_1, i_2, i_3, i_4) = (2, 4, 3, 1)$, ισχύει

$$P(X_{i_1} < X_{i_2} < X_{i_3} < X_{i_4}) = \frac{1}{4!}$$

Ποιο είναι το ανάλογο αποτέλεσμα όταν έχουμε n τυχαίες μεταβλητές;

6.10. Έστω ότι οι X, Y έχουν από κοινού πυκνότητα

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{αν } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να δειχθεί ότι πράγματι η f είναι συνάρτηση πυκνότητας.

(β) Να υπολογιστούν οι δεσμευμένες πυκνότητες $f_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y), f_{Y\,|\,X}(\cdot\,|\,x)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$ για τα οποία έχουν νόημα.

6.11. Έστω X, Y, Z ανεξάρτητες ομοιόμορφες στο $(0, 1)$ τυχαίες μεταβλητές.

(α) Βρείτε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U = XY$ και $V = Z^2$.

(β) Υπολογίστε την $P(XY < Z^2)$.

6.12. Έστω X με ομοιόμορφη κατανομή στο (0,1) και Y με εκθετική κατανομή με παράμετρο 1. Να βρεθούν οι συναρτήσεις κατανομής των $Z = X + Y$ και $W = X/Y$, όταν οι X, Y είναι ανεξάρτητες.

7. Υπολογισμος μεσων τιμων, συνδιακυμανσεων, συντελεστων συσχετισης

7.1. Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές με από κοινού πυκνότητα

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;
(β) Να υπολογιστεί η $E(Ye^X)$.
(γ) Να υπολογιστούν οι $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $\rho(X,Y)$.

7.2. Σε 3 ρίψεις ενός τίμιου νομίσματος, έστω X ο αριθμός των κεφαλών στις 2 πρώτες ρίψεις και Y ο αριθμός κεφαλών στις 2 τελευταίες ρίψεις. Θέτουμε

$$f(x,y) = \mathbf{P}(X = x, Y = y)$$

για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των (X,Y).
(α) Υπολογίσετε την $f(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbf{P}(Y = 1 \,|\, X = 1)$.
(γ) Υπολογίστε τη συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

7.3. Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν από κοινού πυκνότητα

$$f(x,y) = \begin{cases} -xy & \text{αν } (x,y) \in (-1,0) \times (0,1) \cup (1,2) \times (-1,0), \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X + Y < 0)$.
(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E(XY)$.
(γ) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

7.4. Έστω (X,Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{C}{(x+y-1)(x+y)(x+y+1)} \mathbf{1}_{x,y \in \mathbb{N}^+}.$$

Βρείτε:
(α) Τη σταθερά C.
(α) Τις περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x), f_Y(y)$ των X, Y αντίστοιχα.
(γ) Τη συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
(δ) Τη συνάρτηση πιθανότητας f_U της $U = X + Y$.

7.5. Έστω A, B ενδεχόμενα σε έναν χώρο πιθανότητας και $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B$ οι δείκτριες συναρτήσεις τους. Να υπολογιστεί η $\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.

7.6. Οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και καθεμία ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή μ. Να βρείτε τη συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2)$ καθώς και τον συντελεστή συσχέτισης $\rho(X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2)$. Είναι οι τυχαίες μεταβλητές $X_1 + X_2$ και $2X_1 + 3X_2$ ανεξάρτητες;

7.7. Έστω X, Y ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένη και μη μηδενική διασπορά και συνελεστή συσχέτισης $\rho(X,Y) \neq -1, 1$. Να βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης των $X + Y$ και $X - Y$, $\rho(X+Y, X-Y)$. Τι συμπεραίνετε για τις τυχαίες μεταβλητές $X + Y, X - Y$;

7.8. Έστω X, Y, Z τυχαίες μεταβλητές με $E(X^2), E(Y^2) < \infty$, $Z \sim N(0,1)$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 1$, και η Z ανεξάρτητη απο τις X, Y. Να υπολογιστεί η $\mathrm{Cov}(XZ^2, Y + Z)$.

7.9. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 με $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = 1$ και διασπορά του αθροίσματος $\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = 3$. Είναι οι X_1, X_2 ανεξάρτητες; Αν είναι γνωστό ότι για κάποια σταθερά c οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και $X_2 - cX_1$ είναι ανεξάρτητες, τι συμπέρασμα βγάζετε για τη σταθερά c;

7.10. Έστω X, I ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X \sim N(0,1)$ και την I να παίρνει καθεμία από τις τιμές $-1, 1$ με πιθανότητα $1/2$. Θέτουμε $Y = XI$.

(α) Να δειχθεί ότι $Y \sim N(0,1)$.

(β) Να υπολογιστεί η $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

7.11. Έστω X, I ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την X να έχει πυκνότητα $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2} \mathbf{1}_{x>0}$ και την I να παίρνει καθεμία από τις τιμές $-1, 1$ με πιθανότητα $1/2$. Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή $Y = I\sqrt{X}$ έχει πυκνότητα η οποία και να προσδιοριστεί.

7.12. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές καθεμία με μέση τιμή $E(X_i) = 2$ και διασπορά $\mathrm{Var}(X_i) = 8$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Να προσδιορίσετε σταθερές $\alpha_n \in \mathbb{R}$ και $\beta_n > 0$ έτσι ώστε η τυχαία μεταβλητή $\alpha_n + \beta_n Y$ να έχει μέση τιμή 0 και διασπορά 1, όπου $Y = \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} X_i$.

7.13. Επιλέγουμε έναν αριθμό X ομοιόμορφα τυχαία στο σύνολο $\{1, 2, \ldots, 20\}$ και θέτουμε $Y := 21 - X$.

(α) Ποια η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Y;

(β) Τι πρόσημο περιμένουμε να έχει η $\mathrm{Cov}(X,Y)$; Να αποδειχθεί τυπικά ποιο είναι αυτό.

7.14. $n \geq 1$ άτομα επιβιβάζονται τυχαία σε ένα αεροπλάνο n θέσεων αγνοώντας την ανάθεση θέσης που λέει η κάρτα επιβίβασής τους. Έστω W ο αριθμός αυτών που κάθονται (συμπτωματικά) στη θέση που τους ανατέθηκε. Θέτουμε $X_i = 1$ αν ο i επιβάτης κάθησε στη θέση που αναφέρει η κάρτα του και $X_i = 0$ διαφορετικά.

(α) Να υπολογιστεί η συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ για $i \neq j$. Πώς σχολιάζετε το πρόσημό της;

(β) Να υπολογιστούν οι $E(W), \mathrm{Var}(W)$.

7.15. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι $n \geq 1$ φορές. Έστω Z ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται 2 και W ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται το 3. Να υπολογιστεί η $\mathrm{Cov}(Z, W)$.

7.16. Μια κάλπη περιέχει n σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 ως το n. k σφαιρίδια επιλέγονται χωρίς επανάθεση. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά του αθροίσματος των ενδείξεών τους.

7.17. Έστω ότι επιλέγουμε στην τύχη δυο $n-$ψήφιους αριθμούς με ψηφία από το σύνολο $\{1, 2, ..., 9\}$. Αν ο ίδιος ο k-ψήφιος αριθμός εμφανίζεται στην ίδια θέση και στους 2 αριθμούς λέμε ότι έχει λάβει χώρα μια k-σύμπτωση.

Π.χ., για $n = 10$, έστω ότι διαλέξαμε τους αριθμούς 1291744189 και 1328744123. Τότε υπάρχουν πέντε 1-συμπτώσεις (στις θέσεις 1,5,6,7,8), πέντε 2-συμπτώσεις (στις θέσεις 5,6,7 $(74, 44, 41)$), δύο 3-συμπτώσεις (στις θέσεις 5,6 $(744, 441)$), και μία 4-σύμπτωση (στη θέση 5 (7441)).

Έστω X ο αριθμός των k-συμπτώσεων δύο τυχαίων n-ψήφιων αριθμών με ψηφία από το $\{1, 2, ..., 9\}$. Να βρεθούν η $E(X)$ και η $\mathrm{Var}(X)$.

7.18. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 για τις οποίες ξέρουμε μόνο ότι $\mathrm{Var}(X_1) = 3, \mathrm{Var}(X_2) = 2$.

(α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η $\mathrm{Var}(X_1 + X_2)$;

(β) Πως σχετίζονται στις δύο ακραίες περιπτώσεις του ερωτήματος (α) οι X_1, X_2;

7.19. Έστω τυχαία μεταβλητή X με διασπορά $\mathrm{Var}(X) = a \in (0, \infty)$.

*(α) Για $c \in [0,1]$ δεδομένο, να κατασκευαστεί τυχαία μεταβλητή Y τέτοια ώστε $\rho(X,Y) = c$.

(β) Για $c \in [-1, 0]$ δεδομένο, να κατασκευαστεί τυχαία μεταβλητή Y τέτοια ώστε $\rho(X, Y) = c$.

7.20. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την ίδια κατανομή, με μέση τιμή μ, και διακύμανση $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Θέτουμε

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2.$$

Να δειχθεί ότι

(α) $E(\overline{X}) = \mu, \mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2/n$.
(β) $E(S^2) = \sigma^2$.

8. Αλλαγη μεταβλητης σε πολλες διαστασεις

8.1. Έστω $a, b, \lambda > 0$ και X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X \sim \Gamma(a, \lambda)$ και $Y \sim \Gamma(b, \lambda)$. Θέτουμε

$$(U, V) := \left(\frac{X}{X+Y}, X+Y \right).$$

Να δειχθεί ότι οι U, V είναι ανεξάρτητες, $U \sim$ Βήτα(a, b), και $V \sim \Gamma(a+b, \lambda)$.

8.2. Οι τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f_{X,Y}(\cdot, \cdot)$.

(α) Να δειχθεί ότι η από κοινού πυκνότητα των τυχαίων μεταβλητών

$$U := X + Y,$$
$$V := X - Y$$

ισούται με

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{2} f_{X,Y} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \right)$$

για κάθε $u, v \in \mathbb{R}$.

(β) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες καθεμία με κατανομή $N(0,1)$ να δειχθεί ότι οι $X+Y, X-Y$ είναι ανεξάρτητες και καθεμία ακολουθεί την κατανομή $N(0,2)$.

(γ) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες καθεμία με κατανομή εκθετική με παράμετρο $\lambda > 0$, ποια είναι η από κοινού πυκνότητα των $X+Y, X-Y$; Είναι οι $X+Y, X-Y$ ανεξάρτητες; Τι κατανομή ακολουθεί καθεμιά τους;

(δ) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες καθεμία με κατανομή ομοιόμορφη στο $(0,1)$, ποια είναι η από κοινού πυκνότητα των $X+Y, X-Y$; Ποιο είναι το σύνολο στο οποίο είναι θετική;

8.3. Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, με καθεμιά τους να ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ,

(α) Να βρεθεί η από κοινού πυκνότητα των $X+Y, X/Y$. Είναι ανεξάρτητες;

(β) Να βρεθεί η πυκνότητα της X/Y.

8.4. Έστω $a, b, c > 0$, και X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, με την X να ακολουθεί την κατανομή Βήτα(a, b) και την Y να ακολουθεί την Βήτα$(a+b, c)$. Να δειχθεί ότι η XY ακολουθεί την Βήτα$(a, b+c)$.

8.5. Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με καθεμία τους να ακολουθεί την κατανομή $N(0,1)$.

(α) Να βρεθεί η από κοινού πυκνότητα των $X, X/Y$.

(β) Να δειχθεί ότι η X/Y ακολουθεί την κατανομή Cauchy. Δηλαδή έχει πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(1+x^2)}.$$

(γ) Αν η Z ακολουθεί την κατανομή Cauchy, να δειχθεί ότι και η $1/Z$ ακολουθεί την κατανομή Cauchy.

8.6. Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με καθεμία τους να ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$. Να βρεθεί η από κοινού πυκνότητα των $R := \sqrt{X^2+Y^2}, \Theta := \tan^{-1}(Y/X)$.

9. Δεσμευμενη μεση τιμη

9.1. Έστω ότι οι X, Y έχουν από κοινού πυκνότητα

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{αν } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να δειχθεί ότι πράγματι η f είναι συνάρτηση πυκνότητας.
(β) Να υπολογιστούν οι δεσμευμένες πυκνότητες $f_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y), f_{Y\,|\,X}(\cdot\,|\,x)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$ για τα οποία έχουν νόημα.
(γ) Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές $E(Y), E(X^2\,|\,Y = y), E(e^Y\,|\,X = x)$ για $x, y \in (0, 1)$.

9.2. Βρείτε τη δεσμευμένη πυκνότητα $f_{Y|X}(y|x)$ της Y δοθέντος ότι $X = x$ και την αντίστοιχη δεσμευμένη μέση τιμή $E(Y|X = x)$ στην περίπτωση που η διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας
(α) $f_{X,Y}(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{0\le x\le y}$.
(β) $f_{X,Y}(x, y) = xe^{-x(y+1)}\mathbf{1}_{x\ge 0, y\ge 0}$.

9.3. Έστω ότι ένα νόμισμα με πιθανότητα p να φέρει K σε κάθε ρίψη ρίπτεται $2n$ φορές. Να βρεθεί ο δεσμευμένος μέσος αριθμός ενδείξεων K στις πρώτες n ρίψεις δεδομένου ότι συνολικά έφερε m φορές την ένδειξη K.

9.4. Έστω X, Y, Z ανεξάρτητες εκθετικές κατανομές με παραμέτρους λ,μ,ν αντίστοιχα. Βρείτε την $P(Y < Z)$ και την $P(X < Y < Z)$.

9.5. Μια μηχανή μας δίνει ένα νόμισμα που φέρνει Κ με τυχαία πιθανότητα p. Το p είναι άγνωστο σε μας, αλλά ξέρουμε από πολλές παρατηρήσεις των νομισμάτων που εξάγει η μηχανή ότι η κατανομή της τυχαίας παραμέτρου p είναι η ομοιόμορφη στο $(0, 1)$. Ρίχνουμε το νόμισμα δύο φορές. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:
(α) Στην πρώτη ρίψη το νόμισμα φέρνει Κ.
(β) Και στις δύο ρίψεις το νόμισμα φέρνει Κ.

9.6. Μια κάλπη περιέχει αρχικά a άσπρες και b μαύρες μπάλες. Εξάγουμε τυχαία μία μπάλα και αν είναι άσπρη την επιστρέφουμε στην κάλπη ενώ αν είναι μαύρη την αντικαθιστούμε με μία άσπρη που παίρνουμε από μια άλλη κάλπη. Έστω X_n το πλήθος των άσπρων μπαλών όταν η προηγούμενη διαδικασία πραγματοποιηθεί n φορές.
(α) Να δειχθεί ότι για κάθε $n \ge 1$ ισχύει

$$E(X_n\,|\,X_{n-1}) = \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) X_{n-1} + 1.$$

(β) Να δειχθεί ότι για κάθε $n \ge 0$ ισχύει

$$E(X_n) = a + b - b\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)^n.$$

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα η μπάλα που επιλέγουμε κατά το $n + 1$ βήμα να είναι άσπρη;

9.7. Θεωρούμε δυό τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης. Να δειχθεί ότι

$$\mathrm{Cov}(X, E(Y|X)) = \mathrm{Cov}(X, Y).$$

9.8.[7] Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο εξάεδρο δίκαιο ζάρι και στη συνέχεια ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα όσες φορές έδειξε το ζάρι. Να βρεθεί ο μέσος αριθμός φορών που το νόμισμα εμφάνισε την ένδειξη Κ.

---

[7] Οι Ασκήσεις 9.8-9.16 αυτής της παραγράφου είναι προβλήματα στα οποία δίνει λύση ο νόμος της διπλής μέσης τιμής, $E(E(X|Y)) = E(X)$, αλλά χρειάζεται να επιλέξει κανείς κατάλληλη τυχαία μεταβλητή Y.

9.9. Ο αριθμός X των πελατών που εισέρχονται σε ένα κατάστημα στη διάρκεια μιας μέρας ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή 120. Κάθε πελάτης, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, πληρώνει με κάρτα με πιθανότητα $1/4$ ή με μετρητά (με πιθανότητα $3/4$). Έστω Y ο αριθμός των πελατών που πληρώνει με κάρτα στη διάρκεια μιας ημέρας. Να βρείτε

(α) τη μέση τιμή της Y,
(β) τη διασπορά της Y, και
(γ) τον συντελεστή συσχέτισης $\rho = \rho(X, Y)$ των X, Y. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

9.10. Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή τη γεωμετρική με παράμετρο $p \in (0, 1)$. Να βρεθεί η μέση τιμή της X με χρήση του νόμου της διπλής μέσης τιμής.

9.11. Σε ένα παιχνίδι ο παρουσιαστής μοιράζει τυχαία σε τρία κουτιά Α, Β, Γ, τρείς φακέλους 1, 2, 3. Ο 1 λέει ότι ο παίκτης πρέπει να πληρώσει 5 Ευρώ, ο 2 ότι πρέπει να πληρώσει 6 Ευρώ, ο 3 λέει ότι ο παίκτης κερδίζει ένα αυτοκίνητο. Ο παίκτης επιλέγει ένα από τα τρία κουτιά Α, Β, Γ, με πιθανότητα $1/3$ το καθένα και ακολουθεί την εντολή που λέει ο φάκελος που περιέχεται στο κουτί. Στόχος του είναι να βρεί τον φάκελο 3, οπότε μετά από κάθε αποτυχημένη προσπάθεια ξαναπαίζει το παιχνίδι. Βέβαια ο παρουσιαστής ξαναμοιράζει τους φακέλους στα κουτιά. Έστω X το ποσό που θα πληρώσει ο παίκτης ώσπου να βρεί τον φάκελο 3 (προφανώς η X είναι τυχαία μεταβλητή). Να βρεθεί η $E(X)$.

9.12. Ρίχνουμε συνεχώς ένα συνηθισμένο ζάρι μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά η ένδειξη 1. Να υπολογιστεί η μέση τιμή του αθροίσματος όλων των ενδείξεων που έφερε το ζάρι.

9.13. Ένα νόμισμα έχει πιθανότητα p να φέρει γράμματα (Γ) σε μία ρίψη. Το ρίχνουμε συνεχώς ώσπου να εμφανιστούν και οι δύο διαφορετικές ενδείξεις Κ, Γ. Να βρεθούν:

(α) Ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων
(β) Η πιθανότητα η τελευταία ρίψη να είναι Κ.

9.14. Ο Νίκος έχει ένα σπίτι με μπρος και πίσω πόρτα. Βάζει n ζευγάρια παπούτσια σε κάθε πόρτα. Για κάθε περίπατο διαλέγει στην τύχη μια πόρτα, βάζει ένα ζευγάρι παπούτσια από αυτά που βρίσκονται σε αυτή την πόρτα, και επιστρέφει διαλέγοντας στην τύχη πόρτα. Να βρεθεί ο μέσος αριθμός περιπάτων μέχρι ο Νίκος να μην βρει παπούτσια στην πόρτα που επέλεξε για να αρχίσει τον επόμενο περίπατό του.

9.15. Τρεις άνθρωποι τη χρονική στιγμή 0 βρίσκονται στις τρεις διαφορετικές κορυφές ενός τριγώνου. Σε κάθε στιγμή $t = 1, 2, ...$ κάθε άνθρωπος διαλέγει κάποια από τις κορυφές εκτός της τρέχουσας θέσης του, στην τύχη, και μεταβαίνει σε αυτή ανεξάρτητα από τους άλλους ανθρώπους. Έστω M ο χρόνος (αριθμός γύρων) μέχρι που να συναντηθούν και οι τρεις άνθρωποι στην ίδια κορυφή. Βρείτε την πιθανογεννήτρια της M, τη μέση τιμή, τη διασπορά, και τη συνάρτηση πιθανότητάς της.

9.16. Θεωρούμε τις ανεξάρτητες συνεχόμενες ρίψεις ενός δίκαιου νομίσματος. Να βρεθούν:

(α) Ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων μέχρι να εμφανιστούν δυο συνεχόμενα Κ (να εμφανιστεί για πρώτη φορά η «λέξη» ΚΚ)
(β) Ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά Κ ακολουθούμενο από Γ (να εμφανιστεί για πρώτη φορά η «λέξη» ΚΓ).

10. Πιθανογεννητριες και ροπογεννητριες

10.1. (α) Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f(x) = x^{-2}\,\mathbf{1}_{x\ge 1}$. Για ποια $t \in \mathbb{R}$ είναι η ροπογεννήτρια $M_X(t) = E(e^{tX})$ πεπερασμένη;

(β) Να κατασκευαστεί τυχαία μεταβλητή X ώστε $M_X(t) = \infty$ κάθε για $t \neq 0$.

10.2. Έστω X τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) := \begin{cases} |x| & \text{αν } |x| < 1, \\ 0 & \text{αν } |x| \ge 1. \end{cases}$$

Ποια είναι η ροπογεννήτρια M_X της X;

10.3. Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ροπογεννήτρια καποιας τυχαίας μεταβλητής; Χρησιμοποιήστε τον πίνακα ροπογεννητριών γνωστών κατανομών και ιδιότητες των ροπογεννητριών.

$(a)\ \frac{4}{2-t}\,\mathbf{1}_{t<2} + \infty\mathbf{1}_{t\ge 2}$, $(b)\ \left(\frac{3}{3-t}\right)^{3/5}\mathbf{1}_{t<3} + \infty\mathbf{1}_{t\ge 3}$, $(c)\ \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,e^{-5t^2}\mathbf{1}_{t<1} + \infty\mathbf{1}_{t\ge 1}$,

$(d)\ e^{3\left(\frac{e^{2t}-1}{2t}-1\right)}$, $(e)\ \cos t$.

10.4. Η τυχαία μεταβλητή X έχει ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{e^{4t}}{1-t^2}$$

για $t \in (-1, 1)$.

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X.

(β) Να δείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$P(X \le 1) \le \frac{2}{9}.$$

10.5. Έστω $n \ge 1$ φυσικός αριθμός και δύο τυχαίες μεταβλητές X, R (σε κοινό χώρο πιθανότητας) ώστε η R να ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$ ενώ για την X ξέρουμε ότι η δεσμευμένη κατανομή $X \,|\, R = r$ είναι διωνυμική με παραμέτρους n, r για κάθε $r \in (0,1)$.

(α) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της X.

(β) Με χρήση του (α) να βρεθεί η κατανομή της X.

10.6. (α) Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτριά της, $P_X(u) = E(u^X)$, και από αυτήν να συνάγετε τις $E(X)$ και $\mathrm{Var}(X)$. Για ποια $u \in \mathbb{N}$ είναι πεπερασμένη;

(β) Έστω θετικές σταθερές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ και $\{X_i : 1 \le i \le n\}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Να δειχθεί ότι

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$$

με $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

10.7. Βρείτε τις πιθανογεννήτριες που αντιστοιχούν στις ακόλουθες συναρτήσεις πιθανότητας. Υπολογίστε τις μέσες τιμές και τις διασπορές των αντίστοιχων τυχαιων μεταβλητών.

(α) $P(x) = \binom{n+x-1}{x} p^n (1-p)^x,\ x = 0, 1, 2, ...,$

(β) $P(x) = \dfrac{1}{x(x+1)},\ x = 1, 2, ...$

(γ) $P(x) = \begin{cases} \dfrac{1-p}{1+p} & \text{αν } x = 0, \\ \dfrac{2(1-p)p^x}{1+p} & \text{αν } x = 1, 2, ..., \end{cases}$

10.8. Υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε μία από τις συναρτήσεις

$$g(t) := \frac{at-1}{3-t^3}, \; f(t) := \frac{5t^2+a}{7-t^5},$$

(περιορισμένη σε ένα διάστημα γύρω από το 0) να είναι η πιθανογεννήτρια P_X κάποιας τυχαίας μεταβλητής X; Για αυτή την τιμή του a

(α) Να προσδιοριστεί η κατανομή αυτής της τυχαίας μεταβλητής X.

(β) Να υπολογιστούν με χρήση της P_X η μέση τιμή και η διασπορά της X.

10.9. Για τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κατανομή $N(0, \sigma^2)$, να υπολογιστούν, με χρήση της ροπογεννήτριας της X, οι ροπές $\mu_r := E(X^r)$ για κάθε ακέραιο $r \geq 0$.

10.10. (α) Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$ (όπου $a, \lambda > 0$), δηλαδή την κατανομή με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}.$$

Να υπολογίσετε τη ροπογεννήτριά της, $M_X(t) = E(e^{tX})$. Για ποια t είναι η M_X πεπερασμένη; Χρησιμοποιώντας την, υπολογίστε τις $E(X)$ και $\mathrm{Var}(X)$.

(β) Έστω θετικές σταθερές $a_1, a_2, \ldots, a_n, \lambda$ και $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim \Gamma(a_i, \lambda)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ (δηλαδή με κοινή δεύτερη παράμετρο λ). Να δειχθεί ότι

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \Gamma(a, \lambda)$$

με $a = \sum_{i=1}^n a_i$.

(γ) Να δείξετε ότι όταν οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες Εκθετικές με (κοινή) παράμετρο $\theta > 0$, τότε ο δειγματικός τους μέσος $\overline{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ ακολουθεί κατανομή $\Gamma(a_n, \lambda_n)$ με κατάλληλες σταθερές a_n και λ_n, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

10.11. Αν η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$ και r είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, τότε η $Y = rX$ ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda/r)$.

10.12. Έστω $X_1, X_2, \ldots. X_n$ τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$.

(α) Ποια είναι η κατανομή της $-\log X_1$;

(β) Ποια είναι η κατανομή της $Y := -\log(X_1 X_2 \cdots X_n)$;

(γ) Να δειχθεί ότι η $2Y$ ακολουθεί την κατανομή χ^2 με $2n$ βαθμούς ελευθερίας.

10.13. (α) Έστω ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, Υπολογίστε την ροπογεννήτριά της, $M_X(t) = E(e^{tX})$. Για ποια t είναι πεπερασμένη; Συνάγετε απο αυτήν τις ροπές $E(X^k)$ για $k = 1, 2, 3$.

(β) Να δείξετε ότι όταν οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ είναι ανεξάρτητες και $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε το άθροισμά τους ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ όπου $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$ και $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

(γ) Γενικότερα, να δείξετε ότι όταν οι $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ είναι όπως στο ερώτημα (β), τότε για οποιεσδήποτε σταθερές c_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, με $\sum_{i=1}^n |c_i| > 0$, η τυχαία μεταβλητή $X = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i X_i$ ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ όπου $\mu = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \mu_i$ και $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_i^2$.

(δ) Ποια είναι η κατανομή του δειγματικού μέσου $\overline{X}_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ όταν οι τυχαίες μεταβλητές X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες κανονικές $N(\mu, \sigma^2)$ και ποια είναι η κατανομή του τυποποιημένου δειγματικού μέσου $Z_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/\sigma$;

11. Ανισοτητα Markov. Κεντρικο οριακο θεωρημα

11.1. Έστω X τυχαία μεταβλητή με $E(X) = 3$ και $E(X^2) = 13$. Να δειχθεί ότι

$$P(-2 \le X \le 8) \ge \frac{21}{25}.$$

11.2. Έστω X μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με $EX = 4$ και $E(X^2) = 18$. Τι άνω φράγματα παίρνουμε για την πιθανότητα $P(X \ge 5)$ από τις ανισότητες Markov και Chebyshev;

11.3. Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $(0, \infty)$ και $E(X) = \mu \in (0, \infty), \mathrm{Var}(X) = 1/2$, να δειχθεί ότι

$$P(\mu - 1 \le X \le 2\mu) \ge \frac{1}{2}.$$

11.4. Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N} \backslash \{0\}$, με συνάρτηση πιθανότητας f, ώστε η ακολουθία $(f(k))_{k \ge 1}$ να είναι φθίνουσα. Να δειχθεί ότι

$$P(X = k) \le 2\,\frac{E(X)}{k^2}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

11.5. Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty)$, με πυκνότητα f, ώστε η f να είναι φθίνουσα στο $[0, \infty)$. Να δειχθεί ότι

$$f(x) \le 2\,\frac{E(X)}{x^2}$$

για κάθε $x > 0$.

11.6. Έστω n «μεγάλος» φυσικός αριθμός και X τυχαία μεταβλητή που παίρνει μόνο τις τιμές 0 και n^2 με πιθανότητες $1 - n^{-1}, n^{-1}$ αντίστοιχα, δηλαδή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \ne 0, n \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{αν } x = 0, \\ \frac{1}{n} & \text{αν } x = n^2. \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι $EX = n$, να υπολογιστεί η $\mathrm{Var}(X)$ καθώς και η πιθανότητα $P(X > 0.8\,n)$, δηλαδή η X να μην είναι πολύ μικρότερη απο τη μέση της τιμή.

11.7. Έστω X μή αρνητική τυχαία μεταβλητή με $EX < \infty$ και $a \in (0, 1)$. Τότε

(α)

$$P(X \le a\,EX) \le \frac{\mathrm{Var}(X)}{(1-a)^2 (EX)^2}.$$

*(β) (Ανισότητα Paley-Zygmund)

$$P(X > a\,EX) \ge (1-a)^2 \frac{(EX)^2}{E(X^2)}.$$

(γ) Τι φράγματα δίνουν οι (α), (β) για την πιθανότητα $P(X > 0.8\,n)$ από την προηγούμενη άσκηση;

11.8. Έστω X τυχαία μεταβλητή, και έστω ότι για κάποιο $a > 0$ ισχύει $E(e^{aX}) < \infty$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $C > 0$ σταθερά ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ να ισχύει $P(X > t) \leq Ce^{-at}$. Δηλαδή η ποσότητα $P(X > t)$, που εκ των προτέρων ξέρουμε ότι φθίνει στο 0 για $t \to \infty$, φθίνει τουλάχιστον εκθετικά.

Κεντρικο οριακο θεωρημα

11.9. Τα αιτήματα που φτάνουν σε έναν server έχουν το καθένα τυχαίο χρόνο εξυπηρέτησης που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta = 1/2$ (δηλαδή πυκνότητα $(1/2)e^{-x/2}\mathbf{1}_{x>0}$, το x σε λεπτά). Ο server μπορεί να απασχολείται με μόνο ένα αίτημα σε κάθε δεδομένη στιγμή. Ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα να εξυπηρετήσει τα πρώτα 100 αιτήματα μιας δεδομένης μέρας σε συνολικό χρόνο το πολύ 220 λεπτά; Δίνονται $\Phi(1)$=0.8413, $\Phi(1.5)$=0.9332, $\Phi(2)$=0.9773.

11.10. Θεωρούμε μία ακολουθία ρίψεων ενός αμερόληπτου ζαριού. Για j θετικό ακέραιο θέτουμε $X_j = 1$ αν το αποτέλεσμα της j δοκιμής είναι 5 ή 6 και $X_j = 0$ διαφορετικά.

(α) Να υπολογισθεί η μέση τιμή και η διασπορά της X_1.

(β) Έστω ο αριθμός των αποτελεσμάτων 5 ή 6 στις πρώτες 1800 ρίψεις. Να υπολογισθεί κατά προσέγγιση η πιθανότητα $P(580 < T < 640)$. [Δίνονται $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$, $\Phi(2) = 0.9773$.]

11.11. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_{80}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές καθεμία με διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο $\{1, 2, 3, 4\}$. Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το άθροισμά τους να βρίσκεται στο διάστημα $[190, 220]$. [Δίνονται $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$, $\Phi(2) = 0.9773$.]

11.12. Υπολογίστε κατά προσέγγιση την πιθανότητα σε 100 ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος να εμφανιστούν το πολύ 40 φορές γράμματα. [Δίνονται $\Phi(1) = 0.841$, $\Phi(1.5) = 0.933$, $\Phi(2) = 0.977$.]

11.13. Ο αριθμός τυπογραφικών λαθών μίας σελίδας μίας συγκεκριμένης εφημερίδας ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda = 0.7$. Αν η εφημερίδα έχει 64 σελίδες, ποια είναι κατά προσέγγιση η πιθανότητα το πολύ 36 σελίδες να μην έχουν καθόλου λάθη; [Δίνονται $e^{-0.7} \simeq 1/2$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9773$, $\Phi(3) = 0.9987$.]

11.14. Το σφάλμα μέτρησης ενός οργάνου ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-0.05, 0.05]$. Ποια είναι κατά προσέγγιση η πιθανότητα το σφάλμα μέτρησης για το άθροισμα 300 μετρήσεων να είναι κατ΄ απόλυτη τιμή μικρότερο του 0.25; [Δίνονται $\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(0.8) = 0.7881$, $\Phi(1) = 0.8413$.]

11.15. Δυό ομάδες φοιτητών A και B με 200 μέλη η καθεμία πρόκειται να γράψουν μία εξέταση. Οι επιδόσεις τους είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ξέρουμε ότι αυτές των φοιτητών της ομάδας A ακολουθούν κοινή κατανομή με μεση τιμή 9 και διασπορά 1/6 ενώ για την ομάδα B η μέση τιμή είναι 8.5 και η διασπορά είναι 1/3. Έστω M_A, M_B οι μέσοι όροι των δύο ομάδων. Να βρεθεί η πιθανότητα να έχουμε $M_A - M_B \in [0.5, 0.65]$. Δίνονται $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9773$, $\Phi(3) = 0.9987$.

[Προσοχή. Η εξέταση δεν έχει συμβεί ακόμα. Οι επιδόσεις των φοιτητών καθώς και τα M_A, M_B είναι τυχαίες μεταβλητές. Μετά την εξέταση, θα πάρουν συγκεκριμένες τιμές και δεν θα υπάρχει καμία αβεβαιότητα/τυχαιότητα. Το πιο πάνω ερώτημα για το $M_A - M_B$ το κάνουμε πριν γίνει η εξέταση.]

11.16. Συμμετέχουμε σε ένα παιχνίδι σε κάθε γύρο του οποίου κερδίζουμε το ποσό 1 ευρώ με πιθανότητα 3/5 και χάνουμε το ποσό 1 ευρώ με πιθανότητα 2/5 (το παιχνίδι είναι υπέρ μας). Το αποτέλεσμα κάθε γύρου είναι ανεξάρτητο από τα αποτελέσματα όλων των προηγούμενων.

Προσδιορίστε τις τιμές του $n \geq 30$ ώστε η πιθανότητα μετά από n γύρους του παιχνιδιού να κερδίζουμε λιγότερα από 2 ευρώ να είναι μικρότερη από 0.1. [Δίνεται ότι $\Phi(-1.282) = 0.1$]

11.17. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{n/2} \frac{2^n}{(n-1)!}\, t^{n-1} e^{-2t}\, dt = \frac{1}{2}.$$

Απαντήσεις §1

1.1. (α) Η πιθανότητα είναι
$$\frac{n(n-1)^{r-1}}{n^r}.$$
Το πείραμα που εξετάζουμε είναι οι πρώτες r διαδόσεις. Για τις δυνατές επιλογές, σε κάθε μία από τις r διαδόσεις, το άτομο έχει n επιλογές. Για τις ευνοϊκές επιλογές, το πρώτο άτομο έχει n επιλογές, ενώ καθένα από τα επόμενα $r-1$ άτομα έχει $n-1$ επιλογές γιατί από τους $n+1$ κατοίκους της πόλης, το άτομο δεν μπορεί να κάνει την διάδοση στον εαυτό του ούτε στο άτομο που την ξεκίνησε ($n-1 = n+1-2$).

(β) Για αυτό το ενδεχόμενο το πλήθος των δυνατών επιλογών είναι πάλι n^r (είμαστε στο ίδιο πείραμα, στον ίδιο δειγματικό χώρο όπως στο προηγούμενο ερώτημα), ενώ το πλήθος των ευνοϊκών επιλογών είναι $(n)_r$. Γιατί κάθε διάδοση στην οποία δεν έχουμε επαναλήψεις αντιστοιχεί σε μία διάταξη των n ατόμων[8] ανά r (και απλοϊκά: Ο πρώτος ψιθυριστής έχει n επιλογές, ο δεύτερος $n-1$, κλπ). Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι
$$\frac{(n)_r}{n^r}.$$

1.2. (α) $25/6^3$. (β) $27/6^3$. Μετράμε τις κατάλληλες διατεταγμένες τριάδες.

1.3. (α)
$$\Omega := \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} = \{1, 2, \ldots, n\}^k.$$
Ο αριθμός a_i λέει σε ποια στάση κατεβαίνει ο φοιτητής i. Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από διατεταγμένες k-αδες γιατί οι φοιτητές είναι διαφορετικά αντικείμενα.

(β) $N(\Omega) = n^k$.

(γ) Έστω A το ενδεχόμενο σε μία τουλάχιστον στάση να αποβιβαστούν τουλάχιστον δύο φοιτητές (δηλαδή A είναι το σύνολο των k-αδων που ανήκουν στο Ω και στις οποίες τουλάχιστον δύο απο τις συντεταγμένες τους είναι ίδιες, π.χ., $a_2 = a_5$). Τότε $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{(n)_k}{n^k}$.

1.4. Έστω A το ενδεχόμενο στην ερώτηση. Τότε
$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{365 \times (364)^{k-1}}{(365)^k} = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{k-1}.$$
Αυτό γιατί, κατά τον υπολογισμό της $P(A^c)$, στα ευνοϊκά αποτελέσματα, ο a_1 έχει 365 επιλογές, και για κάθε επιλογή του, καθένας από τους υπόλοιπους $k-1$ μαθητές έχει 364 επιλογές.

1.5. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι
$$\frac{5!\,6!4!3!7!10!}{30!}.$$
Το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων είναι 30!. Για να παραγάγουμε μια ευνοϊκή τοποθέτηση αποφασίζουμε πρώτα τη σειρά με την οποια θα μπούν οι 5 ομάδες βιβλίων. Έχουμε 5! τρόπους για αυτό, π.χ., τοποθετούμε από αριστερά προς τα δεξιά στο ράφι Φυσική, Μαθηματικά, Ιστορία, Ξένες γλώσσες, Λεξικά. Έπειτα, μέσα στην ομάδα των βιβλίων μαθηματικών έχουμε 6! τρόπους να τα τοποθετήσουμε, ανάλογος υπολογισμός ισχύει και για τις υπόλοιπες ομάδες βιβλίων. Έτσι προκύπτει με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή ο αριθμητής του πιο πάνω κλάσματος.

1.6. Τα γράμματα H, I, O, S μένουν ίδια είτε τα τοποθετήσει σωστά είτε ανάποδα, ενώ τα U, A όχι. Το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων είναι $7! \cdot 2^7$ (τοποθετούμε τα γράμματα σε σειρά με 7! τρόπους και μετά βάζουμε το καθένα σωστά ή ανάποδα με 2 τρόπους). Για να είναι σωστή η λέξη OHIO στην 1η σειρά υπάρχουν $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ ευνοϊκές περιπτώσεις (δύο επιλογές για το ποιο O θα βάλουμε πρώτο και μετά δύο επιλογές για τον προσανατολισμό κάθε γράμματος). Τα U, S, A μπορούν να μπουν με $3! \cdot 2^3$ τρόπους (όπως να 'ναι) στη 2η σειρά. Άρα οι ευνοϊκες

[8] Εξαιρούμε αυτόν που αρχίζει την διάδοση

είναι $2^5 \cdot 3! \cdot 2^3 = 3! \cdot 2^8$. Όμοια, το πλήθος των τοποθετήσεων που η δεύτερη λέξη είναι σωστή είναι $2^4 \cdot 4! \cdot 2$. Έτσι οι ζητούμενες πιθανότητες είναι (α) $(2^8 \cdot 3!)/(2^7 \cdot 7!) = 1/420$ και (β) $(2^5 \cdot 4!)/(2^7 \cdot 7!) = 1/840$.

1.7. Η θέση του νομίσματος καθορίζεται με την επιλογή ενός τυχαίου σημείου σε ένα συγκεκριμένο τετράγωνο της σκακιέρας (σε αυτό το σημείο τοποθετείται το κέντρο του νομίσματος). Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega := \{(x, y) :\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a\}$. Το νόμισμα πέφτει εξολοκλήρου μέσα στο τετράγωνο αν το κέντρο του πέσει σε απόσταση μεγαλύτερη από $d/2$ από τις πλευρές του τετραγώνου, δηλαδή το ευνοϊκό ενδεχόμενο αντιστοιχεί στο τετράγωνο

$$A := \{(x, y) \in \Omega : \frac{d}{2} < x < a - \frac{d}{2},\ \frac{d}{2} < y < a - \frac{d}{2}\}$$

με εμβαδό $E(A) = (a - d)^2$ ενώ το εμβαδό του Ω είναι $E(\Omega) = a^2$. Επομένως η πιθανότητα νίκης στο παιχνίδι είναι $\dfrac{E(A)}{E(\Omega)} = \dfrac{(a-d)^2}{a^2}$.

1.8. Το πρόβλημα αντιστοιχεί στην τυχαία επιλογή σημείου σε τετράγωνο πλευράς 1. Η τετμημένη του σημείου αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή που επέλεξε ο ένας φίλος και η τεταγμένη στην επιλογή του άλλου. Ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο $\Omega = \{(x, y) :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ ενώ το ενδεχόμενο κανείς να μην «στήσει» τον άλλο πάνω από 10 λεπτά (δηλαδή $1/6$ της ώρας) αντιστοιχεί στο σύνολο $A = \{(x, y) \in \Omega : |x - y| \le 1/6\}$. Το εμβαδό του A είναι $E(A) = 1 - (5/6)^2 = 0,3056$ ενώ $E(\Omega) = 1$. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\dfrac{E(A)}{E(\Omega)} = 0,3056$

1.9. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι πρώτα επιλέγουμε το Α και η μια κορυφή του ισόπλευρου τριγώνου είναι στο Α (αν χρειαστεί, περιστρέφουμε το τρίγωνο μέσα στον κύκλο). Ας ονομάσουμε Γ, Δ τις δύο άλλες κορυφές του τριγώνου. Η χορδή ΑΒ θα είναι μεγαλύτερη από την πλευρά ΓΔ αν και μόνο αν το σημείο Β επιλεγεί στο τόξο $120°$ μεταξύ των Γ, Δ. Άρα, αν ονομάσουμε r την ακτίνα του κύκλου, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\text{μήκος τόξου ΓΔ}}{\text{μήκος περιφέρειας κύκλου}} = \frac{(1/3)2\pi r}{2\pi r} = \frac{1}{3}.$$

Σχόλιο: Ως συνέχεια αυτής της άσκησης, διαβάστε στο Wikipedia για το παράδοξο του Bertrand. Αν η τυχαία χορδή ΑΒ επιλέγεται με άλλο τρόπο, η πιθανότητα να έχει μήκος μεγαλύτερο από την ΓΔ παίρνει άλλες τιμές.

1.10. Είναι πιο βολικό να κοιτάξουμε τη μοιρασιά μόνο μέχρι το r βήμα. Και τα δύο ενδεχόμενα αφορούν κάτι που εξαρτάται μόνο από τα βήματα $1, 2, \dots r$.

(α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{(n-1)_{r-1} \times 1}{(n)_r} = \frac{1}{n}.$$

Κάθε μοίρασμα κομματιών στα πρώτα r άτομα είναι μία διάταξη των n κομματιών ανά r. Έτσι προκύπτει ο παρονομαστής. Ένα μοίρασμα που δίνει σε καθένα από τα πρώτα $r - 1$ άτομα ένα κομμάτι που δεν έχει το νόμισμα είναι μία διάταξη των $n - 1$ κομματιών που δεν έχουν νόμισμα ανά $r - 1$. Έπειτα για το r κομμάτι που δίνεται, υπάρχει μόνο μία ευνοϊκή δυνατότητα. Έτσι προκύπτει ο αριθμητής.

Καλό είναι να δει κανείς αυτούς τους υπολογισμούς και εξ΄ αρχής, χωρίς επίκληση του τύπου των διατάξεων, δηλαδή με απόδειξη του στο συγκεκριμένο σενάριο.

(β)Τώρα τα ευνοϊκά μοιράσματα είναι εκείνα στα οποία τα πρώτα κομμάτια δεν περιέχουν αυτό με το νόμισμα. Βρίσκουμε όπως πριν την πιθανότητα $(n-1)_r/(n)_r = (n-r)/n$.

1.11. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{(r)_{n-1}(n-1)}{r^n}.$$

Γιατί κάθε βώλο έχουμε r επιλογές (σε πιό δοχείο θα πάει), έτσι το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων είναι r^n. Για την κατασκευή μιας ευνοϊκής τοποθέτησης έχουμε κατ΄ αρχάς μία διάταξη των r δοχείων ανά $n-1$ που αντιστοιχεί στην τοποθέτηση των πρώτων βώλων σε διαφορετικά δοχεία. Έπειτα, ο n-οστος βώλος έχει $n-1$ επιλογές, γιατί πρέπει να πάει σε ένα ήδη κατειλημμένο δοχείο, και υπάρχουν $n-1$ τέτοια.

Επίσης θα μπορούσαμε να κάνουμε τον τελευταίο υπολογισμό απο την αρχή. Ο πρώτος βώλος έχει r επιλογές, ο δεύτερος $r-1$, ..., ο $n-1$ έχει $r-(n-2)=r-n+2$. Ο τελευταίος, $n-1$ επιλογές. Η πολλαπλασιαστικη αρχή δίνει $r(r-1)\cdots(r-n+2)(n-1)$, το οποίο ισούται με $(r)_{n-1}(n-1)$.

Σημείωση: Αν $n \geq r+2$, τότε ξέρουμε εκ των προτέρων ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι 0. Αυτό δίνει και ο τύπος που βρήκαμε.

1.12. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{100}{10}\binom{200}{90}}{\binom{300}{100}}.$$

Ως δειγματικό χώρο Ω παίρνουμε τα υποσύνολα του $\{1,2,...,300\}$ με 100 στοιχεία (τα στοιχεία του Ω είναι ισοπίθανα). Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων, δηλαδή το $N(\Omega)$, ισούται με τον παρονομαστή του πιο πάνω κλάσματος. Ένα ευνοϊκό αποτέλεσμα είναι ένα σύνολο με 10 άσπρα και 90 μαύρα σφαιρίδια. Για να το φτιάξουμε πρέπει να επιλέξουμε 10 μαύρα σφαιρίδια και 90 άσπρα. Για την επιλογή των πρώτων έχουμε $\binom{100}{10}$ επιλογές ενώ για την επιλογή των δεύτερων έχουμε $\binom{200}{90}$ επιλογές. Έπειτα εφαρμόζουμε την πολλαπλασιαστική αρχή και προκύπτει ο αριθμητής του κλάσματος.

1.13. (α), (β). Τα πρώτα δύο ερωτήματα λύνονται όπως στην προηγούμενη άσκηση και δίνουν τις απαντήσεις

$$\frac{\binom{945}{3}\binom{55}{12}}{\binom{1000}{15}} \quad \text{και} \quad \frac{\binom{25}{2}\binom{30}{3}\binom{945}{10}}{\binom{1000}{15}}$$

αντίστοιχα.

(γ) Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\binom{945}{4}\left\{\binom{55}{11}-\binom{30}{11}-\binom{25}{1}\binom{30}{10}\right\}}{\binom{1000}{15}}.$$

Στον αριθμητή θέλουμε να μετρήσουμε το πλήθος των υποσυνόλων των 1000 σφαιριδίων με 15 στοιχεία που περιέχουν ακριβώς 4 κόκκινα και τουλάχιστον δύο μαύρα σφαιρίδια. Για την επιλογή των κόκκινων σφαιριδίων έχουμε $\binom{945}{4}$ επιλογές. Τα υπόλοιπα 11 σφαιρίδια πρέπει να επιλεγούν από το σύνολο S των 55 μη κόκκινων σφαιριδίων (25 μαύρα, 30 άσπρα). Έστω $N(k)$ το πλήθος των υποσυνόλων του S με k μαύρα και $11-k$ άσπρα σφαιρίδια. Ο αριθμός υποσυνόλων του S καθένα από τα οποία έχει 11 στοιχεία από τα οποία τουλάχιστον 2 είναι μαύρα ισούται με

$$\binom{55}{11}-N(0)-N(1)=\binom{55}{11}-\binom{30}{11}-\binom{25}{1}\binom{30}{10}.$$

Δηλαδη από τον αριθμό όλων των υποσυνόλων του S με 11 στοιχεία αφαιρούμε το πλήθος αυτών που δεν έχουν την επιθυμητή σύσταση.

1.14. α) Παίρνουμε ως πείραμα τύχης την επιλογή της ομάδας που θα αγωνιστεί στον 1ο γύρο με τον Παναθηναϊκό. Ο αντίστοιχος δειγματικός χώρος είναι τότε το σύνολο των 15 ομάδων πλην του Παναθηναϊκού και τα στοιχεία είναι προφανώς ισοπίθανα. Επομένως η πιθανότητα να αναμετρηθεί ο Παναθηναϊκός με τον Ολυμπιακό στον 1ο γύρο είναι 1/15. Εναλλακτικά (πιο περίπλοκα) θα μπορούσε να θεωρηθεί ως πείραμα τύχης η συνολική κλήρωση στον 1ο γύρο. Τότε ο αντίστοιχος δειγματικός χώρος είναι το σύνολο των διαιρέσεων των 16 ομάδων σε 8 2-σύνολα, ενώ το ενδεχόμενο να συναντηθούν ο Παναθηναϊκός με τον Ολυμπιακό στον 1ο γύρο, αντιστοιχεί στο σύνολο των διαιρέσεων των 16 ομάδων σε 8 2-σύνολα εκ των οποίων το ένα 2-σύνολο είναι το {Ολυμπιακός -Παναθηναϊκός }. Άρα οι δυνατές περιπτώσεις είναι συνολικά

$$\binom{16}{2}\binom{14}{2}\cdots\binom{2}{2} = \frac{16!}{(2!)^8}.$$

(Χρησιμοποιούμε την πολλαπλασιαστική αρχή. Στο πρώτο στάδιο επιλέγουμε 2 ομάδες από τις 16 για τον 1ο αγώνα με $\binom{16}{2}$ τρόπους, στο 2ο στάδιο 2 ομάδες από τις υπόλοιπες 14 για το 2ο αγώνα κοκ). Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι συνολικά

$$8\cdot\binom{14}{2}\binom{12}{2}\cdots\binom{2}{2} = \frac{14!}{(2!)^7}\cdot 8.$$

(Χρησιμοποιούμε την πολλαπλασιαστική αρχή. Στο 1ο στάδιο επιλέγουμε ποιος αγώνας από τους 8 του πρώτου γύρου θα είναι ο μεταξύ Ολυμπιακού και Παναθηναϊκού. Μετά, για τις υπόλοιπες 14 ομάδες, δουλεύουμε όπως για τις δυνατές περιπτώσεις.) Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{8\cdot\frac{14!}{(2!)^7}}{\frac{16!}{(2!)^8}} = \frac{1}{15}.$$

β) Οποιοδήποτε ζεύγος ομάδων είναι εξίσου πιθανό να φτάσει στον τελικό. Επομένως θεωρούμε ως δειγματικό χώρο το σύνολο των ζευγών ομάδων που έχει $\binom{16}{2} = (16\cdot 15)/2 = 120$ στοιχεία. Άρα η πιθανότητα ο Παναθηναϊκός με τον Ολυμπιακό να αναμετρηθούν στον τελικό είναι $1/120$. Εναλλακτικά, η πιθανότητα ο Παναθηναϊκός να φτάσει στο τελικό είναι $(1/2)^3 = 1/8$ (να νικήσει σε 3 αγώνες νοκ-αουτ). Δεδομένου ότι έχει φτάσει στον τελικό οποιοσδήποτε αντίπαλος είναι εξίσου πιθανός με πιθανότητα $1/15$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $(1/8)\cdot(1/15) = 1/120$.

1.15. Ο δειγματικός χώρος είναι το πλήθος των υποσυνόλων του $\{1, 2, \dots, 2n\}$ με n στοιχεία. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

Ο παρονομαστής είναι η πληθικότητα του δειγματικού χώρου. Έπειτα, για την κατασκευή ενός ευνοϊκού υποσυνόλου (n στοιχείων) πρέπει από κάθε ζευγάρι να επιλέξουμε ένα άτομο. Για κάθε ζευγάρι έχουμε 2 επιλογές, έτσι από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει το 2^n στον αριθμητή.

1.16. (α) Με σκεπτικό όπως στις ασκήσεις 1.12, 1.13 πιο πάνω, βρίσκουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\binom{n}{j}\binom{n}{k-j}}{\binom{2n}{k}}.$$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\binom{n}{k}2^k}{\binom{2n}{k}}.$$

Για ένα ευνοϊκό υποσύνολο, επιλέγουμε πρώτα k ζευγάρια, έπειτα από κάθε ζευγάρι επιλέγουμε ένα από τα μέλη του. Αυτή η διαδικασία παράγει $\binom{n}{k}2^k$ υποσύνολα, που είναι ακριβώς τα ευνοικά υποσύνολα.

1.17. Το πλήθος των δυνατών κατανομών είναι 4^{13}. Για να φτιάξουμε μία ευνοϊκή κατανομή επιλέγουμε πρώτα τους 3 φοιτητές που θα αποβιβαστούν στην πρώτη στάση, αυτό γίνεται με $\binom{13}{3}$ τρόπους . Έπειτα επιλέγουμε τους 4 φοιτητές που θα αποβιβαστούν στη δεύτερη στάση, αυτό γίνεται με $\binom{10}{4}$ τρόπους (γιατί ήδη τρείς έχουν φύγει για την πρώτη στάση και έχουν μείνει 10).

Επιλέγουμε τους 4 φοιτητές που θα αποβιβαστούν στην τρίτη στάση, αυτό γίνεται με $\binom{6}{4}$ τρόπους. Τέλος, επιλέγουμε τους 2 φοιτητές που θα αποβιβαστούν στην τέταρτη στάση, αυτό γίνεται με $\binom{2}{2} = 1$ τρόπους. Με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των ευνοϊκών τρόπων είναι

$$\binom{13}{3}\binom{10}{4}\binom{6}{4}\binom{2}{2} = \frac{13!}{3!10!}\frac{10!}{4!6!}\frac{6!}{4!2!}\frac{2!}{2!0!} = \frac{13!}{3!4!4!2!}.$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{1}{4^{13}}\frac{13!}{3!4!4!2!}.$$

Η γενική περίπτωση αυτής της άσκησης είναι η Άσκηση 1.33 πιό κάτω.

1.18. Το πλήθος των δυνατών αποβιβάσεων είναι n^k. Όλες οι ευνοϊκές αποβιβάσεις φτιάχνονται ως εξής. Επιλέγουμε πρώτα το ποια στάση θα έχει τους 3 φοιτητές (n επιλογές), επιλέγουμε τους 3 φοιτητές που αποβιβάζονται εκεί ($\binom{k}{3}$ επιλογές), αφήνουμε καθέναν από τους υπόλοιπους $k-3$ φοιτητές να επιλέξει τη στάση που θα αποβιβαστεί, αλλά δεν επιτρέπονται επαναλήψεις ($(n-1)_{k-3}$ επιλογές). Με αυτή τη διαδικασία παίρνουμε όλες τις ευνοϊκές αποβιβάσεις, και καμία τους δεν προκύπτει πάνω από μία φορά. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{n\binom{k}{3}(n-1)_{k-3}}{n^k}.$$

1.19. (α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{60}{5}}{(60)_5} = \frac{1}{5!}.$$

Ένα δυνατό αποτέλεσμα $(k_1, k_2, \ldots, k_5)$ είναι ακριβώς μια διάταξη των 60 ανά 5. Έτσι προκύπτει ο παρονομαστής. Σε ένα ευνοϊκό αποτέλεσμα, δηλαδή μια πεντάδα $(k_1, k_2, \ldots, k_5)$ με $k_1 < k_2 < \cdots < k_5$ αντιστοιχούμε το υποσύνολο $\{k_1, k_2, \ldots, k_5\}$ του $\{1, 2, \ldots, 60\}$ με 5 στοιχεία. Αυτή η αντιστοίχιση είναι 1-1 και επί (αν μας δώσουν ένα υποσύνολο με 5 στοιχεία, τότε βρίσκουμε τη διατεταγμένη εξάδα που το παρήγαγε βάζοντας στη σειρά τα 5 δοσμένα στοιχεία).

(β) Από κάθε ευνοϊκή περίπτωση $(k_1, k_2, \ldots, k_5)$ του (α) παράγονται 4! της περίπτωσης μας. Όσες και οι μεταθέσεις των (k_1, k_2, k_3, k_4) γιατί η διάταξη των πρώτων τεσσάρων αποτελεσμάτων δεν μας ενδιαφέρει. Έχουμε βέβαια εξεσφαλίσει ότι και τα τέσσερα είναι μικρότερα από το k_5. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{60}{5}4!}{(60)_5} = \frac{1}{5}.$$

Τα (α), (β) αποδεικνύονται επίσης και με ένα επιχείρημα συμμετρίας.

1.20. Επειδή το $A \cap B$ περιέχεται και στο A και στο B, έπεται ότι η πιθανότητά του μπορεί να είναι το πολύ $\min\{P(A), P(B)\} = 0.6$ Για το κάτω φράγμα, το μεγαλύτερο κομμάτι του A που μπορεί να είναι εκτός B είναι $1 - P(B)$, το υπόλοιπο $P(A) - (1 - P(B)) = P(A) + P(B) - 1 = 0.5$ περιέχεται στο B. Αυτή είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η $P(A \cap B)$ [τυπική απόδειξη στο (β)]. Για την κατασκευή παραδειγμάτων που οι ακραίες τιμές πιάνονται, παίρνουμε $\Omega = [0.1]$ και P να δίνει το μήκος κάθε υποσυνόλου του Ω. Για τη μέγιστη τιμή παίρνουμε $A = [0, 0.6], B = [0, 0.9]$ ενώ για την ελάχιστη παίρνουμε $A = [0, 0.6], B = [0.1, 1]$.

(β) Η ζητούμενη γράφεται $P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$, που ισχύει γιατί το αριστερό μέλος ισούται με $P(A \cup B)$, το οποίο είναι ≤ 1 ως πιθανότητα.

1.21. Έστω $X =$ πλήθος εμφανίσεων του 6 στις n ρίψεις[9]. Έχουμε

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{5^n}{6^n} - \frac{n \cdot 1 \cdot 5^{n-1}}{6^n}.$$

[9] Θα δούμε αργότερα ότι ο τυχαίος αριθμός X είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και $p = 1/6$.

Ο τελευταίος όρος προκύπτει γιατί έχουμε n επιλογές για τη ρίψη κατά την οποία θα εμφανιστεί η μοναδική ένδειξη 6. Για εκείνη τη ρίψη υπάρχει μόνο μία επιλογή για το αποτέλεσμα (πρέπει να ρθει 6), ενώ για κάθε μία από τις υπόλοιπες $n-1$ ρίψεις υπάρχουν 5 επιλογές.

(β) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{δεν εμφανίζεται καθόλου ο αριθμός } 1\}, \\ B &:= \{\text{εμφανίζεται τουλάχιστον 2 φορές ο αριθμός } 6\} = \{X \geq 2\}. \end{aligned}$$

Τότε

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c)$$

με $P(A) = (5/6)^n$ και

$$P(A \cap B^c) = P(A \cap \{X < 2\}) = P(A \cap \{X = 0\}) + P(A \cap \{X = 1\}) = \frac{4^n}{6^n} + \frac{n \cdot 1 \cdot 4^{n-1}}{6^n}.$$

Ο τελευταίος όρος προκύπτει γιατί έχουμε n επιλογές για τη ρίψη κατά την οποία θα εμφανιστεί η μοναδική ένδειξη 6. Για εκείνη τη ρίψη υπάρχει μόνο μία επιλογή για το αποτέλεσμα (πρέπει να ρθει 6) ενώ για κάθε μία από τις υπόλοιπες $n-1$ ρίψεις υπάρχουν 4 επιλογές (απαγορεύεται το 1 και το 6).

1.22. (α) Θέτουμε $A_k := \{\text{όλες οι } n \text{ ενδείξεις είναι} \leq k\}$. Ζητάμε την πιθανότητα του $A_k \backslash A_{k-1}$. Επειδή $A_{k-1} \subset A_k$, βρίσκουμε κατά τα γνωστά

$$P(A_k \backslash A_{k-1}) = P(A_k) - P(A_{k-1}) = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n.$$

Για το υπολογισμό του A_k, παρατηρούμε ότι καθένα από τα n ζάρια έχει 6 επιλογές (και έτσι προκύπτει ο παρονομαστής 6^n) και k ευνοϊκές επιλογές, τις $\{1, 2, \dots, k\}$.

(β) Θέτουμε $B_k := \{\text{όλες οι } n \text{ ενδείξεις είναι} \geq k\}$. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $B_k \backslash B_{k+1}$. Επειδή $P(B_k) = ((7-k)/6)^n$ για κάθε $k \in \{1, \dots, 6\}$, βρίσκουμε $P(B_k \backslash B_{k+1}) = ((7-k)/6)^n - ((6-k)/6)^n$.

1.23. (α) Θεωρούμε το ενδεχόμενο $A := \{\text{ο λαχνός 1 επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά}\}$. Τότε

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{(n-1)^k}{n^k}.$$

Για τον υπολογισμό του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων στο ενδεχόμενο A^c, παρατηρούμε ότι έχουμε k εξαγωγές και σε καθεμία από αυτές έχουμε $n-1$ επιλογές (ο λαχνός 1 απαγορεύεται). Έτσι προκύπτει ο αριθμητής $(n-1)^k$.

(β) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A_i := \{\text{ο λαχνός } i \text{ επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά}\}$, $i = 1, 2, 3$. Τότε $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - P((A_1 \cap A_2 \cap A_3)^c) = 1 - P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c)$ και η τελευταία πιθανότητα, με βάση την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, ισούται με

$$\begin{aligned} P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c) &= P(A_1^c) + P(A_2^c) + P(A_3^c) - P(A_1^c \cap A_2^c) - P(A_2^c \cap A_3^c) - P(A_1^c \cap A_3^c) \\ &\quad + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 3\frac{(n-1)^k}{n^k} - 3\frac{(n-2)^k}{n^k} + \frac{(n-3)^k}{n^k}. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό π.χ. της $P(A_1^c \cap A_3^c)$, τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι οι διατεταγμένες k-αδες (με τις επαναλήψεις να επιτρέπονται) από το $\{1, 2, ..., n\}$ που δεν περιέχουν τους λαχνούς 1 και 3. Το πλήθος αυτών των k-αδων είναι $(n-2)^k$.

1.24. Όχι είναι λάθος.

1ος τρόπος. Το συμπληρωματικό ενδεχόμενο είναι και τα τρία ζάρια να φέρουν αριθμό διαφορετικό από αυτόν που έχει επιλέξει ο παίκτης. Αυτό το ενδεχόμενο έχει πιθανότητα $(5/6)^3$. Άρα η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης είναι $1 - (5/6)^3 \simeq 0.4213$ που είναι γνήσια μικρότερη του $1/2$.

2ος τρόπος. Η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης είναι $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ όπου A_i είναι το ενδεχόμενο το ζάρι i να φέρει τον αριθμό που στοιχημάτισε ο παίκτης. Τότε

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-\{P(A_1 \cap A_2)+P(A_1 \cap A_3)+P(A_2 \cap A_3)\}+P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Υπολογίζουμε $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/6$, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = 1/6^2$, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/6^3$, οπότε

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3 \cdot \frac{1}{6} - 3 \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{216} \simeq 0.4213$$

Το καζίνο υποβάλλει την ιδέα ότι $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$, που είναι λάθος, αφού τα ενδεχόμενα δεν είναι ανα δύο ασυμβίβαστα.

1.25. Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού. (α) Έστω

$$\begin{aligned} A_3 &:= \{i \in \{1, 2, \ldots, 1050\} : \text{ το } i \text{ διαιρείται με το } 3\}, \\ A_5 &:= \{i \in \{1, 2, \ldots, 1050\} : \text{ το } i \text{ διαιρείται με το } 5\}. \end{aligned}$$

Τότε

$$P(A_3 \cup A_5) = P(A_3) + P(A_5) - P(A_3 \cap A_5) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}.$$

Για τον υπολογισμό π.χ. της $P(A_3 \cap A_5)$. Το $A_3 \cap A_5$ περιέχει τους αριθμούς στο $\{1, 2, \ldots, 1050\}$ που διαιρούνται και με το 3 και με το 5, ισοδύναμα, αυτούς που διαιρούνται με το 15. Το πλήθος τους είναι 70=[1050/15] (ακέραιο μέρος). Άρα $P(A_3 \cap A_5) = 70/1050 = 1/15$ καθότι η επιλογή είναι ομοιόμορφη (όλοι οι ακέραιοι στο $\{1, 2, \ldots, 1050\}$ είναι ισοπίθανοι).

(β) Ορίζουμε επιπλέον

$$A_7 := \{i \in \{1, 2, \ldots, 1050\} : \text{ το } i \text{ διαιρείται με το } 7\}.$$

Ζητάμε την πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(A_3 \cup A_5 \cup A_7) &= P(A_3) + P(A_5) + P(A_7) - P(A_3 \cap A_5) - P(A_5 \cap A_7) - P(A_3 \cap A_7) \\ &+ P(A_3 \cap A_5 \cap A_7) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{15} - \frac{1}{21} - \frac{1}{35} + \frac{1}{105} = \frac{57}{105}. \end{aligned}$$

1.26. Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού. Για $i = 1, 2, \ldots, 6$, θέτουμε

$$A_i = \{\text{εμφανίζεται η διπλή ζαριά } (i, i) \text{ σε κάποια από τις } n \text{ δοκιμές}\}.$$

Ζητάμε την πιθανότητα

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6) = 1 - P(A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_6^c).$$

Με βάση την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού,

$$P(A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_6^c) = \sum_{k=1}^{6} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le 6} P(A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap \ldots \cap A_{i_k}^c).$$

Για κάθε k δείκτες $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ απο το $\{1, 2, \ldots, 6\}$, έχουμε $P(A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap \ldots \cap A_{i_k}^c) = (\frac{36-k}{36})^n$ γιατί από τα 36 αποτελέσματα μιας ρίψης των δύο ζαριών απογορεύονται οι k διπλές $(i_1, i_1), \ldots, (i_k, i_k)$. Επίσης, υπάρχουν $\binom{6}{k}$ επιλογές k τέτοιων δεικτών. Οπότε

$$P(A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_6^c) = \sum_{k=1}^{6} (-1)^{k-1} \binom{6}{k} \left(1 - \frac{k}{36}\right)^n$$

και η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_6) = \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} \left(1 - \frac{k}{36}\right)^n$.

1.27. Ένα αποτέλεσμα του συγκεκριμένου πειράματος τύχης περιγράφεται από μια διατεταγμένη 15-άδα $(z_1, z_1, ..., z_{15})$ με $z_r \in \{1, 2, 3, 4\}$ για $r = 1, 2, ..., 15$ όπου το z_r δείχνει την επιλογή ξενοδοχείου του τουρίστα r. Άρα ο δειγματικός χώρος έχει N(Ω)=4^{15} στοιχεία και προφανώς είναι όλα ισοπίθανα. Έστω A_i το ενδεχόμενο να μην επιλεγει από κανέναν το i ξενοδοχείο. Τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{k-1} S_{4,k}$$

(αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού) όπου $S_{4,k}$ είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των τομών των A_i ανά k (συνολικά $\binom{4}{k}$ προσθεταίοι). Είναι

$$P(A_i) = \frac{N(\{(z_1, ..., z_{15}) : z_r \in \{1,2,3,4\} \backslash \{i\}, r = 1, 1, 2, ..., 15\})}{N(\Omega)} = \frac{(4-1)^{15}}{4^{15}},$$

για $i = 1, 2, 3, 4$. Όμοια, $P(A_i \cap A_j) = (4-2)^{15}/4^{15}$ για κάθε $i, j = 1, 2, 3, 4$ με $i \neq j$ κλπ. Τελικά, $P = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{k-1} \binom{4}{k} (\frac{4-k}{4})^{15} \simeq 0.0533$

1.28. Ως δειγματικό χώρο παίρνουμε το σύνολο όλων των υποσυνόλων των 52 φύλλων με πληθικότητα 13. Όλα αυτά τα υποσύνολα είναι ισοπίθανα. Για $i = 1, 2, 3, 4$, έστω A_i το ενδεχόμενο ότι το χέρι του παίκτη δεν έχει φύλλα από το χρώμα i. Τότε

$$\begin{aligned}
P(A_i) &= \frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}}, \text{ για } i = 1, 2, 3, 4, \\
P(A_i \cap A_j) &= \frac{\binom{26}{13}}{\binom{52}{13}}, \text{ για } i, j = 1, 2, 3, 4 \text{ με } i \neq j, \\
P(A_i \cap A_j \cap A_k) &= \frac{\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}}, \text{ για } i, j, k = 1, 2, 3, 4 \text{ διαφορετικά μεταξύ τους}, \\
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= 0.
\end{aligned}$$

Άρα από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \binom{4}{k} \frac{\binom{52-13k}{13}}{\binom{52}{13}} \simeq 0.051$$

1.29. Έστω A_i το ενδεχόμενο το χέρι του συγκεκριμένου παίκτη να περιέχει και τα 4 χρώματα του είδους i, με $i = 1, 2, ..., 13$ $(A, 2, ..., 10, K, Q, J)$. Η ζητούμενη πιθανότητα βρίσκεται με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού και είναι

$$P = P(\cup_{i=1}^{13} A_i) = \sum_{k=1}^{13} (-1)^{k-1} S_{13,k}$$

όπου $S_{13,k}$ είναι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων των τομών των A_i ανά k (συνολικά $\binom{13}{k}$ προσθεταίοι). Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
P(A_i) &= \frac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} \text{ για } i = 1, 2, ..., 13, \\
P(A_i \cap A_j) &= \frac{\binom{44}{5}}{\binom{52}{13}} \text{ για } i, j = 1, 2, ..., 13 \text{ με } i \neq j, \\
P(A_i \cap A_j \cap A_k) &= \frac{\binom{40}{1}}{\binom{52}{13}} \text{ για } i, j, k = 1, 2, ..., 13 \text{ διαφορετικά μεταξύ τους}. \\
P(\cap_{i \in I} A_i) &= 0 \qquad \text{για } I \subseteq \{1, 2, ..., 13\} \text{ με } |I| \geq 4.
\end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$P=\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}\binom{13}{k}\binom{52-4k}{13-4k}\Big/\binom{52}{13}=\frac{\binom{13}{1}\binom{48}{9}-\binom{13}{2}\binom{44}{5}+\binom{13}{3}\binom{40}{1}}{\binom{52}{13}}.$$

1.30. Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού. Για $i=1,\dots,n$, θέτουμε

$$A_i=\{\text{η } i \text{ επιστολή τοποθετείται στον φάκελο που της αντιστοιχεί}\}.$$

Ισχύει $P(A_1^c\cap A_2^c\cap\cdots\cap A_n^c)=1-P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$, και

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k})\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

Κάποιες εξηγήσεις. Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ επιλογές δεικτών $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$, μία για κάθε υποσύνολο του $\{1,2,\dots,n\}$ με k στοιχεία. Για μια τέτοια επιλογή, η πιθανότητα $P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots A_{i_k})$ είναι ακριβώς η πιθανότητα σε μια τυχαία κατανομή των επιστολών $\{1,2,\dots,n\}$ να έχουν τοποθετηθεί σωστά οι $i_1,i_2,\dots,i_k$ (δεν ξέρουμε τι έγινε με τις άλλες επιστολές, δεν απαγορεύεται κάποιες από εκείνες να τοποθετήθηκαν σωστά). Το πλήθος των δυνατών κατανομών είναι $n!$ ενώ των ευνοϊκών είναι $(n-k)!$ γιατί οι $i_1,i_2,\dots,i_k$ τοποθετούνται αυτόματα στους σωστούς φακέλους και υπάρχει ελευθερία μόνο στην τοποθέτηση των υπόλοιπων $n-k$.
Τελικά βρίσκουμε

$$P(A_1^c\cap A_2^c\cap\cdots\cap A_n^c)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}.$$

Η τελευταία ποσότητα τείνει στο e^{-1} καθώς $n\to\infty$ (από το ανάπτυγμα της e^x σε δυναμοσειρά).

1.31. (α) Όταν τα σφαιρίδια είναι διακεκριμένα, μια κατανομή τους στα κελιά περιγράφεται πλήρως από το διάνυσμα $D=(r_1,r_2,\dots,r_k)$ όπου r_i είναι το όνομα του κελιού που περιέχει το σφαιρίδιο i.

(i) Σε αυτή την περίπτωση, το διάνυσμα D είναι μια διάταξη των n ανά k με επανάληψη (για την τιμή κάθε r_i έχουμε n επιλογές). Άρα το πλήθος αυτών των διανυσμάτων είναι n^k.

(ii) Τώρα, επειδή κάθε κελί χωράει μόνο ένα σφαιρίδιο, στο διάνυσμα δεν επιτρέπεται να έχουμε επαναλήψεις. Έτσι το D είναι μια διάταξη n των ανά k (χωρίς επανάληψη. Το πρώτο σφαιρίδιο έχει n επιλογές, το δεύτερο $n-1$, κοκ). Το πλήθος αυτών των διανυσμάτων είναι $(n)_k$.

(iii) Έστω S το σύνολο όλων των κατανομών και A_i το σύνολο των κατανομών κατά τις οποίες το i κελί μένει άδειο. Τότε

$$N(A_1^c\cap A_2^c\cdots\cap A_n^c)=N(S)-N(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n)=n^k-N(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n),$$

και η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για τη συνάρτηση πληθικότητας δίνει

$$\begin{aligned}N(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n)&=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_s\le n}N(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_s})\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{s-1}\binom{n}{s}(n-s)^k.\end{aligned}$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι $\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}(n-s)^k$.

(β) Όταν τα σφαιρίδια είναι όμοια, μια κατανομή τους στα κελιά περιγράφεται πλήρως από το διάνυσμα $E=(s_1,s_2,\dots,s_n)$, όπου s_i είναι το πλήθος των σφαιριδίων που περιέχονται στο κελί

i. Ισοδύναμα, περιγράφεται πλήρως από έναν συνδυασμο με επανάληψη που περιέχει s_i φορές το στοιχείο i (δηλαδή πόσες φορές επιλέγουμε το κελί i).

(i) Το πλήθος των κατανομών ισούται με το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των n ανά k, δηλαδή $\binom{n+k-1}{k}$.

(ii) Εδώ ένα κελί μπορεί να επιλεγεί μία ή καμία φορά, άρα μια κατανομή των σφαιριδίων ισοδυναμεί με έναν συνδυασμό χωρίς επανάληψη. Ο συνδυασμός αποτελείται ακριβώς από τα κελιά που έχουν ένα σφαιρίδιο. Επομένως το πλήθος αυτών των κατανομών είναι $\binom{n}{k}$.

(iii) Για να κατασκευάσουμε μια τέτοια κατανομή, ρίχνουμε αρχικά σε κάθε κελί ένα σφαιρίδιο[10]. Αυτό γίνεται με έναν μόνο τρόπο γιατί τα σφαιρίδια είναι όμοια. Και μας μένουν $k - n$ σφαιρίδια να μοιραστούν στα n κελιά. Αυτό γίνεται με $\binom{n+k-n-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n}$ τρόπους (συνδυασμοί των n ανά $k - n$ με επανάληψη). Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι $\binom{k-1}{k-n}$.

1.32. (α), (β). Οι τιμές της f ορίζουν ένα διάνυσμα $(f(1), f(2), \ldots, f(k))$. Αυτό το διάνυσμα είναι στο ερώτημα (α) μια διάταξη με επανάληψη των n ανά k, ενώ στο ερώτημα (β) μια διάταξη χωρίς επανάληψη των n ανά k. Έτσι τα ζητούμενα πλήθη είναι n^k και $(n)_k$ αντίστοιχα.

(γ) Παρατηρούμε ότι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού και τιμών όπως στην εκφώνηση καθορίζεται μονοσήμαντα από την εικόνα της, $\{f(1), f(2), \ldots, f(k)\}$, γιατί το μικρότερο στοιχείο της εικόνας είναι το $f(1)$ το αμέσως μεγαλύτερο το $f(2)$ κ.ο.κ. Σε κάθε τέτοια συνάρτηση αντιστοιχίζουμε την εικόνα της, το οποίο είναι ένα υποσύνολο του $\{1, 2, \ldots, n\}$ με k στοιχεία. Αυτή η αντιστοίχιση είναι 1-1 και επί. Άρα το ζητούμενο πλήθος ισούται με $\binom{n}{k}$.

(δ) Για να ξέρουμε μια αύξουσα συνάρτηση $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ δεν αρκεί να ξέρουμε την εικόνα της γιατί μπορεί μια τιμή να παίρνεται πολλές φορές. Είναι πλήρως καθορισμένη όμως αν ξέρουμε πόσες φορές παίρνει καθεμία από τις τιμές $1, 2, \ldots, n$. Για παράδειγμα αν ξέρουμε ότι παίρνει την τιμή 1 δύο φορές, την τιμή 2 καμία φορά, την τιμή 3 καμία φορά, και την τιμή 4 τρείς φορές, τότε $f(1) = f(2) = 1, f(3) = f(4) = f(5) = 4$, ενώ οι επόμενες τιμές $f(6), f(7)$ κλπ θα είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 5. Επομένως μια αύξουσα συνάρτηση όπως πιο πάνω αντιστοιχεί σε έναν συνδυασμό με επανάληψη των n στοιχείων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ ανά k. Το πόσες φορές περιέχει ο συνδυασμός τον αριθμό i δηλώνει πόσες φορές έχει η f ως τιμή το i. Η αντιστοίχιση είναι 1-1 και επί και άρα το πλήθος των συναρτήσεων που μας απασχολούν είναι $\binom{n+k-1}{k}$.

(ε) Όπως στο προηγούμενο ερώτημα, σε κάθε αύξουσα συνάρτηση αντιστοιχούμε έναν συγκεκριμένο συνδυασμό με επανάληψη. Το να είναι η συνάρτηση επί σημαίνει ότι κάθε στοιχείο από το $\{1, 2, \ldots, n\}$ περιέχεται στον συνδυασμό. Άρα το πλήθος αυτών των συναρτήσεων ισούται με το πλήθος των κατανομών k όμοιων σφαιριδίων σε n κελιά απεριόριστης χωρητικότητας ώστε κάθε κελί να περιέχει τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο. Με βάση το ερώτημα (β)(iii) της προηγούμενης άσκησης, το πλήθος αυτών των κατανομών ισούται με $\binom{k-1}{k-n}$.

(ζ) Μία συνάρτηση επί αντιστοιχεί σε μία κατανομή k διακεκριμένων σφαιριδίων σε n κελιά απεριόριστης χωρητικότητας ώστε κάθε κελί να περιέχει τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο. Με βάση το ερώτημα (α)(iii) της προηγούμενης άσκησης, το πλήθος αυτών των κατανομών ισούται με $\sum_{s=0}^{n}(-1)^s \binom{n}{s}(n-s)^k$.

1.33. Για την κατασκευή μιας τέτοιας n-άδας, διαλέγουμε πρώτα τις r_1 θέσεις που θα τοποθετηθούν τα a_1, έπειτα τις r_2 θέσεις που θα τοποθετηθούν τα a_2, κλπ. Για να διαλέξουμε τις θέσεις για τα a_1 έχουμε $\binom{n}{r_1}$ επιλογές. Έπειτα, για να διαλέξουμε τις θέσεις για τα a_2 έχουμε $\binom{n-r_1}{r_2}$ επιλογές αφού r_1 θέσεις έχουν καταληφθεί από τα a_1. Όμοια και για τα υπόλοιπα στοιχεία. Με βάση την

[10] Αυτό το τρικ δεν δουλεύει στην περίπτωση των διακεκριμένων σφαιριδίων. Γιατί;

πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των n-άδων με τις συγκεκριμένες προδιαγραφές είναι

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{n-2}}{r_{n-1}}\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{n-1}}{r_n}\\
&\quad=\frac{n!}{r_1!\,(n-r_1)!}\frac{(n-r_1)!}{r_2!\,(n-r_1-r_2)!}\frac{(n-r_1-r_2)!}{r_3!\,(n-r_1-r_2-r_3)!}\cdots\frac{(n-r_1-r_2-\cdots-r_{n-1})!}{r_n!\,(n-r_1-r_2-\cdots-r_n)!}\\
&\quad=\frac{n!}{r_1!\,r_2!\cdots r_n!}
\end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος στον παρονομαστή του τελευταίου κλάσματος στη δεύτερη γραμμή ισούται με $0! = 1$.

1.34. (α) $(n)_k/n^k$.

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_n!}}{n^k}=\frac{1}{n^k}\binom{k}{k_1\ k_2\ \cdots\ k_n}.$$

Το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων, που εμφανίζεται στον αριθμητή του πρώτου κλάσματος, μπορεί να το υπολογίσει κανείς εξ' αρχής ή με χρήση της προηγούμενης άσκησης, γιατί τα άτομα, με τη επιλογή ορόφων, δημιουργούν μια διατεταγμένη k-άδα που στη θέση i έχει τον όροφο επιλογής του i ατόμου.

1.35. (α) (i) Έστω Z_{2n} το σύνολο των ζευγαρωμάτων των στοιχείων του $\{1,2,\ldots,2n\}$ και M_{2n} το σύνολο των μεταθέσεων του ίδιου συνόλου. Θεωρούμε την απεικόνιση $T : M_{2n} \to Z_{2n}$ με

$$T((x_1,x_2,\ldots,x_{2n}))=\{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\},\ldots,\{x_{2n-1},x_{2n}\}\}.$$

Δηλαδή έχοντας βάλει τους αριθμούς $1,2,\ldots,2n$ σε μια σειρά, την $(x_1,x_2,\ldots,z_{2n})$, ζευγαρώνουμε κάθε αριθμό σε περιττή θέση με τον αριθμό που βρίσκεται στην αμέσως επόμενη θέση. Με λίγη σκέψη βλέπει κανείς ότι η απεικόνιση είναι $n!2^n$ προς 1. Άρα $|M_{2n}| = n!\,2^n\,|Z_{2n}|$, δηλαδή

$$|Z_{2n}|=\frac{(2n)!}{n!\,2^n}=(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1.$$

(β) Έστω Z_{2n} το σύνολο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. (i) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $1/|Z_{2n}|$. (ii) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{n!}{Z_{2n}}=\frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

Αυτό γιατί για την κατασκευή ενός ευνοϊκού ζευγαρώματος αριθμούμε τα μεγάλα κομμάτια με τους αριθμούς $1,2,\ldots,n$, το ίδιο και τα μικρά. Έπειτα για κάθε μετάθεση $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ των $\{1,2,\ldots,n\}$ ζευγαρώνουμε το i μεγάλο ξυλάκι με το s_i μικρό. Πρακτικά, βάζουμε τα μεγάλα ξυλάκια σε μια αυθαίρετη σειρά και απέναντι τους βάζουμε σε σειρά τα μικρά ξυλάκια (μια μετάθεση). Κάθε μεγάλο ξυλάκι το ζευγαρώνουμε με το μικρό που βρίσκεται απέναντί του.

1.36. Θέτουμε $n = 10$. Έστω M_{2n}, Z_{2n}, T όπως και στην προηγούμενη άσκηση. Τα στοιχεία $2i-1$ και $2i$ αναπαριστούν το ζευγάρι i ($i \in \{1,2,\ldots,n\}$). Ο δειγματικός χώρος είναι το Z_{2n}.

Έστω A_i το ενδεχόμενο ότι οι σύζυγοι του παντρεμένου ζευγαριού i ζευγαρώνονται ως συμπαίκτες. Ζητάμε την πιθανότητα

$$P=P(A_1'\cap A_2'\cap\ldots\cap A_n')=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kS_{n,k},$$

όπου $S_{n,0} = 1$ και $S_{n,k}$ είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των τομών των A_i ανά k (συνολικά $\binom{n}{k}$ προσθεταίοι).

Για την κατασκευή μιας ευνοϊκής μετάθεσης (μετάθεση που η εικόνα της μέσω της T είναι ευνοϊκό ζευγάρωμα) για το ενδεχόμενο $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}$ (μιας από τις $\binom{n}{k}$ τομές των A_i ανά k)

αρκεί να διαλέξουμε θέσεις για τα ζευγάρια $i_1, i_2, ..., i_k$ με $(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ τρόπους. Μετά έχουμε να βάλουμε για κάθε ζευγάρι πρώτα τον σύζυγο ή τη σύζυγο με 2 τρόπους. Τέλος, να τοποθετήσουμε τους υπόλοιπους $2n-2k$ ανθρώπους στις υπόλοιπες θέσεις με $(2n-2k)!$ τρόπους. Έτσι, έχουμε ακριβώς $(n)_k(2n-2k)!2^k$ ευνοϊκές μεταθέσεις. Αυτές, μέσω της T, δίνουν ακριβώς τα ευνοϊκά ζευγαρώματα, τα οποία επομένως έχουν πλήθος $(n)_k(2n-2k)!2^k/(n!2^n)$ αφού η T είναι $n!2^n$ προς 1. Άρα,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \frac{(n)_k 2^k (2n-2k)!/(n!2^n)}{|Z_{2n}|} = \frac{(n)_k 2^k (2n-2k)!}{(2n)!}.$$

Επομένως,

$$P = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n)_k 2^k (2n-2k)!}{(2n)!}.$$

Απαντήσεις §2

2.1. Έστω A το ενδεχόμενο και τα δύο ζάρια να φέρουν 6 και B το ενδεχόμενο τουλάχιστον ένα από τα δύο να φέρει 6. Ζητάμε την πιθανότητα $P(A|B)$. Αυτή ισούται με

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A)}{1-P(B^c)} = \frac{1/36}{1-(5/6)^2} = \frac{1}{11}.$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $A \subset B$.

2.2. Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{(i,j,k) :\ i,j,k \in \{A,O\}\}$ όπου το Α αντιστοιχει στο άριστα και το Ο στο όχι άριστα και οι συντεταγμένες i,j,k αντιστοιχούν στους Αντώνη, Βάσω, Γιάννη αντίστοιχα. Οι πιθανότητες των δειγματικών σημείων είναι:

$$P(\{AAA\}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5},\ P(\{AAO\}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right), ...,$$
$$P(\{OOO\}) = \left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right).$$

Το ενδεχόμενο Γ ο Αντώνης να μην γράψει άριστα είναι το $\{OAA, OAO, OOA, OOO\}$ ενώ το ενδεχόμενο Δ δυο μαθητές να γράψουν άριστα είναι το $\{AAO, AOA, OAA\}$. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(\Gamma|\Delta) = \frac{P(\Gamma\cap\Delta)}{P(\Delta)} = \frac{P(\{OAA\})}{P(\{AAO\})+P(\{AOA\})+P(\{OAA\})} =$$
$$= \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{2}{9}.$$

2.3. Έστω A, B τα ενδεχόμενα να ειναι σωστός ο πατέρας και ο δάσκαλος αντίστοιχα. Ζητάμε την

$$P(A|(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)) = \frac{P(A\cap[(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)])}{P((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B))}$$
$$= \frac{P(A\cap B^c)}{P(A\cap B^c)+P(A^c\cap B)} = \frac{0.9\cdot 0.2}{0.9\cdot 0.2+0.1\cdot 0.8} = \frac{0.18}{0.26} \simeq 0.692$$

2.4. Ο δειγματικός χώρος ειναι ο $\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$ και όλα τα σημεία είναι ισοπίθανα με πιθανότητα 1/8. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(\text{δυο τουλάχιστον κεφαλές} \mid \text{μια τουλάχιστον κεφαλή}) = \frac{P(\text{δυο τουλάχιστον κεφαλές})}{P(\text{μια τουλάχιστον κεφαλή})}$$
$$= \frac{P(\{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\})}{P(\Omega \setminus \{\Gamma\Gamma\Gamma\})} = \frac{\frac{4}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{4}{7}$$

Πολλοί κάνουν τον λάθος συλλογισμό

$$P(\text{δυο τουλάχιστον K σε τρεις ρίψεις} \mid \text{1 τουλάχιστον K σε 3 ρίψεις})$$
$$= P(\text{1 τουλάχιστον K σε 2 ρίψεις}) = \frac{3}{4}$$

2.5. Ο δειγματικός χώρος περιέχει όλα τα δυνατά $\binom{52}{13}$ υποσύνολα 13 φύλλων από την τράπουλα και κάθε δειγματικό σημείο (υποσύνολο) είναι εξίσου πιθανό. Έστω A το ενδεχόμενο το χέρι να περιέχει ακριβώς έναν άσσο, B το ενδεχόμενο το χέρι να περιέχει τουλάχιστον έναν άσσο και C το ενδεχόμενο το χέρι να περιέχει τον άσσο-σπαθί.
Η πρώτη δεσμευμένη πιθανότητα είναι

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}/\binom{52}{13}}{1 - \binom{4}{0}\binom{48}{13}/\binom{52}{13}} \simeq \frac{0.4388}{0.6962} \simeq 0.6304,$$

ενώ η δεύτερη είναι

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\binom{1}{1}\binom{48}{12}/\binom{52}{13}}{\binom{1}{1}\binom{51}{12}/\binom{52}{13}} \simeq \frac{0.1097}{0.25} = 0.4388$$

Η πιο ακριβής πληροφορία (ότι το χέρι περιέχει τον άσσο-σπαθί) μειώνει τη δεσμευμένη πιθανότητα να περιέχει μόνο έναν άσσο.

2.6. Έστω $A_i := \{\text{Το νόμισμα βρίσκεται στην } i \text{ δοκιμή}\}$ για $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
(α) Ισχύει $A_r \subset A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{r-1}^c$. Έτσι ο πολλαπλασιαστικός τύπος δίνει

$$\begin{aligned} P(A_r) &= P(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{r-1}^c \cap A_r) \\ &= P(A_1^c)P(A_2^c|A_1^c)P(A_3|A_1^c \cap A_2^c) \cdots P(A_{r-1}^c|A_1^c \cap \cdots \cap A_{r-2}^c)P(A_r|A_1^c \cap \cdots \cap A_{r-1}^c) \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-(r-1)}{n-(r-2)} \cdot \frac{1}{n-(r-1)} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

(β) Τώρα ζητάμε την πιθανότητα $P(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{r-1}^c \cap A_r^c)$, η οποία ισούται με

$$\begin{aligned} &P(A_1^c)P(A_2^c|A_1^c)P(A_3|A_1^c \cap A_2^c) \cdots P(A_{r-1}^c|A_1^c \cap \cdots \cap A_{r-2}^c)P(A_r^c|A_1^c \cap \cdots \cap A_{r-1}^c) \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-(r-1)}{n-(r-2)} \cdot \frac{n-r}{n-(r-1)} = \frac{n-r}{n}. \end{aligned}$$

2.7. Το πρώτο άτομο από τα $2k$ μπορεί να είναι φοιτητής ή φοιτήτρια. Έστω λοιπόν τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A &: = \{\text{Το πρώτο άτομο είναι φοιτητής και ακολουθεί συνεχής εναλλαγή φύλου}\}, \\ B &: = \{\text{Το πρώτο άτομο είναι φοιτήτρια και ακολουθεί συνεχής εναλλαγή φύλου}\}, \\ A_i &: = \{\text{Το } i \text{ άτομο είναι φοιτητής}\}, \\ B_i &: = \{\text{Το } i \text{ άτομο είναι φοιτήτρια}\}. \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1 \cap B_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{2k-1} \cap B_{2k}) \\
&= P(A_1)P(B_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap B_2)\cdots P(B_{2k}|A_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap A_{2k-1}) \\
&= \frac{r}{r+s}\cdot\frac{s}{r+s-1}\cdot\frac{r-1}{r+s-2}\cdots\frac{s-(k-1)}{r+s-(2k-1)} = \frac{(r)_k(s)_k}{(r+s)_{2k}}.
\end{aligned}$$

Την ίδια τιμή έχει και η $P(B)$, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A \cup B) = 2P(A) = 2(r)_k(s)_k/(r+s)_k$.

Οι πιθανότητες $P(A), P(B)$ υπολογίζονται και με τον ορισμό της κλασικής πιθανότητας και καταμέτρηση. Π.χ., για την $P(A)$, το πλήθος των ενδεχόμενων πρώτων $2k$ εγγραφών είναι $(r+s)_{2k}$. Το πλήθος των ευνοϊκών είναι $(r)_k(s)_k$, και έτσι προκύπτει ο τύπος για την $P(A)$.

2.8. Έστω E_i το ενδεχόμενο η ρίψη i να είναι επιτυχία.
(α)

$$\begin{aligned}
P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_k \cap E_{k+1}^c \cap \cdots \cap E_{100}^c) &= P(E_1)\prod_{i=2}^{k} P(E_i \,|\, E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{i-1}) \\
\times P(E_{k+1}^c \,|\, E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_k) &\prod_{i=k+2}^{100} P(E_i^c \,|\, E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_k \cap E_{k+1}^c \cap \cdots \cap E_{i-1}^c) \\
= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{k}{k+1}\times\frac{1}{k+2}\times\frac{2}{k+3}\cdots\times\frac{100-k}{101} &= \frac{k!(100-k)!}{100!}\frac{1}{101}.
\end{aligned}$$

(β) Η ίδια όπως στο (α).
(γ) $1/101$ για κάθε $k \in \{0, 1, \ldots, 100\}$.

2.9. Έστω B το ενδεχόμενο στην πρώτη εξαγωγή να βγήκε άσπρο σφαιρίδιο και A το ενδεχόμενο στη δεύτερη εξαγωγή να βγεί άσπρο σφαιρίδιο. Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας για τη διαμέριση $\{B, B^c\}$ του χώρου πιθανότητας.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(B)P(A \,|\, B) + P(B^c)P(A \,|\, B^c) = \frac{5}{12}\times\frac{4}{9}+\frac{7}{12}\times\frac{3}{9} = \frac{41}{108}.$$

2.10. Θεώρημα ολικής πιθανότητας. $\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\frac{2i}{14} = \frac{1}{2}$.

2.11. Έστω C_i (για $i = 1, 2, \ldots, 6$) το ενδεχόμενο να έρθει τουλάχιστον μια φορά η ένδειξη i στις ρίψεις του ζαριού. Έστω επίσης A_k το ενδεχόμενο ο λαχνός που επιλέγουμε να έχει την ένδειξη k. Τότε $P(C_3 \cap C_5) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(C_3 \cap C_5|A_k)$ και για κάθε $k \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
P(C_3 \cap C_5|A_k) &= 1 - P(C_3^c \cup C_5^c|A_k) = 1 - \{P(C_3^c|A_k) + P(C_5^c|A_k) - P(C_3^c \cap C_5^c|A_k)\} \\
&= 1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^k + \left(\frac{4}{6}\right)^k.
\end{aligned}$$

Για $k = 1$ βέβαια $P(C_3 \cap C_5|A_k) = 0$ αφού το ζάρι ρίχνεται μόνο μια φορά, αλλά και ο προηγούμενος τύπος δίνει την ίδια απάντηση, 0, για $k = 1$, άρα περιέχει όλες τις περιπτώσεις. Έτσι, αθροίζοντας τις γεωμετρικές προόδους, βρίσκουμε

$$P(C_3 \cap C_5) = \frac{1}{n}\left\{n - 8 + 10\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}.$$

2.12. Έστω τα ενδεχόμενα $L :=$ {προκύπτει λάθος στο δέσιμο}, $A_i =$ {ο B κάθεται i-στος}, $i = 1, 2, 3$. Από τα δεδομένα, υπάρχει δυνατότητα να προκύψει λάθος δέσιμο μόνο όταν ο B

κάθεται πρώτος. Άρα

$$P(L)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(L|A_i)=P(A_1)P(L|A_1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

2.13. Θεώρημα ολικής πιθανότητας. Πείραμα σε τρία βήματα. Δεσμεύουμε ως προς το τι έγινε στα δύο πρώτα βήματα. Για $i=1,2,3$ θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A_i := \{\text{Το σφαιρίδιο της } i \text{ εξαγωγής είναι άσπρο}\},$$
$$M_i := \{\text{Το σφαιρίδιο της } i \text{ εξαγωγής είναι μαύρο}\}.$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας για τη διαμέριση

$$\{A_1\cap A_2, A_1\cap M_2, M_1\cap A_2, M_1\cap M_2\}$$

του χώρου πιθανότητας.

$$\begin{aligned}P(A_3)&=P(A_1\cap A_2)P(A_3\,|\,A_1\cap A_2)+P(A_1\cap M_2)P(A_3\,|\,A_1\cap M_2)\\&\quad+P(M_1\cap A_2)P(A_3\,|\,M_1\cap A_2)+P(M_1\cap M_2)P(A_3\,|\,M_1\cap M_2)\\&=\frac{k}{n}\frac{k}{n}\frac{k}{n}+\frac{k}{n}\frac{(n-k)}{n}\frac{(k+1)}{n}+\frac{(n-k)}{n}\frac{(k+1)}{n}\frac{(k+1)}{n}+\frac{(n-k)}{n}\frac{(n-k-1)}{n}\frac{(k+2)}{n}.\end{aligned}$$

2.14. Έστω A_1, A_2, A_3 τα ενδεχόμενα η βαλίτσα να χάθηκε στην Αθήνα, στην Κων/πολη, και στη Σιγκαπούρη αντίστοιχα. Τότε

$$\begin{aligned}P(\text{Απώλεια της βαλίτσας})&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c)\\&=1-P(A_1^c)P(A_2^c|A_1^c)P(A_3^c|A_1^c\cap A_2^c)=1-0,95\cdot 0,97\cdot 0,98\\&=0,09693\end{aligned}$$

Έπειτα

$$\begin{aligned}&P(\text{Απώλεια της βαλίτσας στην Κων/πολη}|\text{Απώλεια βαλίτσας})\\&=P(A_2|A_1\cup A_2\cup A_3)=\frac{P(A_2)}{P(A_1\cup A_2\cup A_3)}=\frac{P(A_1^c)P(A_2|A_1^c)}{P(A_1\cup A_2\cup A_3)}=\frac{0,95\cdot 0,03}{0,09693}=0,2940\end{aligned}$$

2.15. Έστω A_i το ενδεχόμενο η ομάδα να αποκλείστηκε στον γύρο i, $i=1,2,3,4$ και A το ενδεχόμενο να μην είναι η τελική νικήτρια. Βέβαια $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$, ξένη ένωση. Ζητάμε την $P(A_i|A)$ και δίνεται ότι $P(A_i^c|A_1^c\cap\cdots\cap A_{i-1}^c)=P_i$ για $i=1,2,3,4$. Έχουμε

$$\begin{aligned}P(A_i|A)&=\frac{P(A_i)}{P(A)}=\frac{P(A_1^c\cap A_2^c\cdots\cap A_{i-1}^c\cap A_i)}{P(A)}\\&=\frac{P(A_1^c\cap A_2^c\cap\cdots\cap A_{i-1}^c\cap A_i)}{1-P(A_1^c)P(A_2^c|A_1^c)P(A_3^c|A_1^c\cap A_2^c)P(A_4^c|A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c)}=\frac{P_1P_2\cdots P_{i-1}(1-P_i)}{1-P_1P_2P_3P_4}.\end{aligned}$$

2.16. Τύπος Bayes.

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{5^4}{10^4}}{\frac{1}{2}\frac{5^4}{10^4}+\frac{1}{2}\frac{9^4}{10^4}}\approx 0.08$$

Η πιθανότητα αυτή είναι μικρή και αυτό δεν μας κάνει εντύπωση.

2.17. Τύπος Bayes.

$$\frac{0.001\times 0.95}{0.001\times 0.95+0.999\times 0.01}=\frac{95}{95+999}\approx 0.086$$

2.18. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα μια δίδυμη κύηση

α) να αφορά μονοωικά δίδυμα (M),

β) να αφορά ετεροζυγωτικά δίδυμα (M^c),

γ) να αφορά παιδιά ίδιου φύλου-αγόρια (A),
δ) να αφορά παιδιά ίδιου φύλου-κορίτσια (K),
ε) να αφορά παιδιά διαφορετικού φύλου (Δ).
Τα δεδομένα του προβλήματος είναι

$$\begin{aligned} P(M) &= \frac{1}{3}, P(M^c) = \frac{2}{3}, \\ P(A|M) &= \frac{1}{2}, P(K|M) = \frac{1}{2}, \\ P(A|M^c) &= \frac{1}{4}, P(K|M^c) = \frac{1}{4}, P(\Delta|M^c) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Το ζευγάρι ζητάει την $P(M|A)$. Εφαρμόζουμε τον τύπο του Bayes.

$$P(M|A) = \frac{P(A \cap M)}{P(A)} = \frac{P(M)P(A|M)}{P(M)P(A|M) + P(M^c)P(A|M^c)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}.$$

2.19. Τύπος Bayes. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{ο φίλος μας, μάς δείχνει άσπρη πλευρά}\} \\ B_1 &:= \{\text{ο φίλος μας επιλέγει το φύλλο } AA\}, \\ B_2 &:= \{\text{ο φίλος μας επιλέγει το φύλλο } AM\}, \\ B_3 &:= \{\text{ο φίλος μας επιλέγει το φύλλο } MM\}. \end{aligned}$$

Αναζητούμε την πιθανότητα

$$P(B_2 \,|\, A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_2)P(A \,|\, B_2)}{P(B_1)P(A \,|\, B_1) + P(B_2)P(A \,|\, B_2) + P(B_3)P(A \,|\, B_3)}.$$

(α) Στο πρώτο σενάριο, το πιο πάνω κλάσμα ισούται με

$$\frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{1}{3}.$$

(β) Στο δεύτερο σενάριο, αυτό που αλλάζει είναι η πιθανότητα $P(A \,|\, B_2)$. Τώρα ο φίλος μας επιδιώκει να δείχνει άσπρη πλευρά, οπότε αυτή η πιθανότητα είναι 1. Και το κλάσμα γίνεται

$$\frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{1}{2}.$$

2.20. Έστω A το ενδεχόμενο ο κλέφτης να άνοιξε το συρτάρι Σ_1 και B το ενδεχόμενο να πήρε δύο χρυσά νομίσματα. (α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας για τη διαμέριση $\{A, A^c\}$ του χώρου πιθανότητας.

$$P(B) = P(A)P(B \,|\, A) + P(A^c)P(B \,|\, A^c) = \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{17}{120}.$$

(β) Εφαρμόζουμε τον τύπο του Bayes. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A \,|\, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B \,|\, A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{17}{120}} = \frac{12}{17}.$$

Την πιθανότητα $P(B)$ την υπολογίσαμε στο ερώτημα (α).

2.21. Τύπος Bayes. Θέτουμε $C_k := \{\text{ο οδηγός ανήκει στην κατηγορία } A_k\}$ για $k = 1, 2, \ldots, 10$, και $B := \{\text{ο οδηγός αναφέρει ατύχημα}\}$.

$$P(C_k \mid B) = \frac{P(B\cap C_k)}{P(B)} = \frac{P(B \mid C_k)P(C_k)}{\sum_{j=1}^{10} P(B \mid C_j)P(C_j)} = \frac{\frac{k}{100}\frac{k}{55}}{\sum_{j=1}^{10}\frac{j}{100}\frac{j}{55}} = \frac{k^2}{385}.$$

2.22. (β) Τα A, B είναι θετικά συσχετισμένα ενώ τα A, C είναι αρνητικά συσχετισμένα.

2.23. Με βάση τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας,

$$p_\Gamma(A \mid B) = \frac{p_\Gamma(A\cap B)}{p_\Gamma(B)} = \frac{P(A\cap B \mid \Gamma)}{P(B \mid \Gamma)} = \frac{\frac{P(A\cap B\cap\Gamma)}{P(\Gamma)}}{\frac{P(B\cap\Gamma)}{P(\Gamma)}} = \frac{P(A\cap B\cap\Gamma)}{P(B\cap\Gamma)} = P(A \mid B\cap\Gamma).$$

2.24. Επειδή η συνάρτηση $p_\Gamma : \mathcal{A} \to [0,1]$ με $p_\Gamma(A) = P(A \mid \Gamma)$ είναι μέτρο πιθανότητας, ισχύει για αυτήν το θεώρημα ολικής πιθανότητας. Δηλαδή

$$\begin{aligned} P(A \mid \Gamma) &= p_\Gamma(A) = p_\Gamma(B_1)p_\Gamma(A \mid B_1) + p_\Gamma(B_2)p_\Gamma(A \mid B_2) \\ &= P(B_1 \mid \Gamma)P(A \mid \Gamma\cap B_1) + P(B_2 \mid \Gamma)P(A \mid \Gamma\cap B_2) \end{aligned}$$

Για την τελευταία ισότητα, χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης.

2.25. (α) Επειδή $(A\cap B)\cap(A\cup B) = A\cap B$ και $(A\cap B)\cap A = A\cap B$, η ζητούμενη σχέση ισοδυναμεί με

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)} \le \frac{P(A\cap B)}{P(A)},$$

που ισχύει αφού $P(A\cap B) \ge P(A)$.
(β) Με χρήση του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας, η ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} &\frac{P(B)}{P(B\cup A)} \ge \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A)P(B) \ge P(A\cap B)P(A\cup B) \\ &\Leftrightarrow P(A)P(B) \ge P(A\cap B)\left\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right\} \\ &\Leftrightarrow P(A)P(B) - P(A)P(A\cap B) - P(B)P(A\cap B) + P(A\cap B)P(A\cap B) \ge 0 \\ &\Leftrightarrow (P(A)-P(A\cap B))(P(B)-P(A\cap B)) \ge 0. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει προφανώς.

2.26. Δείχνουμε μόνο το (α). Τα (β), (γ) έπονται από αυτό.

$$P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1-P(B)) = P(A)P(B^c).$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει γιατί τα σύνολα $A\cap B, A\cap B^c$ είναι ξένα με ένωση το A. Στη δεύτερη, χρησιμοποιούμε την ανεξαρτησία των A, B.

2.27. Έχουμε

$$P(A) = 1 - 2\frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}},\ P(B) = \frac{1}{2^k} + \frac{k}{2^k} = \frac{k+1}{2^k},\ P(A\cap B) = \frac{k}{2^k}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow \frac{k}{2^k} = \left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)\left(\frac{k+1}{2^k}\right) \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \Leftrightarrow 2^{k-1} = k+1 \Leftrightarrow k = 3. \end{aligned}$$

Άρα τα A, B είναι ανεξάρτητα μόνο για $k = 3$.

2.28. Έστω m η πιθανότητα η Μαρία να κερδίσει τη μητέρα της σε ένα παιχίδι και p η πιθανότητα να κερδίσει τον προπονητή της σε ένα παιχνίδι. Είναι $m > p$. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα
$A_{1,2}$: Η Μαρία κερδίζει τα παιχνίδια 1 και 2.
$A_{2,3}$: Η Μαρία κερδίζει τα παιχνίδια 2 και 3.
Ζητάμε την πιθανότητα του $A_{1,2}\cup A_{2,3}$ κάτω από τις δύο διαθέσιμες επιλογές. Για την επιλογή

Μητέρα-Προπονητής -Μητέρα χρησιμοποιούμε το σύμβολο P ενώ για την επιλογή Προπονητής -Μητέρα-Προπονητής χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\hat{P}$. Έχουμε

$$P(A_{1,2} \cup A_{2,3}) = P(A_{1,2}) + P(A_{2,3}) - P(A_{1,2} \cap A_{2,3}) = 2mp - mpm$$
$$\hat{P}(A_{1,2} \cup A_{2,3}) = \hat{P}(A_{1,2}) + \hat{P}(A_{2,3}) - \hat{P}(A_{1,2} \cap A_{2,3}) = 2mp - pmp.$$

Επειδή $mpm > pmp$, έπεται ότι η δεύτερη επιλογή έχει μεγαλύτερη πιθανότητα και άρα η Μαρία πρέπει να επιλέξει αυτήν.

2.29. Δεν είναι ανεξάρτητα.

Πως το σκεφτόμαστε: Ας θεωρήσουμε το ακραίο σενάριο που και τα δύο νομίσματα N_1, N_2 είναι κίβδηλα με $p_1 = 999/1000, p_2 = 1/1000$ και κάνουμε το πείραμα που αναφέρει η άσκηση. Επιλέγουμε στην τύχη ένα από τα δύο νομίσματα και έχουμε στα χέρια ένα νόμισμα του οποίου την πιθανότητα επιτυχίας **δεν ξέρουμε**. Το ρίχνουμε μία φορά και έστω ότι έρχεται Κ δηλαδή συμβαίνει το A_1. Τι καταλαβαίνουμε από αυτό; Προφανώς ότι κρατάμε το νόμισμα N_1 (δεν είμαστε σίγουροι αλλά έχουμε τεράστιο βαθμό βεβαιότητας). Αυτό επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του A_2. Ποντάρουμε με σιγουριά ότι και στη δεύτερη φορά θα έρθει Κ. Ενώ αν δεν βλέπαμε το πρώτο αποτέλεσμα, δεν θα ποντάραμε με μεγάλη σιγουριά ότι θα συμβεί το A_2. Δηλαδή $P(A_2|A_1) > P(A_2)$. Το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης μας έδωσε κάποια πληροφορία για την (άγνωστη) πιθανότητα επιτυχίας του νομίσματος που κρατάμε και άρα μια εκτίμηση για το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης.

Τότε τι σημαίνει το ότι πραγματοποιούμε δύο ανεξάρτητες ρίψεις; Σημαίνει ότι τα αποτελέσματα των δύο ρίψεων είναι ανεξάρτητα **δεδομένου** ότι έχουμε επιλέξει το νόμισμα N_1 (ή το N_2). Δηλαδή

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \,|\, \text{έχουμε επιλέξει το } N_1) &= P(A_1 \,|\, \text{έχουμε επιλέξει το } N_1) P(A_2 \,|\, \text{έχουμε επιλέξει το } N_1) \\ &= p_1 p_1. \end{aligned}$$

Η τυπική απόδειξη της μη ανεξαρτησίας: Επιστρέφουμε στο σενάριο της άσκησης και θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$B_1 := \{\text{επιλέγω το νόμισμα } N_1\},$$
$$B_2 := \{\text{επιλέγω το νόμισμα } N_2\}.$$

Τότε

$$P(A_1 \cap A_2) = P(B_1) P(A_1 \cap A_2 \,|\, B_1) + P(B_2) P(A_1 \cap A_2 \,|\, B_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{13}{32},$$

και

$$P(A_1) = P(B_1)\, P(A_1 \,|\, B_1) + P(B_2)\, P(A_1 \,|\, B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8}.$$

Όμοια, $P(A_2) = 5/8$. Και όπως περιμέναμε,

$$P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1) P(A_2).$$

Μάλιστα

$$\frac{P(A_2 \,|\, A_1)}{P(A_2)} = \frac{26}{25} > 1,$$

δηλαδή $P(A_2 \,|\, A_1) > P(A_2)$.

2.30. Έστω A το ενδεχόμενο ένα άτομο να πάσχει απο την ασθένεια α και B το ενδεχόμενο να πάσχει απο την ασθένεια β. Δίνεται ότι

$$P(A \backslash B) = 0.6/100,$$
$$P(B \backslash A) = 0.5/100,$$
$$P(A \cap B) = 0.2/100.$$

Βρίσκουμε ότι $P(A) = P(A\backslash B) + P(A\cap B) = 0.8/100$, και όμοια, $P(B) = 0.7/100$. Τα A, B δεν είναι ανεξάρτητα.

2.31. Έστω E_k το ενδεχόμενο ότι η k δοκιμή είναι επιτυχία, και $A_k (= E_k^c)$ το ενδεχόμενο ότι η k δοκιμή είναι αποτυχία.

(β) Για κάθε $n \geq 1$ φυσικό, έχουμε

$P(\text{όλες οι δοκιμές δίνουν αποτυχίες}) \leq P(\text{οι πρώτες } n \text{ δοκιμές δίνουν μόνο αποτυχίες}) = (1-p)^n$.

Η τελευταία ισότητα προκύπτει απο το (α). Όμως $(1-p)^n \to 0$ για $n \to \infty$ επειδή $1-p \in (0,1)$.

(γ) Ζητάμε την πιθανότητα

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{k-1} \cap E_k) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_{k-1})P(E_k) = (1-p)^{k-1}p$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}, E_k$.

(δ) Το να χρειαστούν τουλάχιστον k δοκιμές ισοδυναμεί με το οι πρώτες $k-1$ δοκιμές να είναι αποτυχίες. Έτσι η πιθανότητα που ζητάμε είναι

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{k-1}) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_{k-1}) = (1-p)^{k-1}.$$

2.32. Έστω $A_i := \{\text{κερδίζει το παιχνίδι ο } a_i\}$ για $i = 1, 2, 3$ και $B := \{\text{η πρώτη ρίψη είναι κορώνα}\}$.

$$p_2 := P(A_2) = P(A_2 \cap B) + P(A_2 \cap B^c) = 0 + P(A_2 \,|\, B^c)P(B^c) = \frac{1}{2}\,p_1.$$

Αυτό γιατί δεδομένου ότι η πρώτη ρίψη ήταν γράμματα, το παιχνίδι είναι σαν να ξαναρχίζει, με τη θέση του a_1 να την παίρνει ο a_2. Όμοια $p_3 = p_2/2$. Από το (β) της Άσκησης 2.31, κάποια στιγμή θα έρθει κορώνα (άρα σίγουρα κάποιος θα κερδίσει), οπότε $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Βρίσκουμε έτσι το p_1.

Το p_1 υπολογίζεται και άμεσα ως εξής. Ο a_1 κερδίζει μόνο αν φέρει στην αρχή κορώνα ή αν φέρει γράμματα, οι επόμενοι δύο γράμματα (ώστε να έρχεται πάλι η σειρά του), και να κερδίσει στο νέο παιχνίδι που θα ξεκινήσει τότε. Δηλαδή,

$$p_1 = P(A_1) = P(A_1 \cap B) + P(A_1 \cap B^c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(A_1 \,|\, B^c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}p_1.$$

2.33. (α) Χρησιμοποιούμε την Άσκηση 2.31(α). Για μια δεδομένη ερώτηση απο τις n θέτουμε

$$\Xi := \{\text{ο διαγωνιζόμενος ξέρει την ερώτηση}\},$$
$$\Sigma := \{\text{ο διαγωνιζόμενος απαντάει σωστά την ερώτηση}\}.$$

$$P(\Sigma) = P(\Sigma \,|\, \Xi)P(\Xi) + P(\Sigma \,|\, \Xi^c)P(\Xi^c) = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{j} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{j}\right) =: a.$$

Από την Άσκηση 2.31(α) προκύπτει ότι

$$P(\text{ο διαγωνιζόμενος απαντάει σωστά σε } k \text{ ερωτήσεις}) = \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k}.$$

(β) Έστω

$$A := \{\text{ο διαγωνιζόμενος απάντησε σωστά σε } k \text{ ερωτήσεις}\},$$
$$B := \{\text{ο διαγωνιζόμενος ξέρει } s \text{ ερωτήσεις}\}.$$

Έχουμε

$$P(B \,|\, A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \,|\, B)P(B)}{P(A)}. \tag{2}$$

Ο παρονομαστής είναι γνωστός από το (α). Επίσης, απο την Άσκηση 2.31(α),

$$P(B) = \binom{n}{s}\left(\frac{1}{2}\right)^s\left(\frac{1}{2}\right)^{n-s} = \binom{n}{s}\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

γιατί έχουμε n δοκιμές ενός πειράματος με πιθανότητα επιτυχίας $1/2$, ενώ

$$P(A\,|\,B) = \binom{n-s}{k-s}\left(\frac{1}{j}\right)^{k-s}\left(1-\frac{1}{j}\right)^{n-k}.$$

Αυτό, γιατί ξέροντας ότι γνωρίζει s ερωτήσεις, μένουν $n-s$ από τις οποίες επιλέγουμε τις επιπλέον $k-s$ που απαντάει σωστά στην τύχη. Αφού επιλέξουμε τις $k-s$ που απαντάει σωστά στην τύχη, πολλαπλασιάζουμε με την πιθανότητα σε αυτές να απαντήσει σωστά και στις υπόλοιπες $n-s-(k-s)=n-k$ να απαντήσει λάθος.
Αντικαθιστώντας στη (2), βρίσκουμε

$$P(B\,|\,A) = \frac{\binom{n-s}{k-s}\left(\frac{1}{j}\right)^{k-s}\left(1-\frac{1}{j}\right)^{n-k}\binom{n}{s}\left(\frac{1}{2}\right)^n.}{\binom{n}{k}\left(\frac{j+1}{2j}\right)^k\left(\frac{j-1}{2j}\right)^{n-k}} = ... = \binom{k}{s}\left(\frac{j}{j+1}\right)^s\left(\frac{1}{j+1}\right)^{k-s}.$$

2.34. Ο δειγματικός χώρος Ω είναι το σύνολο των μεταθέσεων των στοιχείων του συνόλου $\{1,2,\ldots,n\}$. Γιατί αν καταγράψουμε τους αριθμούς των σφαιριδίων με τη σειρά με την οποία βγαίνουν από την κάλπη, παίρνουμε μία μετάθεση των $\{1,2,\ldots,n\}$. Για λόγους συμμετρίας, όλοι οι $n!$ δυνατοί τρόποι εξαγωγής είναι ισοπίθανοι.

(α) Οι ευνοϊκές εξαγωγές έχουν πλήθος $\binom{n}{j}(j-1)!(n-j)!$. Γιατί φτιάχνουμε μία μετάθεση ως εξής. Επιλέγουμε πρώτα ποια j στοιχεία θα καταλάβουν τις πρώτες j θέσεις ($\binom{n}{j}$ τρόποι για αυτό). Έπειτα, για τη j θέση πάει το μεγαλύτερο από αυτά (μία επιλογή), βάζουμε τα υπόλοιπα $j-1$ σε σειρά ($(j-1)!$ τρόποι για αυτό), και όμοια βάζουμε σε σειρά τα $n-j$ στοιχεία που έχουν μείνει για να καταλάβουν τις θέσεις $j+1, j+2,\ldots,n$ ($(n-j)!$ τρόποι για αυτό). Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{n}{j}(j-1)!(n-j)!}{n!} = \frac{\frac{n!}{j!(n-j)!}(j-1)!(n-j)!}{n!} = \frac{1}{j}$$

(β) Πρέπει να δείξουμε ότι $P(A_i\cap A_j)=1/(ij)$ για κάθε $1\le i,j\le n$ με $i\ne j$.

Απαντήσεις §3

3.1. $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=0$ προφανώς αν $y\le 0$, ενώ για $y>0$,

$$P(e^X\le y)=P(X\le \log y)=F_X(\log y).$$

Άρα

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{αν } y<1,\\ 1-e^{-(\log y)^2} & \text{αν } y\ge 1.\end{cases}$$

3.2. (α) Πρέπει

$$1=\sum_{x\in\mathbb{Z}} f(x) = c\left(\sum_{k=-1}^{-\infty}2^{-|k|}+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\right) = c\left(\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\right)=c\,3$$

Άρα $c=1/3$.

(β) Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στην f.

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{y \le x} f(y) = \sum_{k=-\infty}^{[x]} f(k) = ... = \begin{cases} \frac{1}{3}\frac{1}{2^{-[x]-1}} & \text{αν } x < 0, \\ 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{2^{[x]}} & \text{αν } x \ge 0. \end{cases}$$

3.3. Στο (α) έχουμε $E(X^+) = E(X^-) = \infty$, δεν ορίζεται η μέση τιμή. Στο (β) έχουμε $E(X^+) < \infty, E(X^-) = \infty$, άρα $EX = E(X^+) - E(X^-) = -\infty$.

3.4. (α) $P(X = r) = P(X \le r) - P(X \le r-1)$. Προφανώς $X \ge k$ πάντοτε και για $k \le r \le n$ έχουμε $P(X \le r) = (r)_k/(n)_k$.
(β) Χρησιμοποιώντας το (α), έχουμε

$$EX = \sum_{r=k}^{n} rP(X = r) = \sum_{r=k}^{n} r\{P(X \le r) - P(X \le r-1)\} = ... = n - \sum_{r=k}^{n-1} \frac{(r)_k}{(n)_k}.$$

Για το τελευταίο άθροισμα υπάρχει απλούστερη έκφραση. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $(r+1)_{k+1} - (r)_{k+1} = (r)_k(k+1)$ που ισχύει για κάθε $r, k \ge 1$ (και είναι μη τετριμένη για $r \ge k$) παίρνουμε

$$(r)_k = \frac{(r+1)_{k+1} - (r)_{k+1}}{k+1}.$$

Άρα με τηλεσκοπικότητα το άθροισμα βγαίνει $(n-k)/(k+1)$ και η μέση τιμή

$$EX = \frac{(n+1)k}{k+1}.$$

3.5. (α) $f(t) := P(X = t) = (2/3)^{t-1}(1/3)$ αν $t \in \mathbb{N}^+ = \{1, 2, \ldots\}$ και $f(t) = 0$ αν $t \notin \mathbb{N}$.
(β) $P(X \in 2\mathbb{N}^+ - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k+1) = ... = 3/5$.
(γ) Το παιχνίδι είναι δίκαιο αν και μόνο αν το μέσο κέρδος κάθε παίκτη είναι 0. Και αρκεί να ισχύει αυτό για τον Α αφού τα κέρδη των Α, Β αθροίζουν στο 0. Η πιθανότητα να κερδίσει ο Α είναι $p_A = 3/5$ οπότε το μέσο του κέρδος είναι $p_A\beta - (1 - p_A)\alpha = (3\beta - 2\alpha)/5$, το οποίο είναι μηδέν ακριβώς όταν $\alpha = 3\beta/2$.

Το (β) βγαίνει επίσης όπως η Άσκηση 2.32 απο την Παράγραφο 2 αυτού του φυλλαδίου, δηλαδή με χρήση δεσμευμένης πιθανότητας. Για τη ζητούμενη πιθανότητα p δείχνουμε ότι $p = 1/3 + (2/3) \cdot (2/3)p$.

3.6. Έστω Z η πρώτη δοκιμή κατα την οποία εμφανίζεται η ένδειξη Κ. Τότε

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} 2^n P(X = 2^n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^n P(Z = n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^n 2^{-n} = \infty.$$

Το παράδοξο είναι ότι ενώ η μέση τιμή είναι άπειρη και επομένως οποιαδήποτε πεπερασμένη τιμή είναι μεγάλη έκπτωση, κανείς δεν προτίθεται να δώσει μεγάλο ποσό για να παίξει. 50 Ευρώ θεωρείται ακριβή τιμή για το παιχνίδι.

Το παράδοξο διατυπώθηκε το 1713 από τον Nicolas Bernoulli. Διαβάστε λεπτομέρειες στο άρθρο της Wikipedia για το θέμα. http://en.wikipedia.org/wiki/St._ Petersburg_ paradox

3.7. Η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, και η X^a διακριτή τυχαία μεταβλητή μή αρνητική. Άρα η μέση τιμή της X^a υπάρχει (πεπερασμένη ή άπειρη) και δίνεται από τον τύπο

$$E(X^a) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x^a f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^a \frac{1}{k(k+1)}.$$

Η τελευταία σειρά είναι ουσιαστικά η $\sum_{k=1}^{\infty} k^{a-2}$ η οποία συγκλίνει ακριβώς για $a - 2 < -1$, δηλαδή $a < 1$. Για την αυστηρή απόδειξη, χρησιμοποιούμε το κριτήριο σύγκρισης για τις δύο σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} k^a/(k(k+1)), \sum_{k=1}^{\infty} k^{a-2}$.

3.8. Η συνάρτηση πιθανότητας, f_Z, της Z είναι $f_Z(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}^+$ ενώ για $k \in \mathbb{N}^+$ είναι

$$f_Z(k) = P(Z = k) = p_k \prod_{j=1}^{k-1}(1 - p_j).$$

Όσο αφορά τη μέση τιμή $E(Z)$, δείχνουμε ότι $f_Z(k) \sim c/k^{a+1}$ καθώς $k \to \infty, k \in \mathbb{N}^+$ (για κάποια θετική σταθερά c) και το ζητούμενο έπεται.

3.9. Κάθε ζευγάρι επιζεί με πιθανότητα

$$\frac{\binom{2n-2}{m}}{\binom{2n}{m}} = \left(1 - \frac{m}{2n}\right)\left(1 - \frac{m}{2n-1}\right).$$

Έστω I_i η τυχαία μεταβλητή που παίρνει την τιμή 1 αν το ζευγάρι i επιβίωσε και την τιμή 0 αν όχι. Το πλήθος των επιζώντων ζευγαριών είναι $T = \sum_{i=1}^{n} I_i$. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της μέση τιμής εχουμε

$$E(T) = E\Big(\sum_{i=1}^{n} I_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} E(I_i) = nE(I_1) = nP(I_1 = 1) = n\left(1 - \frac{m}{2n}\right)\left(1 - \frac{m}{2n-1}\right).$$

Προσέξτε ότι οι $I_i, i = 1, 2, \ldots, n$, δεν είναι ανεξάρτητες. Έτσι δεν μπορούμε να πούμε ότι η T ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή (επόμενη παράγραφος ασκήσεων).

3.10. Έστω I_i^k μια 0-1 τυχαία μεταβλητή που δείχνει αν το i κόκκινο σφαιρίδιο είναι στην κάλπη K μετά το k-οστο στάδιο. Τότε $I_i^0 = 1,\ 1 \le i \le n$ αφού όλα τα κόκκινα σφαιρίδια είναι αρχικά στην κάλπη K. Επίσης, για $k \ge 1$, έχουμε ότι $I_i^k = 1$ αν και μόνο αν το i σφαιρίδιο έχει επιλεγεί για αλλαγή κάλπης άρτιο αριθμό φορών στα στάδια 1,2,...,k. Όμως σε κάθε στάδιο η πιθανότητα επιλογής του i είναι $p = 1/n$ αφού οι κάλπες έχουν n σφαιρίδια. Επομένως, η πιθανότητα το σφαιρίδιο να έχει επιλεγεί m φορές είναι $c_m := \binom{k}{m}p^m(1-p)^{k-m}$. Έστω $S_a = \sum_{m \text{ άρτιος}} c_m, S_\pi = \sum_{m \text{ περιττός}} c_m$. Τότε

$$S_a + S_\pi = \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}p^m(1-p)^{k-m} = (p + 1 - p)^k = 1,$$
$$S_a - S_\pi = \sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}p^m(1-p)^{k-m} = (-p + (1-p))^k = (1-2p)^k,$$

οπότε $P(I_i^k = 1) = S_a = \{1 + (1-2p)^k\}/2$.

Το πλήθος των κόκκινων σφαιριδίων στην κάλπη K μετά το k-οστό στάδιο είναι $T_k = \sum_{i=1}^{n} I_i^k$. Επομένως

$$E(T_k) = E\Big(\sum_{i=1}^{n} I_i^k\Big) = \sum_{i=1}^{n} E(I_i^k) = \; = nE(I_i^k) = nP(I_i^k = 1) = n\{1 + (1-2p)^k\}/2$$

με $p = 1/n$.

Απαντήσεις §4

4.1. Η κατανομή είναι διωνυμική με παραμέτρους $n = 80, p = 1/10$ και άρα με μέση τιμή $np = 8$.

4.2. Έχουμε 90 ανεξάρτητες δοκιμές ενός πειράματος που έχει πιθανότητα επιτυχίας

$$\begin{aligned} p &= P(\text{η ένδειξη του B ξεπερνάει αυτήν του A κατα δύο μονάδες τουλάχιστον}) \\ &= \frac{4+3+2+1}{36} = \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Ο ζητούμενος αριθμός ρίψεων ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 90$ και $p = 5/18$.

4.3. Έστω p η πιθανότητα ο σκοπευτής να πετύχει το στόχο σε μια δεδομένη βολή. Δίνεται ότι

$$\binom{10}{4} p^4 (1-p)^6 = 3\binom{10}{3} p^3 (1-p)^7,$$

απ΄ όπου βρίσκουμε μετά απο απλοποιήσεις ότι $p = 12/19$.

(α) $P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - (1-p)^5 - 5p(1-p)^4$.

(β) $P(X=0) + P(X=5) = (1-p)^5 + p^5$.

(γ)

$$P(X \leq 4 \,|\, X \geq 2) = \frac{P(2 \leq X \leq 4)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)}{P(X \geq 2)}.$$

Ο παρονομαστής έχει υπολογιστεί στο (α). Ο αριθμητής ισούται με

$$\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 + \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p).$$

4.4. Έστω S το πλήθος των επιβατών που δεν εμφανίζονται. Με βάση τα δεδομένα, η S είναι τυχαία μεταβλητή με κατανομή διωνυμική με παραμέτρους $n = 203, p = 0.05$ ($S = \sum_{i=1}^{203} \mathbf{1}_{A_i^c}$, αθροισμα ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή Bernoulli(p)). Ζητάμε την πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(S < 3) &= P(S=0) + P(S=1) + P(S=2) \\ &= (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} \approx 0.00205803 \end{aligned}$$

4.5. Η X παίρνει τιμές στο $A := \{2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Για $k \in \mathbb{R} \setminus A$, $f_X(k) = P(X = k) = 0$ ενώ για $k \in A$ έχουμε

$$P(X = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}.$$

Η ισότητα εξηγείται ως εξής. Κοιτάμε τις πρώτες k ρίψεις και θέλουμε να είναι επιτυχία η τελευταία και ακόμα μία από τις $1, 2, \ldots, k-1$. Τα πιθανά σενάρια είναι τα $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$, όπου A_r είναι το ενδεχόμενο να έχουμε επιτυχίες στις δοκιμές r και k και αποτυχίες στις υπόλοιπες. Αυτά τα σενάρια είναι ξένα ανα δύο και κάθε A_r έχει πιθανότητα $p^2(1-p)^{k-2}$ γιατί οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες και κάθε επιτυχία έχει πιθανότητα p ενώ κάθε αποτυχία έχει πιθανότητα $1-p$ (οι θέσεις των επιτυχιών και αποτυχιών είναι καθορισμένες).
Έπειτα,

$$\sum_{k=2}^{\infty} f_X(k) = p^2 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)(1-p)^{k-2} \overset{x=1-p}{=} p^2 \sum_{j=1}^{\infty} j x^{j-1} = p^2 \frac{1}{(1-x)^2} = 1.$$

Χρησιμοποιήσαμε τον εξής υπολογισμό

$$\sum_{j=1}^{\infty} j x^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} j x^{j-1} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} x^j \right)' = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2},$$

που ισχύει για $x \in (-1, 1)$. Στην πρώτη ισότητα επεκτείναμε την άθροιση και στο $j = 0$ (προσθέτοντας το 0) ώστε να έχουμε την παράγωγο του $1/(1-x)$ και όχι του $x/(1-x)$ (το πρώτο είναι πιο βολικό).

4.6. Η X παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ και $P(X = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ (δες προηγούμενη άσκηση). Έπειτα έστω $p_0 = 7/10$, η πιθανότητα να επιλέξουμε κόκκινο σφαιρίδιο σε μία εξαγωγή. Επειδή οι εξαγωγές είναι με επανάθεση, τα αποτελέσματά τους είναι ανεξάρτητα και ισόνομα, έτσι η $Y|X = k$ έχει τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους k και p_0. Αφού έχουμε πείραμα σε δύο βήματα, εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας δεσμεύοντας ως προς το αποτέλεσμα του πρώτου βήματος.

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= \sum_{k=2}^{\infty} P(X=k)P(Y=1|X=k) = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)p^2(1-p)^{k-2}kp_0(1-p_0)^{k-1} \\ &= p^2p_0(1-p_0)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\{(1-p)(1-p_0)\}^{k-2} \\ &= p^2p_0(1-p_0)\frac{2}{\{1-(1-p)(1-p_0)\}^3} = \frac{2p^2p_0(1-p_0)}{(p+p_0-pp_0)^3}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε τον εξής υπολογισμό

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)'' = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3},$$

που ισχύει για $x \in (-1, 1)$.

4.7. (α) Από τη θεωρία έχουμε ότι η X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 1/6$. Η συνάρτηση πιθανότητας είναι $f_X(x) = (1-p)^{x-1}p\mathbf{1}_{x\in\mathbb{N}^+}$, η μέση της τιμή είναι $1/p$, και η διασπορά $(1-p)/p^2$.

Για τα πιο κάτω ερωτήματα, συμβολίζουμε με A_i το γεγονός να εμφανιστεί η ένδειξη i τουλάχιστον μια φορά πριν εμφανιστεί για πρώτη φορά η ένδειξη 5, για $i = 1, 2, 3, 4, 6$.

(β)

$$\begin{aligned} P(A_3^c|X=k) &= \frac{P(A_3^c \cap \{X=k\})}{P(X=k)} \\ &= \frac{P(\text{Στις δοκιμές } 1,2,\dots,k-1 \text{ δεν εμφανίζεται } 3 \text{ ή } 5 \text{ και στην } k \text{ εμφανίζεται } 5)}{(5/6)^{k-1}(1/6)} \\ &= \frac{(4/6)^{k-1}(1/6)}{(5/6)^{k-1}(1/6)} = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

(γ) $P(A_3) = 1 - P(A_3^c)$ και

$$\begin{aligned} P(A_3^c) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)P(A_3^c|X=k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\frac{1}{1-(2/3)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άρα $P(A_3) = 1/2$.

(δ)

$$\begin{aligned} P(A_3 \cap A_6) &= 1 - P(A_3^c \cup A_6^c) = 1 - \{P(A_3^c) + P(A_6^c) - P(A_3^c \cap A_6^c)\} \\ &= P(A_3^c \cap A_6^c) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_3^c \cap A_6^c \cap \{X=k\}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $P(A_3^c) = P(A_6^c) = 1/2$ (συμμετρία και το προηγούμενο ερώτημα). Έπειτα, το ενδεχόμενο $A_3^c \cap A_6^c \cap \{K = k\}$ σημαίνει ότι στις k ρίψεις, οι πρώτες $k-1$ δεν φέρνουν τις ενδείξεις 3, 6, 5 ενώ η k είναι 5. Αυτό έχει πιθανότητα $(3/6)^{k-1}(1/6)$.

4.8. Για την πρώτη μέση τιμή, υπολογίζουμε

$$E(t^X) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} = (pt+q)^n$$

Για τη δεύτερη μέση τιμή, ένας τρόπος είναι ο εξής. Θέτουμε $\theta = p/(1-p)$. Τότε

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{X+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(1-p)^{n+1}}{p} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\theta^{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{(1-p)^{n+1}}{p} \int_0^\theta \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k \, dz = \frac{(1-p)^{n+1}}{p} \int_0^\theta (1+z)^n dz \\ &= \frac{(1-p)^{n+1}}{p} \frac{(1+\theta)^{n+1}-1}{n+1} = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}. \end{aligned}$$

4.9. Αν η παράμετρος της Poisson είναι λ, τότε απο τα δεδομένα $e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = 12 e^{-\lambda}\lambda^2/2$. Και επειδή $\lambda > 0$, προκύπτει ότι $\lambda = 1/2$. Έπειτα $P(X \ge 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-1/2}$.

4.10. Έστω $\lambda = 120, p = 1/4$. Για $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(X=j)P(Y=k|X=j) = \sum_{j=k}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k} \\ &= e^{-\lambda} p^k \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \frac{j!}{k!(j-k)!} (1-p)^{j-k} = e^{-\lambda}\lambda^k \frac{1}{k!} p^k \sum_{j=k}^{\infty} \lambda^{j-k} \frac{1}{(j-k)!} (1-p)^{j-k} \\ &= e^{-\lambda}\lambda^k \frac{1}{k!} p^k e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Για την πρώτη ισότητα της τελευταίας γραμμής κάναμε την αντικατάσταση $n = j-k$ στο άθροισμα και χρησιμοποιήσαμε τη δυναμοσειρά της e^x. Συμπεραίνουμε ότι η Y ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda p = 30$.

4.11. Ισχύει $X \sim \mathrm{Bin}(100, p)$. Η Poisson που την προσεγγίζει είναι η $Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ με $\lambda = 100p = 0.1$. Έπειτα

$$\begin{aligned} P(X \le 1) &= P(X=0) + P(X=1) = (1-p)^{100} + 100p(1-p)^{99} \approx 0.995362, \\ P(X=3) &= \binom{100}{3} p^3 (1-p)^{97} \approx 1467 \times 10^{-7}, \\ P(X=10) &= \binom{100}{10} p^{10} (1-p)^{90} \approx 1581 \times 10^{-20}. \end{aligned}$$

Οι αντίστοιχες προσεγγίσεις είναι

$$\begin{aligned} P(Y \le 1) &= P(Y=0) + P(Y=1) = e^{-0.1} + e^{-0.1}0.1 \approx 0.995321, \\ P(Y=3) &= e^{-0.1}(0.1)^3/3! \approx 1508 \times 10^{-7}, \\ P(Y=10) &= e^{-0.1}(0.1)^{10}/10! \approx 2493 \times 10^{-20}. \end{aligned}$$

4.12. (α) Επειδή η h παίρνει θετικές τιμές, η μέση τιμή $E(Xh(X))$ ορίζεται και έχουμε

$$E(Xh(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} kh(k)\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{r=0}^{\infty} h(r+1)\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^{r+1}}{r!}$$
$$= \lambda \sum_{r=0}^{\infty} h(r+1)\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!} = \lambda E(h(X+1)).$$

(β) Έστω $a_k = P(X = k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Για $k \in \mathbb{N}^+$, εφαρμόζοντας την (1) για τη συνάρτηση h με $h(k) = 1$ και $h(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\}$, παίρνουμε

$$kP(X = k) = \lambda P(X = k-1).$$

Δηλαδή $a_k = a_{k-1}\lambda/k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$. Άρα $a_k = a_0\frac{\lambda^k}{k!}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$ δίνει $a_0 = e^{-\lambda}$. Δηλαδή

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

4.13. Επειδή κάθε φορά η σύνθεση της κάλπης είναι ίδια, σε κάθε εξαγωγή, η πιθανότητα το σφαιρίδιο να είναι μαύρο είναι $p = 20/(60+20) = 1/4$. Ονομάζουμε X τον αριθμό των δοκιμών ως την πρώτη εμφάνιση μαύρου σφαιριδίου. Η X είναι γεωμετρική με παράμετρο $p = 1/4$.

(α) $P(X = 7) = (1-p)^6 p$.

(β) $P(X \geq 10) = P($οι πρώτες 9 δοκιμές είναι αποτυχίες$) = (1-p)^9$.

(γ) $E(X-1) = (1/p) - 1 = 3$.

4.14. Έστω $X_1 :=$ αριθμός δοκιμών ως την εμφάνιση ενός από τα 3, 4 και $X_2 :=$ αριθμός των επιπλέον δοκιμών ως την εμφάνιση του άλλου από τα 3, 4. Τότε

$$X_1 \sim \text{Γεωμετρική}(1/3),$$
$$X_2 \sim \text{Γεωμετρική}(1/6).$$

Αυτό γιατί η X_1 μετράει δοκιμές ως την πρώτη επιτυχία, με επιτυχία να σημαίνει εμφάνιση του 3 ή του 4. Η πιθανότητα μιας τέτοιας επιτυχίας είναι 2/6=1/3. Έπειτα, αν π.χ. εμφανίζεται πρώτο το 4, η X_2 μετράει δοκιμές ως την πρώτη επιτυχία, με επιτυχία τώρα να σημαίνει την εμφάνιση του 3. Η πιθανότητα αυτής της επιτυχίας είναι 1/6.
Επειδή $X = X_1 + X_2$, η γραμμικότητα της μέσης τιμής δίνει

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) = (1/3)^{-1} + (1/6)^{-1} = 3 + 6 = 9.$$

4.15. $N = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3$, όπου Y_i ο αριθμός των ημερών για να επισκεφθεί ακόμα μια πρωτεύουσα που δεν έχει επισκεφθεί όταν έχει ήδη επισκεφθεί i διαφορετικές πρωτεύουσες.
Προφανώς, $Y_0 = Y_1 = 1$.Επίσης

$$Y_2 \sim \text{Γεωμετρική}(2/3),$$
$$Y_3 \sim \text{Γεωμετρική}(1/3).$$

Οπότε $E(N) = 1 + 1 + \dfrac{3}{2} + 3 = \dfrac{13}{2}$.

4.16. Έστω X ο αριθμός των απαιτούμενων δοκιμών ώσπου να δούμε και τα n διαφορετικά κουπόνια, και για $i = 1, 2, \ldots, n$, έστω X_i ο αριθμός των δοκιμών που απαιτείται από τη στιγμή που έχουμε δεί $i-1$ διαφορετικά κουπόνια μέχρι τη στιγμή που θα δούμε ένα νέο διαφορετικό απο τα προηγούμενα. Η X_i είναι γεωμετρική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $p_i = (n-(i-1))/n$, και επομένως με μέση τιμή $1/p_i = n/(n-i+1)$. Επειδή $X = X_1 + \cdots + X_n$, η γραμμικότητα της μέσης τιμής δίνει

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \approx n \log n$$

για μεγάλο n. Περισσότερα για την τελευταία προσέγγιση δες στην Πρόταση 21.21, Απειροστικός Λογισμός, Τόμος ΙΙ, Νεγρεπόντης-Γιωτόπουλος-Γιαννακούλιας.

4.17. (α) $10-1=9$. (β) $10/3-1=7/3$. (γ) $8\cdot 10-1$. Αρνητική διωνυμική. (δ) $4\cdot 2$. Αρνητική διωνυμική.
(ε) Εδω έχουμε το πρόβλημα του συλλέκτη κουπονιών χωρίς να ζητάμε να δούμε όλα τα διαφορετικά κουπόνια, απλώς τρία συγκεκριμένα. Με το ίδιο σκεπτικό βρίσκουμε ότι η μέση τιμή είναι

$$\frac{10}{3} + \frac{10}{2} + 10 = 18 + \frac{1}{3}.$$

Απαντήσεις §5

5.1. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που δίνει τον όγκο των πωλήσεων αυτή τη συγκεκριμένη εβδομάδα και a η χωρητικότητα της δεξαμενής. Θέλουμε

$$P(X > a) = 10^{-2}.$$

Προφανώς $a \in (0,1)$, αλλιώς το αριστερό μέλος της ισότητας θα ισούται με 0 ή 1 (αφού η X παίρνει τιμές στο $(0,1)$). Έτσι,

$$10^{-2} = \int_a^\infty f(x)\,dx = 5\int_a^1 (1-x)^4\,dx = -(1-x)^5|_a^1 = (1-a)^5.$$

Άρα $a = 1 - 10^{-2/5}$.

5.2. Σε αυτή την άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty x^a\,dx$ είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν $a < -1$ (Απλή άσκηση. Υπάρχει στο φυλλάδιο της η-τάξης που έχει θέμα τα γενικευμένα ολοκληρώματα).

(α) Προφανώς πρέπει να ισχύει $c > 0$. Θα δείξουμε ότι οι επιτρεπτές τιμές είναι $r > 1$. Αυτό γιατί πρέπει η f_X να έχει ολοκλήρωμα 1. Υπολογίζουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\,dt = c\int_1^\infty t^{-r}\,dt.$$

Με βάση την παρατήρηση στην αρχή της λύσης, αυτό το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο αν και μόνο $-r < -1$. Δηλαδή $r > 1$. Και τότε επιλέγοντας κατάλληλα την τιμή της σταθεράς c κατορθώνουμε το ολοκλήρωμα να ισούται με 1. Όταν $r \leq 1$, το ολοκλήρωμα ισούται με ∞ για οποιαδήποτε επιλογή της σταθεράς $c > 0$. Άρα κάθε τιμή $r \leq 1$ είναι μη επιτρεπτή.
(β) Για $r > 1$, υπολογίζουμε

$$c\int_1^\infty t^{-r}\,dt = c\frac{t^{-r+1}}{(-r+1)}\bigg|_1^\infty = c\left(0 - \frac{1}{-r+1}\right) = \frac{c}{r-1}.$$

Άρα $c = r-1$.
(γ) $EX = \int_1^\infty x(r-1)x^{-r}\,dx = (r-1)\int_1^\infty x^{1-r}\,dx$. Με βάση την παρατήρηση στην αρχή της λύσης, έχουμε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν $1-r < -1$. Δηλαδή αν $r > 2$.
(δ) Έχουμε $E(X^a) = (1-r)\int_1^\infty x^{a-r}\,dx$. Όμοια όπως στο (γ), αυτό το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν $a - r < -1$, δηλαδή αν $a < r-1$.

5.3. Οι εξισώσεις $(a+b)/2=5, (b-a)^2/12=3$ δίνουν $a=2, b=8$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(|X-5|>2)=P(X\in(2,3))+P(X\in(7,8))=\frac{1}{6}(1+1)=\frac{1}{3}.$$

5.4. Έχουμε πείραμα σε δύο βήματα. Ως συνήθως, δεσμεύουμε ως προς το τι έγινε στο πρώτο βήμα. Έστω N η τυχαία μεταβλητή που καταγράφει το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού. Προφανώς $F_X(t)=0$ για $t<0$ και $F_X(t)=1$ για $t>6$, ενώ για $t\in[0,6]$ έχουμε

$$P(X\le t)=\sum_{i=1}^{6}P(X\le t\,|\,N=i)P(N=i)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\frac{\min\{i,t\}}{i}=\frac{1}{6}\left([t]+t\sum_{t<i\le 6}^{6}\frac{1}{i}\right).$$

Η τρίτη έκφραση έκφραση για τη συνάρτηση κατανομής της X δείχνει ότι αυτή είναι συνεχής. Η τελευταία δείχνει ότι η F_X είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}\backslash\{0,1,\dots,6\}$. Άρα μια πυκνότητα για την X είναι η

$$f_X(t)=\begin{cases}\frac{1}{6}\sum_{t<i\le 6}^{6}\frac{1}{i} & \text{αν } t\in(0,6),\\ 0 & \text{διαφορετικά.}\end{cases}$$

Έπειτα, $E(X)=\int_{\mathbb{R}}tf_X(t)\,dt=...=7/4$. Ο υπολογισμός αυτός είναι πιο άμεσος με χρήση της δεσμευμένης μέσης τιμής, την οποία θα καλύψουμε αργότερα στο μάθημα (δες, π.χ., Άσκηση 9.7).

5.5. Η τυχαία μεταβλητή $Z:=(X-\mu)/\sigma$ ακολουθεί την κατανομή $N(0,1)$. Απο τα δεδομένα,

$$0.2=P\left(Z>\frac{1.85-\mu}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{1.85-\mu}{\sigma}\right)\Longrightarrow\Phi\left(\frac{1.85-\mu}{\sigma}\right)=0.8=\Phi(0.85).$$

Και επειδή η Φ είναι 1-1, παίρνουμε

$$\frac{1.85-\mu}{\sigma}=0.85 \tag{3}$$

Όμοια, βρίσκουμε ότι

$$\Phi\left(\frac{1.70-\mu}{\sigma}\right)=0.1=1-0.9=1-\Phi(1.29)=\Phi(-1.29).$$

Ο τελευταίος υπολογισμός υπαγορεύεται απο τη γραφική παράσταση της πυκνότητας της $N(0,1)$. Άρα

$$\frac{1.70-\mu}{\sigma}=-1.29 \tag{4}$$

Βρίσκουμε από τις (3), (4) ότι $\mu\approx 1.79, \sigma\approx 0.07$

5.6. Θα χρησιμοποιήσουμε το ότι η τυχαία μεταβλητή $Z:=(X-\mu)/\sigma=(X-330)/10$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή για να εκφράσουμε όλες τις ζητούμενες πιθανότητες συναρτήσει της συνάρτησης κατανομής, Φ, της $N(0,1)$.

(α) $P(X>340)=P(Z>1)=1-\Phi(1)\approx 0.158$

(β) $P(X<310)=P(Z<-2)=\Phi(-2)\approx 0.023$

(γ) $P(310<X<340)=P(-2<Z<1)=\Phi(1)-\Phi(-2)\approx 0.818$

(δ) Ο αριθμός N των κουτιών απο τα 10 που έχουν βάρος μικρότερο από 340gr ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n=10$ και $p:=P(X<340)=\Phi(1)\approx 0.84$. Άρα

$$P(N\le 8)=1-P(N>8)=1-P(N=9)-P(N=10)=1-10p^9\,(1-p)-p^{10}.$$

(ε) $E(N)=np\approx 8.41$ όπου το p έχει υπολογιστεί στο προηγούμενο ερώτημα.

5.7. (α) Επειδή η κατανομή είναι συνεχής, έχουμε $P(X = a) = 0$ και $P(X \geq a) = P(X > a)$. Άρα

$$\begin{aligned} &\text{ο } a \text{ είναι διάμεσος} \Leftrightarrow P(X \leq a) = P(X \geq a) \\ &\Leftrightarrow 2P(X \leq a) = P(X \geq a) + P(X \leq a) \Leftrightarrow 2F(a) = 1. \end{aligned}$$

Επειδή η F είναι συνεχής (αντιστοιχεί σε συνεχή κατανομή, δεν έχει άλματα) και

$$F(-\infty) = 0 < 1/2 < 1 = F(\infty),$$

από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ με $F(a) = 1/2$. Άρα τουλάχιστον ένας διάμεσος υπάρχει.

(β) Απο τα επιχειρήματα στο (α) προκύπτει ότι ο $a \in \mathbb{R}$ είναι ένας διάμεσος αν και μόνο αν $F(a) = 1/2$. Στην περίπτωση της κατανομής $N(\mu, \sigma^2)$, η F είναι γνησίως αύξουσα (έχει πυκνότητα θετική σε όλο το $\mathbb{R}$), οπότε υπάρχει μόνο ένας διάμεσος. Θα δείξουμε ότι ισούται με τη μέση τιμή μ. Έχουμε

$$F(\mu) = P(X \leq \mu) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq 0\right) = \frac{1}{2}.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί η $(X - \mu)/\sigma$ έχει κατανομή $N(0, 1)$ και για αυτήν ξέρουμε ότι έχει πυκνότητα άρτια συνάρτηση.

5.8. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} P(X \leq \mu) &= \int_{-\infty}^{\mu} f(t)\,dt \overset{t=\mu-s}{=} \int_0^{\infty} f(\mu - s)\,ds \\ &= \int_0^{\infty} f(\mu + s)\,ds \overset{x=\mu+s}{=} \int_{\mu}^{\infty} f(x)\,dx = P(X \geq \mu). \end{aligned}$$

Το συμπέρασμα έπεται από τον ορισμό του διαμέσου.
Έπειτα, η $f_1(x) := f(\mu+x)$ είναι η πυκνότητα της $X-\mu$ ενώ η $f_2(x) := f(\mu-x)$ είναι η πυκνότητα της $\mu - X$. Εφόσον $f_1 = f_2$, έχουμε ότι οι $X - \mu, \mu - X$ έχουν την ίδια κατανομή και επομένως και την ίδια μέση τιμή (υπάρχει από την υπόθεση). Άρα $E(X) - \mu = \mu - E(X)$, που δίνει το ζητούμενο.
Εναλλακτικά, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x+\mu)f(x+\mu)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x+\mu)f(\mu - x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (2\mu - z)f(z)\,dz = 2\mu - E(X), \end{aligned}$$

και άρα $E(X) = \mu$.

5.9. Εστω $a < b$ πραγματικοί ώστε $f = f' = 0$ στο $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$. Τότε

$$\begin{aligned} E(f'(X)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f'(x)e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\,e^{-x^2/2}\Big|_{x=a}^{x=b} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x)(e^{-x^2/2})'\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x)xe^{-x^2/2}\,dx = E(Xf(X)). \end{aligned}$$

Στην παραγοντική ολοκλήρωση, χρησιμοποιήσαμε το ότι $f(a) = f(b) = 0$.

5.10. Υπολογίζουμε

$$E|Z|^p = \int_{\mathbb{R}} |x|^p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x^p\, e^{-x^2/2}\, dx \overset{x=\sqrt{2y}}{=} \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty y^{(p-1)/2}\, e^{-y}\, dy$$
$$= \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right). \tag{5}$$

Ειδικές περίπτωσεις:

(α) $p = 2k$ με k μη αρνητικό ακέραιο. Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, που ισχύει για κάθε $x > 0$, και την $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

$$E(Z^{2k}) = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1.$$

Αυτόν τον αριθμό τον έχουμε συναντήσει στην Άσκηση 1.35 (α). Είναι το πλήθος των διαφορετικών ζευγαρωμάτων $2k$ διαφορετικών αντικειμένων.

(β) $p = 2k+1$, με k μη αρνητικό ακέραιο. Χρησιμοποιούμε πάλι τη σχέση $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ και το ότι $\Gamma(1) = 1$.

$$E(|Z|^{2k+1}) = \frac{2^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(k+1) = \frac{2^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} k!$$

Τώρα, αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, έχουμε ότι $Z := (X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$, οπότε

$$E|X - \mu| = \sigma E|Z| = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Χρησιμοποιήσαμε την (5) για $p = 1$.

5.11. Το μέγιστο a που ικανοποιεί την $P(X \geq a) \geq 0.95$, δηλαδή την $e^{-a\theta} \geq 0.95$, είναι το $a = -\frac{\log 0.95}{\theta}$. Από τα δεδομένα, αυτό είναι το 2. Επομένως

$$\theta = -\frac{\log 0.95}{2} \approx 0.02564.$$

Ο μέσος όρος της και η διασπορά της X είναι αντίστοιχα $1/\theta \approx 39, 1/\theta^2 \approx 1520$.

5.12. Αν ο a είναι ένας διάμεσος, τότε

$$P(X \geq a) = P(X \leq a) \Longrightarrow e^{-\lambda a} = 1 - e^{-\lambda a} \Longrightarrow a = \frac{\log 2}{\lambda}.$$

Άρα υπάρχει μόνο ένας διάμεσος, το οποίο ήταν αναμενόμενο γιατί η συνάρτηση κατανομής F της εκθετικής είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \infty)$ με $F(0) = 0, F(\infty) = 1$.

5.13. Για $k = 0$ ισχύει προφανώς. Αν ισχύει για έναν $k \geq 0$ φυσικό, τότε

$$E(X^{k+1}) = \int_0^\infty x^{k+1} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^\infty x^{k+1} (-e^{-\lambda x})'\, dx = (k+1) \int_0^\infty x^k e^{-\lambda x}\, dx$$
$$= \frac{k+1}{\lambda} \int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{k+1}{\lambda} E(X^k) = \frac{(k+1)!}{\lambda^{k+1}}.$$

Στην παραγοντική ολοκλήρωση χρησιμοποιήσαμε το ότι $\lim_{x\to\infty} x^{k+1} e^{-\lambda x} = 0$ επειδή $\lambda > 0$.

5.14. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση κατανομής της Y. Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$F_Y(t) := P(Y \leq t) = P(X^2 \leq t),$$

το οποίο είναι 0 για $t < 0$. Για $t \geq 0$,

$$P(X^2 \leq t) = P(|X| \leq \sqrt{t}) = P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}).$$

Επειδή η X έχει πυκνότητα, η F_X είναι συνεχής. Από τα πιο πάνω έπεται ότι η F_Y είναι συνεχής (μένει να ελέγξει κανείς το ότι $F_Y(0-) = 0 = F_Y(0+)$). Επειδή η πυκνότητα της X είναι ασυνεχής μόνο στα $-1, 1$, έχουμε ότι η F_Y και διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ με $F_Y'(t) = 0$ για $t < 0$ ενώ για $t > 0, t \neq 1$ έχουμε

$$F_Y'(t) = \left(f_X(\sqrt{t}) + f_X(-\sqrt{t})\right) \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} f_X(\sqrt{t}).$$

Η τελευταία ποσότητα ισούται με 0 για $t \in (0,1)$, και με $t^{-3/2}/2$ για $t > 1$. Άρα η F_Y' υπάρχει στο $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ και είναι συνεχής σε αυτό το σύνολο. Έπεται[11] ότι μια πυκνότητα για την Y είναι η $f_Y(t) = (1/2)t^{-3/2}\mathbf{1}_{t>1}$.

5.15. Όμοια όπως στην προηγούμενη άσκηση, $F_Y(t) = 0$ για $t < 0$ και $F_Y(t) = 1$ για $t > 1$, ενώ για $t \in [0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \le t) = P(Y \le t, X \le 1) + P(Y \le t, X > 1) = P(X \le t) + P(1/X \le t) \\ &= F_X(t) + 1 - F_X(1/t). \end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας. Εύκολα βλέπουμε ότι η F_Y είναι συνεχής. Για $t \in (0,1)$ η τελευταία σχέση για την F_Y δίνει με παραγώγιση

$$F_Y'(t) = f_X(t) + t^{-2} f_X(1/t) = e^{-t} + t^{-2} e^{-1/t}.$$

Άρα μια πυκνότητα για την Y είναι η

$$f_Y(t) = \begin{cases} e^{-t} + t^{-2}e^{-1/t} & \text{αν } t \in (0,1), \\ 0 & \text{αν } t \in \mathbb{R}\backslash(0,1). \end{cases}$$

5.16. Υπολογίζουμε

$$E(Y) = E(X) + 2E(1/X) = \int_1^2 x\,dx + 2\int_1^2 x^{-1}\,dx = 3/2 + 2\log 2.$$

Η συνάρτηση $h(x) = x + 2x^{-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, \sqrt{2}]$ με εικόνα το $[2\sqrt{2}, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\sqrt{2}, 1]$ με εικόνα πάλι το $[2\sqrt{2}, 3]$. Για $y \in [\sqrt{2}, 1]$ η εξίσωση $h(x) = y$ έχει δύο ρίζες που ανήκουν στο $[1,2]$, τις $x_1(y) = (y - \sqrt{y^2-8})/2, x_2(y) = (y + \sqrt{y^2-8})/2$. Έτσι, έχουμε ότι

$$F_Y(y) = P(h(X) \le y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } y \ge 3, \\ 0 & \text{αν } y < 2\sqrt{2} \end{cases}$$

ενώ για $y \in [2\sqrt{2}, 3)$ έχουμε $F_Y(y) = P(h(X) \le y) = P(X \in [x_1(y), x_2(y)]) = x_2(y) - x_1(y) = \sqrt{y^2 - 8}$. Η F_Y είναι συνεχής με παράγωγο

$$F_Y'(y) = \frac{y}{\sqrt{y^2-8}} \mathbf{1}_{(2\sqrt{2},3)}(y),$$

που υπάρχει στο $\mathbb{R}\backslash\{2\sqrt{2}, 3\}$, και η παράγωγος είναι συνεχής σε αυτό το σύνολο. Κατά τα γνωστά, μια πυκνότητα για την Y είναι η

$$f_Y(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2-8}} \mathbf{1}_{(2\sqrt{2},3)}(t).$$

[11]Χρησιμοποιούμε την εξής πρόταση: Αν η συνάρτηση κατανομής F_Y μιας τυχαίας μεταβλητής Y είναι συνεχής και η F_Y' υπάρχει και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\backslash A$ όπου το A είναι πεπερασμένο, τότε η Y έχει πυκνότητα και μάλιστα μια πυκνότητα είναι η $f_Y(t) := F_Y'(t)\mathbf{1}_{t\in\mathbb{R}\backslash A}$.

5.17. Επειδή $P(X \geq 0) = 1$, έχουμε ότι ο Y είναι με πιθανότητα 1 ένας μη αρνητικός ακέραιος. Για $k \in \mathbb{N}$,

$$P([X] = k) = P(k \leq X < k+1) = \lambda \int_k^{k+1} e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda})$$
$$= (1-p)^k p,$$

με $p = 1 - e^{-\lambda}$.

Σημείωση: Εύκολα βλέπουμε ότι η $Y + 1$ ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p.

5.19. (β) Για $t \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(t) = P\left(\frac{U}{1-U} \leq e^t\right) = P\left(U \leq \frac{e^t}{1+e^t}\right) = \frac{1}{1+e^{-t}}.$$

Πυκνότητα $f_Y(t) = F_Y'(t) = e^{-t}(1+e^{-t})^{-2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

5.20. Έστω $Y = X^2$. Η συνάρτηση κατανομής της Y ισούται με 0 στο $(-\infty, 0)$ γιατί $P(Y < 0) = P(\emptyset) = 0$. Όμοια, $F_Y(0) = P(Y \leq 0) = P(X = 0) = 0$ γιατί η X έχει συνεχή κατανομή. Για $x > 0$,

$$F_Y(x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}).$$

Αν f είναι η πυκνότητα της $N(0,1)$, παραγωγίζουμε την τελευταία ισότητα και παίρνουμε

$$F_Y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\Big) = \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x^{-1/2} e^{-x/2}.$$

Έτσι, η F_Y είναι συνεχής (στο $\mathbb{R}$) και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ με παράγωγο που είναι συνεχής σε αυτό το σύνολο. Άρα η Y έχει πυκνότητα

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x^{-1/2} e^{-x/2} \mathbf{1}_{x>0} = \frac{(1/2)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(1/2)}\, x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x/2} \mathbf{1}_{x>0},$$

η οποία είναι η πυκνότητα της $\Gamma(1/2, 1/2)$. Χρησιμοποιήσαμε το ότι $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

5.21. Όμοια όπως στην Άσκηση 5.14, $F_Y(t) = 0$ για $t < 0$, ενώ για $t \geq 0$ έχουμε

$$F_Y(t) = P(X^{1/c} \leq t) = P(X \leq t^c) = F_X(t^c).$$

Για $t > 0$ η τελευταία σχέση για την F_Y δίνει με παραγώγιση

$$F_Y'(t) = f_X(t^c)\, c\, t^{c-1}.$$

Κατά τα γνωστά, έπεται ότι μια πυκνότητα για την Y είναι η

$$f_Y(t) = \theta c e^{-\theta t^c} t^{c-1} \mathbf{1}_{t>0}.$$

5.22. Έστω f_X η πυκνότητα της X. Εύκολα βρίσκουμε ότι η πυκνότητα της Y είναι $f_Y(y) = \frac{1}{r} f_X(\frac{y}{r})$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο για την f_X (δηλαδή $f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}$), βρίσκουμε ότι η πυκνότητα της Y είναι αυτή της $\Gamma(a, \lambda/r)$.

5.23. Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$F_X(t) := P(X \leq t) = P(F^{-1}(U) \leq t) = P(U \leq F(t)) = F(t).$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$ και ότι ο $F(t)$ είναι ένας αριθμός στο $(0,1)$. Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η F είναι γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών το $(0,1)$, οπότε για $t \in \mathbb{R}$ και $U \in (0,1)$ έχουμε

$$F^{-1}(U) \leq t \Longleftrightarrow U \leq F(t).$$

Απαντήσεις §6

6.1. Για $x, y \in \{1, 2, \cdots, 50\}$ με $y - x \geq 5$,

$$f(x, y) = \frac{6 \times 5 \times (y - x - 1)_4}{(50)_6}.$$

Διαφορετικά, $f(x, y) = 0$. Θεωρουμε ότι καταγράφουμε τα σφαιρίδια με τη σειρά με την οποία εξάγονται, έχουμε δηλαδή διάταξη. Στον αριθμητή, το 6 είναι το πλήθος των επιλογών για τη θέση στην οποία εμφανίζεται η ένδειξη y, το 5 είναι το πλήθος των επιλογών για τη θέση στην οποία εμφανίζεται η ένδειξη x. Μένουν 4 θέσεις στις οποίες θα βάλουμε μια διάταξη 4 σφαριδίων με αριθμούς γνησίως ανάμεσα στα x, y.

6.2. (α) $c = 2$.

(β) $f_X(x) = 3x^2 \mathbf{1}_{x \in (0,1)}$, $f_Y(x) = 2y \mathbf{1}_{y \in (0,1)}$.

(γ) Έστω

$$\begin{aligned} A &:= \{(x, y) \in (0, 1)^2 : x < 1/3\}, \\ B &:= \{(x, y) \in (0, 1)^2 : y > 2x\}. \end{aligned}$$

Τότε

$$P(X < 1/3) = \iint_A f(x, y)\, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1/3} 6x^2 y\, dxdy = (1/3)^3 = 1/27,$$

και

$$P(Y > 2X) = \iint_B f(x, y)\, dxdy = \int_0^1 \int_0^{y/2} 6x^2 y\, dxdy = \int_0^1 \frac{y^4}{4}\, dy = 1/20.$$

Για τον προσδιορισμό των ορίων της ολοκλήρωσης, βοηθάει πολύ να κάνουμε σχήμα. Για την πρώτη πιθανότητα μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει την περιθώρια της X, αλλά προτιμάμε την πιο πάνω γενική μέθοδο.

6.3. (α) Η πυκνότητα πρέπει να έχει ολοκλήρωμα 1. Έτσι

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y)\, dxdy = \int_0^1 \int_0^2 c \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) dydx = c \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{x}{2} \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^2 dx \\ &= c \int_0^1 (2x^2 + x) dx = c \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^1 = c \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Άρα $c = 6/7$.
(β) Κατά τα γνωστά, η X έχει πυκνότητα $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)\, dy$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ που είναι σαφώς 0 για $x \in \mathbb{R} \backslash (0, 1)$ ενώ για $x \in (0, 1)$ ισούται με

$$f_X(x) = \int_0^2 \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) dy = \frac{6}{7} \left[x^2 y + \frac{x}{2} \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^2 = \frac{6(2x^2 + x)}{7}.$$

(γ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}} f_{X,Y}(x, y)\, dxdy = \int_0^1 \int_0^x \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) dydx \\ &= \int_0^1 \frac{6}{7} \left[x^2 y + \frac{x}{2} \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^x dx = \frac{6}{7} \int_0^1 \frac{5x^3}{4} dx = \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{56}. \end{aligned}$$

(δ) Έχουμε

$$P\left(Y>\frac{1}{2}\Big|X<\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left(X<\frac{1}{2},\ Y>\frac{1}{2}\right)}{P\left(X<\frac{1}{2}\right)}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{6}{7}\left(u^2+\frac{xy}{2}\right)dydx}{\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{6(2x^2+x)}{7}\,dx}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}\left[x^2y+\frac{x}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{y=\frac{1}{2}}^{2}dx}{\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2x^2+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{16}x\right)dx}{\frac{1}{12}+\frac{1}{8}}=\frac{\frac{2}{3}(\frac{1}{2})^3+\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{6}(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{32}(\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{12}+\frac{1}{8}}.$$

(ε) Έχουμε

$$E(X)=\int_0^1 xf_X(x)dx=\frac{6}{7}\int_0^1(2x^3+x^2)dx=\frac{6}{7}\left[\frac{2x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{1}=\frac{1}{2}.$$

6.4. Για $q=1$, το πείραμα τύχης αντιστοιχεί στην τυχαία (ομοιόμορφη) επιλογή σημείου από το σύνολο $\Omega=\{(x,y):\ -1<x<1,\ -1<y<1\}$. Το ενδεχόμενο η εξίσωση να έχει πραγματικές λύσεις αντιστοιχεί στο σύνολο $A=\{(x,y)\in\Omega:\ x^2-4y\geq 0\}$. Το εμβαδό του Ω είναι $E(\Omega)=4$ ενώ του A, $E(A)=2+\int_{-1}^{1}(x^2/4)dx=13/6$. Τελικά, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{E(A)}{E(\Omega)}=\frac{\frac{13}{6}}{4}=\frac{13}{24}\simeq 0,5417$$

Στη γενική περίπτωση που οι αριθμοί B,C επιλέγονται από το $(-q,q)$ δουλεύουμε όμοια (ένα σχήμα βοηθάει) και έχουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{E(A)}{E(\Omega)}=\begin{cases}\dfrac{2q^2+2\int\limits_0^q\frac{x^2}{4}dx}{4q^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{q}{24} & \text{αν } 0<q<4,\\[2ex] \dfrac{2q^2+2[\int\limits_0^{2\sqrt{q}}\frac{x^2}{4}dx+q(q-2\sqrt{q})]}{4q^2}=1-\dfrac{2}{3\sqrt{q}} & \text{αν } q\geq 4.\end{cases}$$

6.5. Ένα σχήμα βοηθάει. Το σύνολο των (x,y) στο $(0,1)\times(0,1)$ για τα οποία ο ακέραιος που είναι εγγύτερα στο πηλίκο y/x είναι ένας από τους 0, 2, 4,... είναι ένωση ξένων μεταξύ τους τριγώνων.

6.6. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να αποτελούν τρια τμήματα με μήκη c,d,e τις πλευρές ενός τριγώνου είναι να ικανοποιούνται οι τρεις τριγωνικές ανισότητες (είναι μια απλή άσκηση γεωμετρίας), δηλαδή καθένα να είναι μικρότερο από το άθροισμα των μηκών των δύο άλλων. Και επειδή στην περίπτωση που μελετάμε, το άθροισμα των μηκών είναι 1, βλέπουμε ότι αυτό ισοδυναμεί με το καθένα από τα τρία τμήματα να έχει μήκος στο $(0,1/2)$ (π.χ. η $c<d+e=1-c$ ισοδυναμεί με $c<1/2$).

(α) Έστω X,Y οι αποστάσεις των δύο σημείων από το A. Από την υπόθεση, οι X,Y είναι ανεξάρτητες με κατανομή ομοιόμορφη στο $(0,1)$. Έστω ότι παίρνουν τις τιμές x,y. Αν $x<y$ τότε $c=x,d=y-x,e=1-y$ και θέλουμε $x<1/2,y-x<1/2,y>1/2$ ενώ αν $y<x$ τότε πρέπει $y<1/2,x-y<1/2,x>1/2$. Θέτοντας

$$C:=\{(x,y)\in(0,1)^2: x<1/2,y-x<1/2,y>1/2 \text{ ή } y<1/2,x-y<1/2,x>1/2\}$$

(κάντε σχήμα) έχουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $P((X,Y)\in C)=$ εμβαδόν$(C)=1/4$.

(β) Έστω U_1,U_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή ομοιόμορφη στο $(0,1)$. Τότε τα τρια τμήματα είναι τα $1-U_1,U_1U_2,U_1(1-U_2)$ ($1-U_1$ είναι το πρώτο κομμάτι που κόβουμε) και η απαίτηση να έχουν το καθένα μήκος μικρότερο του 1/2 ισοδυναμεί με

$$U_1 > \frac{1}{2}, U_2 < \frac{1}{2U_1}, 1 - U_2 < \frac{1}{2U_1}.$$

Η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου είναι

$$P\left(U_1 \in (1/2, 1), 1 - \frac{1}{2U_1} < U_2 < \frac{1}{2U_1}\right) = \int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{2x} - \left(1 - \frac{1}{2x}\right)\right) dx = \log 2 - \frac{1}{2}.$$

6.7. Έστω η ευθεία $\Delta := \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$, δηλαδή η διχοτόμος του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου (λέγεται και διαγώνιος του $\mathbb{R}^2$). Τότε

$$P(X = Y) = P((X, Y) \in \Delta) = \iint_{\Delta} f(x, y)\, dxdy = 0$$

γιατί είναι ένα διπλό ολοκλήρωμα πάνω σε μια γραμμή (η οποία έχει εμβαδόν 0).

6.8. (α) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_{X\wedge Y}(t) &= P(X \wedge Y \leq t) = 1 - P(X \wedge Y > t) = 1 - P(X > t, Y > t) \\ &= 1 - P(X > t)P(Y > t) = 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t)) \\ &= F_X(t) + F_Y(t) - F_X(t)F_Y(t) \end{aligned}$$

(β) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$F_{X\vee Y}(t) = P(X \vee Y \leq t) = P(X \leq t, Y \leq t) = P(X \leq t)P(Y \leq t) = F_X(t)F_Y(t).$$

(γ) Για κάθε $s, t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_{X\wedge Y, X\vee Y}(s, t) &= P(X \wedge Y \leq s, X \vee Y \leq t) = P(X \vee Y \leq t) - P(X \wedge Y > s, X \vee Y \leq t) \\ &= F_X(t)F_Y(t) - P(s < X \leq t)P(s < Y \leq t). \end{aligned}$$

Η πιθανότητα $P(s < X \leq t)$ είναι 0 αν $s > t$ ενώ αν $s \leq t$ ισούται με $F_X(t) - F_X(s)$. Ανάλογη παρατήρηση ισχύει για την $P(s < Y \leq t)$. Οπότε

$$F_{X\wedge Y, X\vee Y}(s, t) = \begin{cases} F_X(t)F_Y(t) & \text{αν } s > t, \\ F_X(t)F_Y(s) + F_X(s)F_Y(t) - F_X(s)F_Y(s) & \text{αν } s \leq t. \end{cases}$$

6.9. Έστω

$$A_0 := \{\text{κάποιες από τις } X_1, X_2, X_3, X_4 \text{ είναι ίσες}\}.$$

Τότε από την Άσκηση 6.7,

$$P(A_0) \leq \sum_{1 \leq i,j \leq 4, i \neq j} P(X_i = X_j) = 0.$$

Τώρα, για οποιαδήποτε μετάθεση (i_1, i_2, i_3, i_4) των $\{1, 2, 3, 4\}$ ισχύει

$$P(X_{i_1} < X_{i_2} < X_{i_3} < X_{i_4}) = P(X_1 < X_2 < X_3 < X_4) \tag{6}$$

γιατί η (τετραδιάστατη) τυχαία μεταβλητή $(X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}, X_{i_4})$ έχει την ίδια κατανομή με την (X_1, X_2, X_3, X_4), έχουν και οι δυό πυκνότητα $\tilde{f}(x, y, z, w) = f(x)f(y)f(z)f(w)$. [Ένα ανάλογο και απλούστερο σενάριο. Ρίχνουμε ένα ζάρι 5 φορές και γράφουμε τα αποτελέσματα με τη σειρά με την οποία εμφανίζονται. Η πιθανότητα να φέρουμε (6, 3, 6, 2, 5) είναι η ίδια με το να φέρουμε (3, 6, 6, 5, 2)]

Έστω S_4 το σύνολο των μεταθέσεων των $\{1, 2, 3, 4\}$. Επειδή

$$\Omega = A_0 \cup \bigcup_{(i_1, i_2, i_3, i_4) \in S_4} \{X_{i_1} < X_{i_2} < X_{i_3} < X_{i_4}\}$$

είναι ένωση ξένων ανά δύο συνόλων (διαμέριση του Ω) και $P(A_0)=0$ (έλλειψη ισοπαλιών), έπεται λόγω της (6) ότι

$$1 = |S_4| \times P(X_1 < X_2 < X_3 < X_4) = 4! P(X_1 < X_2 < X_3 < X_4),$$

δηλαδή το ζητούμενο.
Όταν έχουμε n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνεχή κατανομή, τότε

$$P(X_{i_1} < X_{i_2} < \cdots < X_{i_n}) = \frac{1}{n!}$$

για κάθε μετάθεση $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ των $\{1, 2, \cdots, n\}$.

6.10. (β) Υπολογίζουμε πρώτα τις πυκνότητες των X, Y. Επειδή $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$, έχουμε ότι $f_X(x) = 0$ για $x \in \mathbb{R}\backslash(0,1)$, ενώ για $x \in (0,1)$ έχουμε

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{1}{x}\,dy = 1.$$

Άρα $f_X(x) = \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμοια, $f_Y(y) = 0$ για $y \in \mathbb{R}\backslash(0,1)$, ενώ για $y \in (0,1)$ έχουμε

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = -\log y.$$

Άρα $f_Y(y) = -\log y\,\mathbf{1}_{(0,1)}(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι οι δεσμευμένες πυκνότητες $f_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y_0)$, $f_{Y\,|\,X}(\cdot\,|\,x_0)$ έχουν νόημα ακριβώς για $x_0, y_0 \in (0,1)$ και ισούνται με

$$\begin{array}{lll} f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y_0) & = -\frac{1}{x\log y_0}\mathbf{1}_{(y_0,1)}(x) & \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ f_{Y\,|\,X}(y\,|\,x_0) & = \frac{1}{x_0}\,\mathbf{1}_{(0,x_0)}(y) & \text{για κάθε } y \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι η $Y\,|\,X = x_0$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, x_0)$.

6.11. (α) Οι U, V είναι ανεξάρτητες έτσι $f_{U,V}(u,v) = f_U(u) f_V(v)$ για κάθε $u, v \in \mathbb{R}$. Βρίσκουμε λοιπόν τις f_U, f_V.

Είναι φανερό ότι η U παίρνει τιμές στο [0,1]. Για $0 \le u \le 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_U(u) = P(XY \le u) &= P(XY \le u, Y \le u) + P(XY \le u, Y > u) = \\ &= P(Y \le u) + P(X \le u/Y, Y > u) = u + \int_u^1 \frac{u}{y}dy = u(1 - \log u). \end{aligned}$$

Η F_U είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ με συνεχή παράγωγο εκεί την $-\log u \mathbf{1}_{u \in (0,1)}$. Έτσι μια πυκνότητα για την U είναι η $f_U(u) = -\log u \mathbf{1}_{u\in(0,1)}$. Κατά τα γνωστά, βρίσκουμε ότι μια πυκνότητα για την $V = Z^2$ είναι η $f_V(v) = (1/(2\sqrt{v}))\mathbf{1}_{v \in (0,1)}$.

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} P(XY \le Z^2) = P(U \le V) &= \iint\limits_{u \le v} f_{U,V}(u,v)\,dudv = \int_0^1 \int_0^v \frac{-\log u}{2\sqrt{v}} dudv \\ &= -\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{v}} \int_0^v \log u\,dudv = -\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{v}} [u \log u - u]_0^v dv \\ &= -\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{v}} (v \log v - v) dv = \ldots = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Πιο άμεσα,

$$P(XY \le Z^2) = \int_0^1 \int_0^1 \int_{\sqrt{xy}}^1 dzdydx = \int_0^1 \int_0^1 (1-\sqrt{xy})dydx = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{x}\left[\frac{\sqrt{y^3}}{3/2}\right]_{y=0}^1\right)dx$$
$$= \int_0^1 \left(1-\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)dx = 1 - \frac{2}{3}\left[\frac{\sqrt{x^3}}{3/2}\right]_{x=0}^1 = 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

6.12. $F_Z(z) = 0$ για $z < 0$ γιατί οι X, Y παίρνουν θετικές τιμές. Για $z \ge 0$ έχουμε

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X+Y \le z) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X \le z-y) f_Y(y)dy = \int_0^z P(X \le z-y) f_Y(y)dy.$$

Η τελευταία ισότητα γιατί οι X, Y παίρνουν θετικές τιμές. Αλλά
$$P(X \le z-y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } z-y \ge 1, \\ z-y & \text{αν } 0 \le z-y < 1. \end{cases}$$
Άρα

$$F_Z(z) = \int_0^z \min(1, z-y)e^{-y}dy = \begin{cases} \int_0^z \min(1,z-y)e^{-y}dy & \text{αν } 0 \le z \le 1, \\ \int_0^{z-1} e^{-y}dy + \int_{z-1}^z (z-y)e^{-y}dy & \text{αν } z > 1, \end{cases}$$
$$= ... = \begin{cases} z-1+e^{-z} & \text{αν } 0 \le z \le 1, \\ 1-e^{-z}(e-1), & \text{αν } z > 1. \end{cases}$$

Σχετικά με την $F_W(w)$, ισούται με 0 για $w \le 0$ γιατί οι X, Y παίρνουν θετικές τιμές ενώ για $w > 0$ έχουμε

$$F_W(w) = P(X/Y \le w) = P(Y \ge X/w) = \int_0^1 P(Y \ge x/w) f_X(x)dx$$
$$= \int_0^1 e^{-x/w}dx = w(1-e^{-\frac{1}{w}}).$$

Απαντήσεις §7

7.1. (α) Δεν είναι ανεξάρτητες. Αυτό προκύπτει, π.χ., απο το ότι η πυκνότητα $f(x, y)$ της (X, Y) δεν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο $h(x)g(y)$ (η δικαιολόγηση είναι εύκολη). Ένα πιο διαισθητικό επιχείρημα είναι το εξής. Θα χρησιμοποιήσουμε το ότι $P(X < Y) = 1$. Επιλέγουμε κατάλληλα σύνολα A, B και δείχνουμε $P(X \in A, Y \in B) \ne P(X \in A)\,P(Y \in B)$. Πιό συγκεκριμένα,

$$\frac{P(X < 2/3, Y < 1/3)}{P(X < 2/3)P(Y < 1/3)} = \frac{P(Y < 1/3)}{P(X < 2/3)\,P(Y < 1/3)} = \frac{1}{P(Y < 1/3)} \ne 1.$$

(β)

$$E(Ye^X) = \iint_{\mathbb{R}^2} ye^x f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^y ye^x 8xy\,dxdy = ... = 8\int_0^1 y^2(ye^y - e^y + 1)\,dy = \frac{200}{3} - 24e.$$

Ολοκληρώνουμε κατα παράγοντες αρκετές φορές.

(γ) Όμοια όπως στο (β), βρίσκουμε ότι για $r > 0$ ισχύει

$$E(X^r) = \frac{8}{(r+2)(r+4)},\ E(Y^r) = \frac{4}{r+4},\ E(XY) = \frac{4}{9}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= E(XY) - EXEY = \frac{4}{9} - \frac{8}{15}\frac{4}{5} = \frac{4}{225},\\
\mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{11}{225},\\
\mathrm{Var}(Y) &= \frac{2}{3} - \frac{16}{25} = \frac{2}{75},\\
\rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{4/225}{\frac{\sqrt{22}}{3\times 15}} = \frac{4}{5\sqrt{22}}.
\end{aligned}$$

7.2. (α) Η $f(x,y)$ είναι 0 για όλα τα $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0,1,2\}^2$ ενώ οι τιμές της για τα $(x,y) \in \{0,1,2\}^2$ είναι στον εξής πίνακα

$x \setminus y$	0	1	2
0	1/8	1/8	0
1	1/8	2/8	1/8
2	0	1/8	1/8

(β) $P(Y=1|X=1) = P(X=1,Y=1)/P(X=1) = (2/8)/(4/8) = 1/2$.

(γ) Βρίσκουμε $E(X) = 0\cdot(2/8) + 1\cdot(4/8) + 2\cdot(2/8) = 1$, $E(Y) = E(X)$ λόγω συμμετρίας, και $E(XY) = 1\cdot(2/8) + 2\cdot(2/8) + 4\cdot(1/8) = 10/8$. Οπότε $\mathrm{Cov}(X,Y) = 10/8 - 1\cdot 1 = 1/4$.

7.3. Σε αυτή την άσκηση, βοηθάει πολύ να σχεδιάσει κανείς το χωρίο B που η πυκνότητα f είναι διαφορετική από το 0.

(α) Ολοκληρώνουμε την f στην τομή των χωρίων

$$\begin{aligned}
A &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 0\},\\
B &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \neq 0\} = (-1,0)\times(0,1) \cup (1,2)\times(-1,0).
\end{aligned}$$

Η τομή είναι το τρίγωνο με κορυφές $(-1,1), (-1,0), (0,0)$ και εκεί η f έχει «ενιαίο τύπο», ισούται με $-xy$. Άρα

$$P(X+Y<0) = P((X,Y)\in A) = \iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{-x}(-xy)\,dydx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x^3\,dx = \frac{1}{8}.$$

(β) Υπολογίζουμε δύο διπλά ολοκληρώματα.

$$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)\,dydx = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} xy(-xy)\,dydx + \int_{1}^{2}\int_{-1}^{0} xy(-xy)\,dydx = \ldots = -8/9.$$

(γ) Οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, και αυτό μπορεί να δειχθεί με πολλούς τρόπους.

1ος τρόπος. Υπολογίζει κανείς τις περιθώριες f_X, f_Y και δείχνει ότι δεν ισχύει $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ για όλα τα (x,y) στο $\mathbb{R}^2$.

2ος τρόπος. Εδώ εκμεταλευόμαστε τη μορφή του χωρίου B. Έστω $C_1 = (1,2), C_2 = (0,1)$ τότε $P(X\in C_1, Y\in C_2) = 0$ ενώ $P(X\in C_1)P(Y\in C_2) > 0$. Άρα $P(X\in C_1, Y\in C_2) \neq P(X\in C_1)P(Y\in C_2)$.

7.4. (α), (β) Βρίσκουμε πρώτα τις περιθώριες f_X, f_Y. Λόγω συμμετρίας ισούνται. Για $x \in \mathbb{N}^+$ έχουμε

$$\begin{aligned} f_X(x) = P(X=x) &= \sum_{y=1}^{\infty} P(X=x, Y=y) = \sum_{y=1}^{\infty} \frac{C}{2} \left\{ \frac{1}{(x-y+1)(x+y)} - \frac{1}{(x+y)(x+y+1)} \right\} \\ &= \frac{C}{2x(x+1)} = \frac{C}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right). \end{aligned}$$

Το τελευταίο άθροισμα στην πρώτη γραμμή είναι τηλεσκοπικό. Έπειτα

$$1 = \sum_{x=1}^{\infty} f_X(x) = \frac{C}{2} \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{C}{2}.$$

Άρα $C = 2$ και $f_Y(x) = f_X(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \mathbf{1}_{x \in \mathbb{N}^+}$.

(γ) Έχουμε

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x+1} = \infty.$$

Άρα η $\mathrm{Cov}(X, Y)$ δεν ορίζεται.

(δ) Σαφώς $f_U(u) = 0$ αν $u \in \mathbb{R} \backslash \{2, 3, \dots\}$ ενώ για $u \in \{2, 3, \dots\}$ έχουμε

$$f_U(u) = P(X+Y=u) = \sum_{k=1}^{u-1} P(X=k, Y=u-k) = \sum_{k=1}^{u-1} \frac{2}{(u-1)u(u+1)} = \frac{2}{u(u+1)}.$$

7.5. Χρησιμοποιούμε το ότι αν το C είναι ενδεχόμενο στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, και $\mathbf{1}_C : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι η δείκτριά του (δηλαδή $\mathbf{1}_C(\omega) = 1$ αν $\omega \in C$ και $\mathbf{1}_C(\omega) = 0$ αν $\omega \in \Omega \backslash C$), τότε

$$E(\mathbf{1}_C) = P(C).$$

Αυτό γιατί η $\mathbf{1}_C$ παίρνει την τιμή 1 στο σύνολο C και την τιμή 0 στο $\Omega \backslash C$. Άρα

$$E(\mathbf{1}_C) = 1 \times P(C) + 0 \times P(\Omega \backslash C) = P(C).$$

Επίσης $\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A \cap B}$. Άρα

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) &= E(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) - E(\mathbf{1}_A)E(\mathbf{1}_B) = E(\mathbf{1}_{A \cap B}) - E(\mathbf{1}_A)E(\mathbf{1}_B) \\ &= P(A \cap B) - P(A)P(B). \end{aligned}$$

7.6. Η διασπορά καθεμίας από τις X_1, X_2 είναι μ^2. Θα χρησιμοποιήσουμε πιο κάτω ότι λόγω ανεξαρτησίας έχουμε $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2) &= 2\mathrm{Cov}(X_1, X_1) + 3\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + 2\mathrm{Cov}(X_2, X_1) + 3\mathrm{Cov}(X_2, X_2) \\ &= 2\mu^2 + 0 + 0 + 3\mu^2 = 5\mu^2. \end{aligned}$$

Έπειτα, $\mathrm{Var}(2X_1+3X_2) = \mathrm{Var}(2X_1)+\mathrm{Var}(3X_2)+6\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 13\mu^2$. Όμοια, $\mathrm{Var}(X_1+X_2) = 2\mu^2$. Έπεται ότι $\rho(X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2) = \dots = 5/\sqrt{26}$.
Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2$ δεν είναι ανεξάρτητες γιατί έχουν συνδιακύμανση διαφορετική απο το 0.

7.7. Χρησιμοποιώντας τη διγραμμικότητα της συνδιακύμανσης, υπολογίζουμε

$$\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) = \mathrm{Cov}(X, X) - \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(Y, X) - \mathrm{Cov}(Y, Y) = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y) = 0.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί οι X, Y είναι ισόνομες. Επίσης

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X+Y) &= 2\mathrm{Var}(X) + 2\mathrm{Cov}(X,Y),\\ \mathrm{Var}(X-Y) &= 2\mathrm{Var}(X) - 2\mathrm{Cov}(X,Y).\end{aligned}$$

Αν η πρώτη διασπορά είναι 0, τότε $\rho(X,Y) = -1$, ενώ αν η δεύτερη διασπορά είναι 0, τότε $\rho(X,Y) = 1$, τα οποία αποκλείονται από την υπόθεση. Άρα η $\rho(X+Y, X-Y)$ ορίζεται και με βάση τον παραπάνω υπολογισμό είναι ίση με 0. Συμπεραίνουμε ότι οι $X+Y, X-Y$ είναι ασυσχέτιστες. Δεν είναι όμως απαραίτητα ανεξάρτητες. Ως αντιπαράδειγμα μπορούμε να πάρουμε X, Y ανεξάρτητες καθεμία με κατανομή Bernoulli(1/2) (δηλαδή παίρνει κάθε μια από τις τιμές 0, 1 με πιθανότητα 1/2). Αφήνεται ως άσκηση το ότι οι $X+Y, X-Y$ είναι εξαρτημένες.

7.8. Επειδή η Cov είναι διγραμμική, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(XZ^2, Y+Z) &= \mathrm{Cov}(XZ^2, Y) + \mathrm{Cov}(XZ^2, Z)\\ &= E(XYZ^2) - E(XZ^2)E(Y) + E(XZ^3) - E(XZ^2)E(Z)\\ &= E(Z^2)\big(E(XY) - E(X)E(Y)\big) + E(X)E(Z^3) - E(XZ^2)E(Z)\\ &= \mathrm{Cov}(X,Y) = 1.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία της Z από τις X, Y και το ότι $E(Z) = E(Z^3) = 0, E(Z^2) = \mathrm{Var}(Z) = 1$. Ο ισχυρισμός $E(Z^3) = 0$ προκύπτει από το ότι το

$$E(Z^3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^2/2}\, dx$$

είναι ολοκλήρωμα μιας περιττής συνάρτησης σε χωρίο συμμετρικό γύρω από το 0.

7.9. Αν ήταν ανεξάρτητες, τότε θα έπρεπε $\mathrm{Var}(X_1+X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = 2$, το οποίο είναι άτοπο. Επιπλέον

$$\mathrm{Var}(X_1+X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \Longrightarrow \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}.$$

Έπειτα έχουμε

$$0 = \mathrm{Cov}(X_1, X_2 - cX_1) = \mathrm{Cov}(X_1, X_2) - c\,\mathrm{Cov}(X_1, X_1) = \frac{1}{2} - c\,\mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{2} - c.$$

Άρα $c = 1/2$.

7.10. (α) Για $t \in \mathbb{R}$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}P(Y \le t) &= P(I=-1)P(Y \le t | I=-1) + P(I=1)P(Y \le t | I=1)\\ &= \frac{1}{2}\{P(X \ge -t) + P(X \le t)\} = \frac{1}{2}\{P(-X \le t) + P(X \le t)\} = P(X \le t).\end{aligned}$$

Έπεται ότι η Y έχει την ίδια κατανομή με την X, δηλαδή την $N(0,1)$.

(β)

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X^2 I) - E(X)E(XI) = E(X^2)E(I) - 0 = 0$$

γιατί οι X, I είναι ανεξάρτητες με μέση τιμή 0. Οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες. Πρακτικά, μαθαίνοντας τη μία, ξέρουμε αμέσως την απόλυτη τιμή της άλλης. Τυπικά, αν ήταν ανεξάρτητες, θα έπρεπε

$$P(X \in [1,2], Y \in [3,4]) = P(X \in [1,2])P(Y \in [3,4]).$$

Το δεξί μέλος είναι θετικό ενώ το αριστερό είναι 0. Άτοπο.

Παρατήρηση: Προσέξτε ότι οι X, Y είναι κανονικές με μηδενική συνδιακύμανση αλλά όχι ανεξάρτητες.

7.11. Για $t \in \mathbb{R}$ υπολογίζουμε τη συνάρτηση κατανομής, $F_Y(t)$, της Y.

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \le t) = P(I=-1)P(Y \le t|I=-1) + P(I=1)P(Y \le t|I=1) \\ &= \frac{1}{2}\{P(\sqrt{X} \ge -t) + P(\sqrt{X} \le t)\}. \end{aligned}$$

Άρα

$$F_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{1 - F_X(t^2)\} \text{ αν } t \le 0 \\ \frac{1}{2}\{1 + F_X(t^2)\} \text{ αν } t \ge 0. \end{cases}$$

Η F_Y είναι συνεχής (ακόμα και στο 0 γιατί $F_X(0) = 0$). Έπειτα είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο

$$F_Y'(t) = |t| f_X(t^2) = |t| \frac{1}{\sqrt{2\pi t^2}} e^{-t^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

Άρα η Y έχει πυκνότητα και αυτή είναι η $f_Y = F_Y'$. Παρατηρούμε ότι $Y \sim N(0,1)$.

Συγκρίνετε αυτή την άσκηση με την 5.20.

7.12. Υπολογίζουμε ότι

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} 2 = 2(3^{n+1} - 1)/2 = 3^n - 1,$$

και λόγω ανεξαρτησίας,

$$\operatorname{Var}(Y) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(3^{i-1} X_i) = \sum_{i=1}^{n} (3^{i-1})^2 \operatorname{Var}(X_i) = 8 \sum_{i=1}^{n} 9^{i-1} = 9^n - 1.$$

Άρα

$$1 = \operatorname{Var}(\alpha_n + \beta_n Y) = \beta_n^2 \operatorname{Var}(Y) = \beta_n^2 (9^n - 1) \Longrightarrow \beta_n = (9^n - 1)^{-1/2}$$

και

$$0 = E(\alpha_n + \beta_n Y) = \alpha_n + \beta_n (3^n - 1) \Longrightarrow \alpha_n = -(3^n - 1)/\sqrt{9^n - 1}$$

7.13. (α) Οι τιμές που μπορεί να πάρει η Y είναι τα στοιχεία του συνόλου $A := \{1, 2, \ldots, 20\}$. Η συνάρτηση πιθανότητας της είναι $f_Y(k) = 0$ αν $k \in \mathbb{R} \backslash A$ ενώ για $k \in A$ έχουμε $f_Y(k) = P(Y = k) = P(X = 21 - k) = 1/20$ αφού η X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο A. Έπεται λοιπόν ότι και η Y ακολουθεί την ίδια κατανομή με την X.

(β) Περιμένουμε η συνδιακύμανση να είναι αρνητική, γιατί όταν η X παίρνει μεγάλες τιμές, η Y παίρνει μικρές, και όταν η X παίρνει μικρές τιμές, η Y παίρνει μεγάλες. Η τιμή της συνδιακύμανσης είναι

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{Cov}(X, 21 - X) = \operatorname{Cov}(X, 21) - \operatorname{Cov}(X, X) = -\operatorname{Cov}(X, X) = -\operatorname{Var}(X).$$

Η διασπορά της X είναι θετική γιατί η X δεν είναι σταθερά. Άρα $\operatorname{Cov}(X, Y) < 0$.

7.14. (α)

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) &= E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_i) = P(X_i = X_j = 1) - P(X_i = 1)P(X_j = 1) \\ &= \frac{(n-2)!}{n!} - \frac{(n-1)!}{n!}\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}. \end{aligned}$$

Κάποιες εξηγήσεις για τον υπολογισμό. Η τυχαία μεταβλητή $X_i X_j$ παίρνει μόνο τις τιμές 0 και 1, και την τιμή 1 την παίρνει ακριβώς όταν και η X_i και η X_j ισούνται με 1. Οπότε

$$E(X_i X_i) = 0 \times P(X_i X_j = 0) + 1 \times P(X_i X_j = 1) = P(X_i = X_j = 1).$$

Όμοια δικαιολογούμε και την $E(X_i) = P(X_i = 1)$. Τα υπόλοιπα είναι συνδυαστική (ευνοϊκές δια δυνατές περιπτώσεις...).

Άρα οι X_i, X_j είναι θετικά συσχετισμένες. Αυτό είναι αναμενόμενο γιατί όταν η X_i παίρνει μεγάλη τιμή (δηλαδή 1) είναι πιο πιθανό και η X_j να πάρει επίσης μεγάλη τιμή. Αν ο επιβάτης i καθίσει στη σωστή θέση, μειώνει τις λάθος επιλογές για τον j, και έτσι τον βοηθάει να καθίσει και αυτός στη θέση που του αναλογεί. Ομοίως, όταν η X_i παίρνει μικρή τιμή (δηλαδή 0) είναι πιο πιθανό και η X_j να πάρει επίσης μικρή τιμή. Αν ο επιβάτης i καθίσει σε λάθος θέση, ενδεχομένως να καθίσει σε αυτήν του j και έτσι να επιβάλει $X_j = 0$.

(β) Θα χρειαστούμε το ότι για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2},$$

που ισχύει γιατί η X_i παίρνει μόνο τιμές 0 και 1, οπότε $X_i^2 = X_i$ και

$$\mathrm{Var}(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = E(X_i) - (E(X_i))^2 = (1/n) - (1/n)^2.$$

Επειδή

$$W := \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{7}$$

χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της μέσης τιμής και τη διγραμμικότητα της συνδιακύμανσης, βρίσκουμε

$$E(W) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

και

$$\mathrm{Var}(W) = \mathrm{Cov}(W, W) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_i)$$

$$= n\mathrm{Var}(X_1) + 2\frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n^2(n-1)} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1$$

Σχόλιο: Θα μπορούσε κανείς να βρει πρώτα την κατανομή της W, δηλαδή τις τιμές $P(W = k)$ για $k = 0, 1, 2, \dots, n$, και μετά τις $E(W), \mathrm{Var}(W)$. Αυτό όμως δεν είναι απλή υπόθεση (μπορεί να υπολογιστεί με χρήση της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού. Ο υπολογισμός αυτός βρίσκεται στο Παράδειγμα 1.21, σελ. 53, στο βιβλίο του κ. Χαραλαμπίδη, Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές). Προσέξτε πως η γραφή (7) και οι ιδιότητες των E, Cov κάνουν τον υπολογισμό της $E(W)$ τετριμμένο και αυτόν της $\mathrm{Var}(W)$ εύκολο.

7.15. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές $\{Z_i, W_i : 1 \le i \le n\}$ ως εξής

$$Z_i = \begin{cases} 1, & \text{αν στην } i \text{ ρίψη εμφανίζεται } 2, \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \qquad W_i = \begin{cases} 1, & \text{αν στην } i \text{ ρίψη εμφανίζεται } 3, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε $Z = Z_1 + \dots + Z_n, W = W_1 + \dots + W_n$, οι Z_i, W_j με $i \ne j$ είναι ανεξάρτητες γιατί αφορούν διαφορετικές ρίψεις, και άρα

$$\mathrm{Cov}(Z, W) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(Z_i, W_i).$$

Όμως $\mathrm{Cov}(Z_i, W_i) = E(Z_i W_i) - E(Z_i)E(W_i) = 0 - (1/6)(1/6) = -1/36$ γιατί $Z_i W_i = 0$ πάντοτε (στην i ρίψη δεν είναι δυνατόν να εμφανιστεί και 2 και 3). Άρα $\mathrm{Cov}(Z, W) = -n/36$.

Εδώ το αρνητικό πρόσημο της συνδιακύμανσης είναι αναμενόμενο. Μεγάλες τιμές της Z επιβάλουν μικρές τιμές της W, ενώ μικρές τιμές Z της ευνοούν μεγάλες τιμές της W.

7.16. Έστω T το άθροισμα των ενδείξεων, δηλαδή $T = \sum_{i=1}^{k} X_i$, όπου X_i είναι η ένδειξη του $i-$οστου σφαιριδίου που επελέγη. Προφανώς, κάθε X_i είναι διακριτή ομοιόμορφη στο $\{1, 2, ..., n\}$

οπότε

$$E(X_i) = \sum_{j=1}^{n} j \cdot \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

για κάθε $i = 1, 2, ..., n$. Άρα

$$E(T) = E\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big) = kE(X_1) = \frac{k(n+1)}{2}.$$

Επίσης, κάθε ζευγάρι (X_i, X_j) με $1 \le i, j \le n, i \ne j$ έχει την ίδια κατανομή με το (X_1, X_2), οπότε

$$E(T^2) = E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big)^2\Big] = E(X_1^2) + k(k-1)E(X_1X_2).$$

Όμως

$$\begin{aligned} E(X_1^2) &= \sum_{i=1}^{n} i^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}, \\ E(X_1X_2) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\ne i}^{n} ij \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} i \left(\frac{n(n+1)}{2} - i\right) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}, \end{aligned}$$

οπότε $E(T^2) = \dfrac{k(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{k(k-1)(n+1)(3n+2)}{12}$. Επομένως

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(T) &= E(T^2) - (E(T))^2 = k(n+1)\left\{\frac{1}{6}(2n+1) + \frac{1}{12}(k-1)(3n+2) - \frac{1}{4}k(n+1)\right\} \\ &= \frac{1}{12}(n+1)k(n-k). \end{aligned}$$

7.17. Είναι $X = U_1 + U_2 + ... + U_{n-k+1}$ όπου για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, ορίζουμε U_i να ειναι 1 ή 0 ανάλογα με το αν αρχίζει μια k-σύμπτωση στη θέση i ή όχι. Προφανώς $P(U_i = 1) = 1/9^k$ και $P(U_i = 0) = 1 - 1/9^k$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n-k+1$ και $U_i = 0$ για $n-k+1 < i \le n$. Επομένως

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n-k+1} E(U_i) = (n-k+1)9^{-k}.$$

Επίσης

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n-k+1} \mathrm{Var}(U_i) + 2 \sum_{1\le i<j\le n-k+1} \mathrm{Cov}(U_i, U_j).$$

Έχουμε

$$\mathrm{Var}(U_i) = E(U_i^2) - E(U_i)^2 = P(U_i = 1) - P(U_i = 1)^2 = \frac{1}{9^k} - \frac{1}{9^{2k}}$$

για κάθε $i = 1, 2, ..., n-k+1$. Επίσης $\mathrm{Cov}(U_i, U_j) = 0$ για $j \ge i + k$ αφού τότε οι U_1, U_{j+1} είναι ανεξάρτητες (επειδή αναφέρονται σε k-τμήματα του αριθμού που δεν έχουν κοινά ψηφία). Έπειτα, για $r = 1, 2, \ldots, k-1$,

$$\mathrm{Cov}(U_1, U_{1+r}) = \mathrm{Cov}(U_j, U_{j+r})$$

για κάθε j με $1 \le j \le n-k+1-r$. Αν $r \ge n-k+1$, τότε $U_{j+r}=0$ για κάθε $j=1,2,\ldots,n-r$. Επομένως

$$\mathrm{Var}(X)=(n-k+1)\mathrm{Var}(U_1)+2\sum_{r=1}^{k-1}(n-k+1-r)^+\mathrm{Cov}(U_1,U_{1+r})$$

Για $1 \le r \le k-1$ και $r \le n-k$ είναι

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U_1,U_{r+1}) &= E(U_1U_{r+1})-E(U_1)E(U_{r+1})=P(U_1U_{j+1}=1)-\frac{1}{9^{2k}}\\ &= P(\text{οι δύο αριθμοί συμπίπτουν στις θέσεις } 1 \text{ ως } r+k)-\frac{1}{9^{2k}}\\ &= \frac{1}{9^{r+k}}-\frac{1}{9^{2k}}=\frac{1}{9^k}\left(\frac{1}{9^r}-\frac{1}{9^k}\right).\end{aligned}$$

Τελικά, θέτοντας $m=\min\{k-1,n-k\}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= (n-k+1)\frac{1}{9^k}\left(1-\frac{1}{9^k}\right)+2\sum_{r=1}^{m}(n-k+1-r)\frac{1}{9^k}\left(\frac{1}{9^r}-\frac{1}{9^k}\right)\\ &= (n-k+1)\frac{1}{9^k}\left(1-\frac{1}{9^k}\right)+2\frac{1}{9^k}\sum_{r=1}^{m}\left((n-k+1)\frac{1}{9^r}-(n-k+1)\frac{1}{9^k}-r\frac{1}{9^r}+r\frac{1}{9^k}\right)\\ &= (n-k+1)\frac{1}{9^k}\left(1-\frac{1}{9^k}\right)\\ &+\frac{2}{9^k}\left\{(n-k+1)\frac{(1-9^{-m})}{8}-\frac{n-k+1}{9^k}m-\frac{1}{9^m}\frac{9^m-9-8m}{64}+\frac{m(m+1)}{2\cdot 9^k}\right\}.\end{aligned}$$

7.18. (α) Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_1+X_2) &= \mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)+2\mathrm{Cov}(X_1,X_2)\\ &= \mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)+2\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\mathrm{Var}(X_2)}\rho_{X_1,X_2}\\ &= 3+2+2\sqrt{6}\rho_{X_1,X_2}.\end{aligned}$$

Η μέγιστη τιμή του ρ_{X_1,X_2} είναι 1 και η ελάχιστη -1. Άρα

$$\mathrm{Var}(X_1+X_2)\in[5-2\sqrt{6},5+2\sqrt{6}].$$

Ένα σενάριο το οποίο πετυχαίνει τη μέγιστη τιμή είναι το $X_2=\sqrt{2/3}X_1$ (δηλαδή η X_1 δεδομένη με διασπορά 3 και η X_2 ορισμένη μέσω της X_1). Αυτό όντως έχει $\mathrm{Var}(X_2)=2$. Τότε $X_1+X_2=(1+\sqrt{2/3})X_1$ με διασπορά

$$(1+\sqrt{2/3})^2\mathrm{Var}(X_1)=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{6}.$$

Πως το σκεφτήκαμε αυτό το σενάριο; Ξέρουμε ότι μέγιστο συντελεστή συσχέτισης έχουμε όταν η X_2 είναι ένα θετικό πολλαπλάσιο της X_1 (και έπειτα μια μετατόπιση, αν θέλουμε). Παίρνουμε λοιπόν $X_2=aX_1$. Το $a>0$ όμως δεν μπορεί να είναι οποιοδήποτε γιατί πρέπει $\mathrm{Var}(X_2)=2$, δηλαδή $2=a^2\mathrm{Var}(X_1)$. Έτσι βρίσκουμε $a=\sqrt{2/3}$.
Όμοια, ένα σενάριο που πετυχαίνει την ελάχιστη τιμή είναι το $X_2=-\sqrt{2/3}X_1$.
(β) Όταν $\rho_{X_1,X_2}=1$, τότε πρέπει $X_2=aX_2+b$ για κάποιες σταθερές $a>0,b$. Και επειδή $\mathrm{Var}(X_1)=3,\mathrm{Var}(X_2)=2$ έπεται ότι $a=\sqrt{2/3}$. Άρα για κάθε $b\in\mathbb{R}$ έχουμε ένα σενάριο που πετυχαίνει το μέγιστο, δηλαδή

$$X_2=\sqrt{2/3}X_1+b.$$

Και αυτά είναι τα μόνα σενάρια που το πετυχαίνουν. Όμοια, τα σενάρια για το ελάχιστο είναι τα

$$X_2=-\sqrt{2/3}X_1+b$$

όπου $b \in \mathbb{R}$.

7.19. (α) Θεωρούμε τυχαία μεταβλητή Z, ανεξάρτητη της X, με διασπορά 1. Για $r \in [0,1]$ θέτουμε $Y := \sqrt{1-r}X + \sqrt{r}\sqrt{a}Z$. Τότε λόγω ανεξαρτησίας,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(Y) &= \operatorname{Var}(\sqrt{1-r}X) + \operatorname{Var}(\sqrt{r}\sqrt{a}Z) = (1-r)a + ra = a,\\
\operatorname{Cov}(X,Y) &= \operatorname{Cov}(X, \sqrt{1-r}X + \sqrt{r}\sqrt{a}Z) = a\sqrt{1-r},\\
\rho(X,Y) &= \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}} = \sqrt{1-r}.
\end{aligned}$$

Για δεδομένο $c \in [0,1]$, επιλέγουμε r έτσι ώστε $\sqrt{1-r} = c$.

(β) Από το (α), βρίσκουμε μία $\hat{Y}$ με $\rho(X,\hat{Y}) = -c$. Η $Y := -\hat{Y}$ ικανοποιεί το ζητούμενο.

7.20. (α) Από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}(EX_1 + \cdots + EX_n) = \mu,$$

και επειδή οι $(X_i)_{1\le i\le n}$ είναι ανεξάρτητες, έχουμε

$$\operatorname{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2}(\operatorname{Var}(X_1) + \cdots + \operatorname{Var}(X_n)) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned}
(n-1)S^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - 2n\overline{X}\,\overline{X} + n\overline{X}^2\\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\Big) - n\overline{X}^2.
\end{aligned}$$

Τώρα, παίρνοντας μέσες τιμές, χρησιμοποιώντας το ότι οι $(X_i)_{1\le i\le n}$ είναι ισόνομες και το ερώτημα (α), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
(n-1)E(S^2) &= nE(X_1^2) - nE(\overline{X}^2) = n(\operatorname{Var}(X_1) + E(X_1)^2) - n(\operatorname{Var}(\overline{X}) + E(\overline{X})^2)\\
&= n(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = (n-1)\sigma^2,
\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

Απαντήσεις §8

8.1. Ο μετασχηματισμός $T : (0,\infty)\times(0,\infty) \to (0,1)\times(0,\infty)$ με $T(x,y) := (x/(x+y), x+y)$ είναι 1-1 και επί και $(U,V) = T(X,Y)$. Έπειτα $T^{-1}(u,v) = (uv, v(1-u))$ και ο T^{-1} έχει Ιακωβιανό πίνακα

$$J_{T^{-1}}(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{pmatrix}.$$

Η ορίζουσα του ισούται με v. Άρα με βάση το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών,

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(T^{-1}(u,v))|\det J_{T^{-1}}(u,v)| = \ldots = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}u^{a-1}(1-u)^{b-1}v^{a+b-1}e^{-\lambda v}\mathbf{1}_{u\in(0,1)}\,\mathbf{1}_{v>0}.$$

Επειδή αυτή η πυκνότητα είναι γινόμενο $g(u)h(v)$, έπεται ότι οι U,V είναι ανεξάρτητες. Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$B(a,b) := \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

υπολογίζουμε τις πυκνότητες των U,V και προκύπτει ότι

$$U \sim \text{Βήτα}(a,b),\ \ V \sim \Gamma(a+b,\lambda).$$

8.2. (α) Για τον μετασχηματισμό $T(x,y) := (x+y, x-y)$, έχουμε $(U,V) = T(X,Y)$, και $T^{-1}(u,v) = ((u+v)/2, (u-v)/2)$. Ο $J_{T^{-1}}$ έχει ορίζουσα

$$\det J_{T^{-1}}(u,v) = -1/2.$$

Άρα με βάση το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών, έχουμε

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(T^{-1}(u,v))|\det J_{T^{-1}}(u,v)|,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.
(β) Στον τύπο από το (α), χρησιμοποιούμε την ανεξαρτησία των X, Y, και αντικαθιστώντας την πυκνότητα τους, βρίσκουμε

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2} f_X\left(\frac{u+v}{2}\right) f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2}}\, e^{-\frac{u^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi 2}}\, e^{-\frac{v^2}{4}}$$

το οποίο είναι το γινόμενο $g(u)g(v)$ με την g να είναι η πυκνότητα της $N(0,2)$. Έτσι προκύπτει εύκολα το ζητούμενο.
(γ) Όμοια όπως στο (β), βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda\left(\frac{u+v}{2}\right)}\mathbf{1}_{\frac{u+v}{2}>0}\lambda e^{-\lambda\left(\frac{u-v}{2}\right)}\mathbf{1}_{\frac{u-v}{2}>0} = \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda u}\mathbf{1}_{u+v>0}\mathbf{1}_{u-v>0} \\ &= \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda u}\mathbf{1}_{u>0,-u<v<u}. \end{aligned}$$

Βοηθάει να κάνει κανείς ένα σχήμα για το χωρίο $\{(u,v) : u+v>0, u-v>0\}$. Οι περιθώριες είναι

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)\,dv = \begin{cases} 0 & \text{αν } u \le 0 \\ \frac{\lambda^2}{2}\int_{-u}^{u} e^{-\lambda u}\,dv = \lambda^2 u e^{-\lambda u} & \text{αν } u > 0 \end{cases} = \lambda^2 u e^{-\lambda u}\mathbf{1}_{u>0}$$

και όμοια (παίρνοντας περιπτώσεις $v \ge 0, v < 0$) βρίσκουμε

$$f_V(v) = \frac{\lambda}{2}\, e^{-\lambda|v|}$$

για κάθε $v \in \mathbb{R}$. Προφανώς $f_{U,V}(u,v) \ne f_U(u)f_V(v)$, οπότε οι U, V δεν είναι ανεξάρτητες.

8.3. (α) Για τον μετασχηματισμό[12] $T(x,y) := (x+y, x/y)$, έχουμε $T^{-1}(u,v) = (uv/(v+1), u/(v+1))$ και η Ιακωβιανή του T^{-1} είναι η

$$\det J_{T^{-1}}(u,v) = -\frac{u}{(v+1)^2}.$$

Άρα το ζευγάρι $(U,V) = T(X,Y)$ έχει πυκνότητα

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(T^{-1}(u,v))|J_{T^{-1}}(u,v)| = \lambda^2 u e^{-\lambda u}\frac{1}{(v+1)^2}\mathbf{1}_{u,v>0}.$$

Επειδή η πυκνότητα $f_{U,V}$ γράφεται ως γινόμενο $g(u)h(v)$, έπεται ότι οι U, V είναι ανεξάρτητες.
(β)

$$f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)\,du = \ldots = \frac{1}{(v+1)^2}\mathbf{1}_{v>0}.$$

8.4. Πρωτος τροπος. Η απεικόνιση $T(x,y) := (xy, y)$ έχει $T^{-1}(u,v) = (u/v, v)$ και η Ιακωβιανή της T^{-1} είναι $1/v$. Άρα το ζευγάρι $(U,V) := T(X,Y) = (XY, Y)$ έχει πυκνότητα

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(u/v, v)\frac{1}{|v|} = f_X(u/v)f_Y(v)\frac{1}{|v|}$$

[12] Θεωρούμε πεδίο ορισμού του T το $(0,\infty)\times(0,\infty)$ γιατί εκεί παίρνει τιμές το ζευγάρι (X,Y).

και άρα

$$f_{XY}(u) = f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_X(u/y) f_Y(y) \frac{1}{|y|}\, dy.$$

Οι f_X, f_Y είναι μη μηδενικές μόνο στο $(0,1)$, και έτσι προκύπτει ότι για $u \notin (0,1)$ ισχύει $f_{XY}(u) = 0$, γιατί για κάθε $y \in \mathbb{R}$ τουλάχιστον ένας από τους $u/y, y$ θα είναι εκτός του $(0,1)$. Για $u \in (0,1)$ το πιο πάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{\substack{0<u/y<1\\0<y<1}} f_X(u/y) f_Y(y) \frac{1}{y}\, dy = \int_u^1 \frac{1}{y} \frac{1}{B(a,b)} \left(\frac{u}{y}\right)^{a-1} \left(1-\frac{u}{y}\right)^{b-1} \frac{1}{B(a+b,c)} y^{a+b-1}(1-y)^{c-1}\, dy$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \frac{1}{B(a+b,c)} u^{a-1} \int_u^1 (y-u)^{b-1}(1-y)^{c-1}\, dy.$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα, εισάγουμε νέα μεταβλητή, την s, θέτοντας $y = (1-u)s + u$, ώστε να προκύψει ολοκλήρωμα με άκρα 0, 1, και μετά από υπολογισμούς βρίσκουμε ότι

$$f_{XY}(u) = \frac{1}{B(a,b+c)} u^{a-1}(1-u)^{b+c-1}.$$

Δευτερος τροπος. Με τρικ, χρησιμοποιώντας την Άσκηση 8.1. Παίρνουμε τρεις ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, X_3 ώστε $X_1 \sim \Gamma(a,\lambda), X_2 \sim \Gamma(b,\lambda), X_3 \sim \Gamma(c,\lambda)$. Με βάση την Άσκηση 8.1, η X έχει την ίδια κατανομή με την $Z := X_1/(X_1+X_2)$ και η Y την ίδια κατανομή με την $W := (X_1+X_2)/(X_1+X_2+X_3)$. Επιπλέον, (από την Άσκηση 8.1) οι Z, X_1+X_2 είναι ανεξάρτητες, άρα (αφού και η X_3 είναι ανεξάρτητη από τις X_1, X_2) οι Z, W είναι ανεξάρτητες. Επομένως το ζευγάρι (X,Y) έχει την ίδια κατανομή με το (Z,W). Άρα η XY έχει την ίδια κατανομή με την $ZW = X_1/(X_1+X_2+X_3)$, η οποία με βάση την Άσκηση 8.1 έχει κατανομή $B(a, b+c)$.

8.5. (α) Για τον μετασχηματισμό[13] $T(x,y) := (x, x/y)$, έχουμε $T^{-1}(u,v) = (u, u/v)$ και η Ιακωβιανή του T^{-1} είναι η

$$\det J_{T^{-1}}(u,v) = -\frac{u}{v^2}.$$

Άρα το ζευγάρι $(U,V) = T(X,Y)$ έχει πυκνότητα

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(T^{-1}(u,v))|J_{T^{-1}}(u,v)| = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+u^2v^{-2})} \frac{|u|}{v^2} \mathbf{1}_{v\neq 0}.$$

(β) Με χρήση του ερωτήματος (α) έχουμε

$$f_{X/Y}(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)\, du = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{v^2+1} \mathbf{1}_{v\neq 0},$$

η οποία είναι μια πυκνότητα της κατανομής Cauchy (διαφέρει μόνο σε ένα σημείο από τη γνωστή πυκνότητα της Cauchy).
(γ) Προκύπτει από το (β). Εναλλακτικά, με τη γνωστή τεχνική της παραγράφου 5 αυτών των ασκήσεων.

8.6. Η απεικόνιση[14] $T(x,y) := (\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}(y/x))$ έχει $T^{-1}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ και η Ιακωβιανή της T^{-1} ισούται με r. Άρα το ζευγάρι $(R,\Theta) := T(X,Y)$ έχει πυκνότητα

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_{X,Y}(r\cos\theta, r\sin\theta) r = r\mathbf{1}_{(r,\theta)\in A}$$

όπου

$$A := ((0,1] \times (0,\pi/2)) \cup \{(r,\theta) \in (1,\sqrt{2}) \times (0,\pi/2) : \tan^{-1}(\sqrt{r^2-1}) \leq \theta \leq \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{r^2-1}})\}.$$

[13]Θεωρούμε πεδίο ορισμού του T το $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}\backslash\{0\})$ γιατί με πιθανότητα ένα εκεί παίρνει τιμές το ζευγάρι (X,Y) και σε εκείνο το πεδίο ορισμού ο T είναι αντιστρέψιμος.

[14]Με πεδίο ορισμού το $(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \mathbb{R}$.

Αυτό γιατί $f_{X,Y}(x,y) = \mathbf{1}_{(x,y)\in(0,1)\times(0,1)}$ και $(r\cos\theta, r\sin\theta) \in (0,1)\times(0,1)$ αν και μόνο αν $(r,\theta)\in A$.

Απαντήσεις §9

9.1. (β) Υπολογίζουμε πρώτα τις πυκνότητες των X, Y. Βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \mathbf{1}_{(0,1)}(x), \\ f_Y(y) &= -\log y\,\mathbf{1}_{(0,1)}(y) \end{aligned}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Άρα οι δεσμευμένες πυκνότητες $f_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y), f_{Y\,|\,X}(\cdot\,|\,x)$ έχουν νόημα ακριβώς για $x, y \in (0,1)$ και ισούνται με

$$\begin{aligned} f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) &= -\frac{1}{x\log y}\mathbf{1}_{(y,1)}(x), \\ f_{Y\,|\,X}(y\,|\,x) &= \frac{1}{x}\,\mathbf{1}_{(0,x)}(y). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η $Y\,|\,X = x$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,x)$.

(γ) Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\,dy = -\int_0^1 y\log y\,dy = \ldots = \frac{1}{4}, \\ E(X^2\,|\,Y=y) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)\,dx = -\int_y^1 x^2\frac{1}{x\log y}\,dx = -\frac{1}{2\log y}(1-y^2), \\ E(e^Y\,|\,X=x) &= \int_{\mathbb{R}} e^y f_{Y\,|\,X}(y\,|\,x)\,dy = \int_0^x e^y\frac{1}{x}\,dy = \frac{e^x-1}{x}. \end{aligned}$$

9.2. (α) Έχουμε $f_X(x) = \int_x^\infty \lambda^2 e^{-\lambda y}dy = \lambda e^{-\lambda x}$ για $x \ge 0$ και $f_X(x) = 0$ για $x < 0$. Επομένως η $f_{Y|X}(y|x)$ ορίζεται ακριβώς για $x \ge 0$ και ισούται με

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \lambda e^{-\lambda(y-x)}\mathbf{1}_{y\ge x}.$$

Άρα η $(Y|X=x)$ έχει την ίδια κατανομή με την $Z+x$, όπου Z εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Άρα $E(Y|X=x) = E(Z)+x = \lambda^{-1}+x$. Αν δεν κάνει κανείς αυτή την παρατήρηση, μπορεί να βρει την $E(Y|X=x)$ υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x)\,dy$.

(β) Έχουμε $f_X(x) = \int_0^\infty xe^{-x(y+1)}dy = e^{-x}$ για $x \ge 0$ και $f_X(x) = 0$ για $x < 0$. Επομένως η $f_{Y|X}(y|x)$ ορίζεται ακριβώς για $x \ge 0$ και ισούται με

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = xe^{-xy}\mathbf{1}_{y\ge 0}.$$

Άρα η $(Y|X=x)$ έχει εκθετική κατανομή με παράμετρο x και επομένως $E(Y|X=x) = 1/x$.

9.3. Έστω X το πλήθος των ενδείξεων K στις n πρώτες ρίψεις και Y το πλήθος των ενδείξεων K στις τελευταίες n ρίψεις. Τότε οι X και Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p και το ζητούμενο είναι η εύρεση της $E(X|X+Y=m)$.

1ος τροπος: Η τυχαία μεταβλητή $Z = X+Y$ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $2n$ και p, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
E(X|X+Y=m) = E(X|Z=m) &= \sum_{x=0}^{m} xP(X=x|Z=m) \\
&= \sum_{x=0}^{m} \frac{xP(X=x, Y=m-x)}{P(Z=m)} \\
&= \sum_{x=0}^{m} \frac{x\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\binom{n}{m-x}p^{m-x}(1-p)^{n-m+x}}{\binom{2n}{m}p^m(1-p)^{2n-m}} \\
&= \sum_{x=1}^{m} \frac{x\binom{n}{x}\binom{n}{m-x}}{\binom{2n}{m}}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Η τελευταία έκφραση αντιστοιχεί στη μέση τιμή υπεργεωμετρικής κατανομής που μοντελοποιεί την επιλογή, χωρίς επανάθεση, m σφαιριδίων από $2n$ σφαιρίδια 2 τύπων, n του πρώτου και n του δευτέρου και μετράει τον αριθμό των σφαιριδίων του πρώτου τύπου. Συνεπώς παίρνουμε $E(X|X+Y=m) = m/2$.

2ος τροπος: Συνεχίζουμε από την (8) χρησιμοποιώντας ιδιότητες των διωνυμικών συντελεστών:

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{m} \frac{x\binom{n}{x}\binom{n}{m-x}}{\binom{2n}{m}} &= \sum_{x=1}^{m} \frac{x\frac{n}{x}\binom{n-1}{x-1}\binom{n}{m-x}}{\binom{2n}{m}} = \frac{n}{\binom{2n}{m}}\sum_{y=0}^{m-1}\binom{n-1}{y}\binom{n}{m-1-y} \\
&= \frac{n}{\binom{2n}{m}}\binom{2n-1}{m-1} = \frac{n\binom{2n-1}{m-1}}{\frac{2n}{m}\binom{2n-1}{m-1}} = \frac{m}{2},
\end{aligned}$$

όπου για την τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον τύπο του Cauchy.

3ος τροπος: Για λόγους συμμετρίας, είναι σαφές ότι $E(X|X+Y=m) = E(Y|X+Y=m)$. Άρα

$$2E(X|X+Y=m) = E(X|X+Y=m) + E(Y|X+Y=m) = E(X+Y|X+Y=m) = m$$

και το συμπέρασμα έπεται.

9.4. Εφαρμόζουμε τη σχέση $P(A) = \int_{\mathbb{R}} P(A|W=t)f_W(t)\,dt$ που ισχύει για κάθε συνεχή τυχαία μεταβλητή W με πυκνότητα f_W (S. Ross, σχέση (5.8) στο Κεφάλαιο 7, σελ. 362) και το ότι η $X|W=t$ έχει την ίδια κατανομή με την X αν οι X, W είναι ανεξάρτητες. Έτσι

$$P(Y<Z) = \int_0^\infty P(y<Z)f_Y(y)dy = \int_0^\infty e^{-\nu y}\mu e^{-\mu y}dy = \mu\int_0^\infty e^{-(\nu+\mu)y}dy = \frac{\mu}{\mu+\nu}.$$

$$\begin{aligned}
P(X<Y<Z) &= \int_0^\infty P(x<Y<Z)f_X(x)dx = \int_0^\infty\int_x^\infty P(y<Z)f_Y(y)dyf_X(x)dx \\
&= \int_0^\infty\int_x^\infty e^{-\nu y}\mu e^{-\mu y}\lambda e^{-\lambda x}dydx = \lambda\mu\int_0^\infty e^{-\lambda x}\int_x^\infty e^{-(\lambda+\mu)y}dydx \\
&= \lambda\mu\int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{e^{-(\mu+\nu)x}}{\mu+\nu}dx = \frac{\lambda\mu}{\mu+\nu}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu+\nu)x}dx = \frac{\lambda\mu}{(\mu+\nu)(\lambda+\mu+\nu)}.
\end{aligned}$$

9.5. (α) Έστω $A := \{$η πρώτη ρίψη φέρνει Κ$\}$, και f_p η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής p (η οποία είναι η ομοιόμορφη στο $(0,1)$). Τότε, χρησιμοποιώντας την ίδια σχέση όπως και στην προηγούμενη άσκηση (σχέση (5.8), σελ. 362 στον S. Ross), έχουμε

$$P(A) = \int_0^1 P(A\,|\,p=x)f_p(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = 1/2.$$

(β) Έστω $B := \{\text{και οι δύο ρίψεις φέρνουν Κ}\}$. Όπως στο ερώτημα (α), βρίσκουμε

$$P(B) = \int_0^1 P(B \,|\, p = x) f_p(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = 1/3.$$

9.6. (α) Για $x \in \{0, 1, \cdots, a+b\}$, η κατανομή της $X_n \,|\, X_{n-1} = x$ είναι διακριτή που παίρνει την τιμή x με πιθανότητα $x/(a+b)$ και την τιμή $x+1$ με πιθανότητα $1 - x(a+b)^{-1}$. Άρα

$$m(x) := E(X_n \,|\, X_{n-1} = x) = x\frac{x}{a+b} + (x+1)\left(1 - \frac{x}{a+b}\right) = 1 + x\left(1 - \frac{1}{a+b}\right),$$

και

$$E(X_n \,|\, X_{n-1}) = m(X_{n-1}) = 1 + X_{n-1}\left(1 - \frac{1}{a+b}\right).$$

(β) Έστω $a_n := E(X_n)$ και $c = 1 - (a+b)^{-1}$. Επειδή $E(X_n) = E(E(X_n \,|\, X_{n-1}))$, παίρνοντας μέση τιμή στη σχέση του προηγούμενου ερωτήματος βρίσκουμε

$$a_n = c a_{n-1} + 1 \text{ για } n \in \mathbb{N}^+$$

ενώ $a_0 = a$. Διαιρώντας με c^n βρίσκουμε

$$\frac{a_n}{c^n} = \frac{1}{c^n} + \frac{a_{n-1}}{c^{n-1}}.$$

Άρα για $n \in \mathbb{N}^+$,

$$\frac{a_n}{c^n} = \frac{1}{c^n} + \frac{1}{c^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{c^1} + \frac{a_0}{c^0},$$

οπότε, επειδή $a_0 = a$,

$$a_n = 1 + c + \cdots + c^{n-1} + ac^n = \frac{c^n - 1}{c - 1} + ac^n = -(a+b)(c^n - 1) + ac^n = a + b - bc^n.$$

Προφανώς, ο ίδιος τύπος ισχύει και για $n = 0$.

(γ) Έστω $A := \{\text{Η μπάλα που επιλέγουμε κατά το } n+1 \text{ βήμα είναι άσπρη}\}$. Τότε

$$P(A) = E(\mathbf{1}_A) = E(E(\mathbf{1}_A \,|\, X_n)) = E(P(A \,|\, X_n)).$$

Ισχύει $P(A \,|\, X_n = x) = x/(a+b)$. Άρα $P(A \,|\, X_n) = X_n/(a+b)$, και

$$P(A) = E\left(\frac{X_n}{a+b}\right) = \frac{1}{a+b} E(X_n) = 1 - \frac{b}{a+b}\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)^n.$$

9.7.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X, E(Y|X)) &= E(XE(Y|X)) - E(X)E(E(Y|X)) \\
&= E(E(XY|X)) - E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \operatorname{Cov}(X, Y).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $E(g(X)Y|X) = g(X)E(Y|X)$ για οποιαδήποτε $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αν οι μέσες τιμές ορίζονται.

9.8. Έστω Y ο αριθμός που έφερε το ζάρι και X ο αριθμός εμφανίσεων της ένδειξης Κ. Έχουμε ότι η Y είναι διακριτή ομοιόμορφη στο $\{1, 2, \ldots 6\}$ ενώ η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένου ότι $Y = y$ είναι διωνυμική με παραμέτρους y (ο αριθμός των δοκιμών Bernoulli) και $p = \frac{1}{2}$ (πιθανότητα επιτυχίας). Δεσμεύοντας ως προς Y έχουμε:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(E\,(X|Y)) = \sum_{y=1}^{6} E(X|Y=y)P(Y=y) \\ &= \sum_{y=1}^{6} \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\sum_{y=1}^{6} y = \frac{1}{12} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $E(X|Y=y) = y \cdot \frac{1}{2}$.

9.9. Θέτουμε $\lambda = 120, p = 1/4$. Θα χρειαστούμε το ότι η $Y|X$ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους X και p. Αυτό προκύπτει από την περιγραφή αφού κάθε ένας από τους X πελάτες πληρώνει με κάρτα με πιθανότητα p. Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους για τη μέση τιμή και διασπορά της διωνυμικής κατανομής και της κατανομής Poisson.

(α) $E(Y) = E(E(Y|X)) = E(Xp) = p\lambda$.

(β)

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(Y) &= E(\operatorname{Var}(Y|X)) + \operatorname{Var}(E(Y|X)) \\ &= E(Xp(1-p)) + \operatorname{Var}(pX) = p(1-p)\lambda + p^2\lambda = p\lambda. \end{aligned}$$

(γ) Υπολογίζουμε

$$E(XY) = E(E(XY|X)) = E(XE(Y|X)) = E(XpX) = pE(X^2) = p(\lambda^2 + \lambda),$$

οπότε $\operatorname{Cov}(X,Y) = p(\lambda^2+\lambda) - \lambda p \lambda = p\lambda$ και $\rho(X,Y) = \sqrt{p}$. Οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες αφού έχουν μη μηδενική συνδιακύμανση.

9.10. Η X μετράει το πλήθος των ανεξάρτητων πραγματοποιήσεων ενός πειράματος μέχρι την πρώτη επιτυχία με δεδομένο ότι κάθε πραγματοποίηση έχει πιθανότητα επιτυχίας p. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή Y ως εξής: $Y = 1$ αν η πρώτη πραγματοποίση ήταν επιτυχία και $Y = 0$ αν ήταν αποτυχία. Τότε

$$\begin{aligned} E(X) &= E(E(X|Y)) = pE(X|Y=1) + (1-p)E(X|Y=0) \\ &= p \cdot 1 + (1-p)(1+E(X)) = 1 + E(X) - pE(X), \end{aligned}$$

η οποία δίνει ότι $E(X) = 1/p$. Χρησιμοποιήσαμε τό ότι η $X|Y=0$ έχει την ίδια κατανομή με την $1+X$ (το οποίο γράφουμε $X|Y=0 \overset{d}{=} 1+X$) γιατί με δεδομένο ότι η πρώτη πραγματοποίηση ήταν αποτυχία, καταγράφουμε μια (αποτυχημένη) πραγματοποίηση και το «παιχνίδι» αρχίζει από την αρχή. Τυχαίες μεταβλητές με ίδια κατανομή έχουν την ίδια μέση τιμή, έτσι $E(X|Y=0) = E(1+X) = 1+E(X)$.

9.11. Έστω Y ο αριθμός του φακέλου που επιλέγει ο παίκτης την πρώτη φορά που παίζει το παιχνίδι. Τότε

$$\begin{aligned} E(X) &= E(E(X\,|\,Y)) \\ &= E(X\,|\,Y=1)P(Y=1) + E(X\,|\,Y=2)P(Y=2) + E(X\,|\,Y=3)P(Y=3) \\ &= \frac{1}{3}\big\{E(X\,|\,Y=1) + E(X\,|\,Y=2) + E(X\,|\,Y=3)\big\}. \qquad (9) \end{aligned}$$

Τώρα

$$\begin{aligned} E(X\,|\,Y=1) &= 5 + E(X), \\ E(X\,|\,Y=2) &= 6 + E(X), \\ E(X\,|\,Y=3) &= 0. \end{aligned}$$

Η πρώτη εξίσωση ισχύει γιατί δεδομένου ότι ο παίκτης διάλεξε τον φάκελο 1, πλήρωσε 5 Ευρώ, δεν βρήκε το αυτοκίνητο, και η διαδικασία αρχίζει από την αρχή. Μάλιστα η κατανομή της $X \,|\, Y = 1$ είναι ακριβώς η ίδια με $5+X'$, όπου X' είναι το κόστος που θα πληρώσει ο παίκτης ώσπου να βρεί το αυτοκίνητο αν του χαριστεί η πρώτη μαντεψιά που είδαμε ήδη ότι είναι αποτυχημένη. Προφανώς η X' έχει την ίδια κατανομή με την X (απλως το παιχνίδι ξαναρχίζει).

Όμοια δικαιολογούμε και τη δεύτερη εξίσωση, ενώ η τρίτη προκύπτει γιατί όταν $Y = 3$, ο παίκτης βρήκε το αυτοκίνητο και σταματάει να παίζει. Έτσι η εξίσωση (9) δίνει

$$E(X) = \frac{2}{3}E(X) + \frac{11}{3}.$$

Επομένως $E(X) = 11$.

9.12. Έστω S το άθροισμα των ενδείξεων των ρίψεων μέχρι και την πρώτη εμφάνιση της ένδειξης 1. Έστω X_1 η ένδειξη της πρώτης ρίξης. Έχουμε

$$\begin{aligned} E(S) = E(E(S|X_1)) &= \sum_{i=1}^{6} P(X_1 = k)E(S|X_1 = k) \\ &= \frac{1}{6}\left(1 + \sum_{k=2}^{6}\{k + E(S)\}\right) = \frac{7}{2} + \frac{5}{6}E(S). \end{aligned}$$

Βρίσκουμε λοιπόν ότι $E(S) = 21$. Χρησιμοποιήσαμε το ότι, για $k \in \{2, 3, \ldots, 6\}$, η $S|X_1 = k$ έχει την ίδια κατανομή με την $k + S$. Γιατί έχει έρθει ένδειξη k και οι ενδείξεις από εδώ και στο εξής (από τη ρίψη 2 και μετά) ώσπου να έρθει 1 για πρώτη φορά έχουν την ίδια κατανομή όπως οι ενδείξεις ξεκινώντας από τη ρίψη 1 σε ένα παιχνίδι που αρχίζει από την αρχή.

9.13. (α) Έστω X ο αριθμός ρίψεων μέχρι την εμφάνιση και των δύο ενδείξεων και η τυχαία μεταβλητή

$$Y := \begin{cases} 0 & \text{αν η πρώτη ρίψη είναι Γ,} \\ 1 & \text{αν η πρώτη ρίψη είναι Κ.} \end{cases}$$

Τότε

$$\begin{aligned} E(X) &= E(E(X \,|\, Y)) = p\, E(X \,|\, Y = 0) + (1-p)\, E(X \,|\, Y = 1) \\ &= p(1 + (1-p)^{-1}) + (1-p)(1 + p^{-1}) = 1 + \frac{1}{p(1-p)}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι η κατανομή της $X \,|\, Y = 0$ είναι η ίδια με αυτή της $1+Z$, όπου η Z είναι ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την πρώτη εμφάνιση της ένδειξης Κ σε μια άλλη ακολουθία ρίψεων με το ίδιο νόμισμα. Η κατανομή της Z είναι γεωμετρική με παράμετρο $1-p$ (συνάρτηση πιθανότητας $f_Z(k) = (1-p)p^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$). Ανάλογα αντιμετωπίζουμε την $E(X \,|\, Y = 1)$.

(β) Η τελευταία ρίψη είναι Κ αν και μόνο αν η πρώτη ρίψη είναι Γ, το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα p.

9.14. Έστω T_i ο αριθμός των περιπάτων που απομένουν μέχρι να μην βρει παπούτσια, υποθέτοντας ότι τώρα υπάρχουν i παπούτσια στη μπροστινή πόρτα (και $2n-i$ στην πίσω) και $m_i = E(T_i)$. Δεσμεύοντας στο τι μπορεί να συμβεί μόλις συμπληρωθεί ο επόμενος περίπατος (επιλογή πόρτας για το ξεκίνημα και πόρτας για την επιστροφή) έχουμε

$$m_i = \frac{1}{4}(1 + m_{i-1}) + \frac{1}{2}(1 + m_i) + \frac{1}{4}(1 + m_{i+1})$$

για $1 \le i \le 2n-1$. Δηλαδή

$$m_{i+1} - 2m_i + m_{i-1} = -4. \tag{10}$$

Επίσης
$$m_0 = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}(1+m_1) + \frac{1}{4}(1+m_0)$$
που δίνει $3m_0 = 2+m_1$. Τέλος $m_i = m_{2n-i}$, $0 \le i \le 2n$ λόγω συμμετρίας. Η γενική λύση της (10) ως γραμμικής αναδομικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι $m_i = a + bi - 2i^2$ (Βρίσκουμε τη γενική λύση της ομογενούς και μια ειδική λύση της (10)). Χρησιμοποιώντας τις $3m_0 = 2 + m_1$ και $m_i = m_{2n-i}$ παίρνουμε $a = 2n, b = 4n$. Άρα $m_i = 2n + 4ni - 2i^2$. Για $i = n$ παίρνουμε $m_n = 2n(n-1)$.

9.15. Έστω N ο χρόνος (αριθμός γύρων) μέχρι να συναντηθούν και οι τρεις άνθρωποι στην ίδια κορυφή δεδομένου ότι τώρα είναι μοιρασμένοι σε 2-1 (δηλαδή 2 στην ίδια κορυφή, 1 σε άλλη κορυφή, και η τρίτη κορυφή κενή). Δεσμεύοντας στην επόμενη κίνηση των 3 ανθρώπων (8 περιπτώσεις) έχουμε ότι
$$M = \begin{cases} 1 + M' & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{4}, \\ 1 + N' & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{4}, \end{cases}$$
όπου η M' έχει την ίδια κατανομή με την M και η N' την ίδια κατανομή με την N. Ομοίως,
$$N = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{8}, \\ 1 + N' & \text{με πιθανότητα } \frac{5}{8}, \\ 1 + M & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{4}. \end{cases}$$
Έστω $P_M(s) := E(s^M), P_N(s) := E(s^N)$ οι πιθανογεννήτριες των M, N αντίστοιχα. Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε
$$\begin{aligned} P_M(s) &= \frac{s}{4}P_M(s) + \frac{3s}{4}P_N(s), \\ P_N(s) &= \frac{s}{8} + \frac{5s}{8}P_N(s) + \frac{s}{4}P_M(s). \end{aligned}$$
Λύνοντας, παίρνουμε $P_M(s) = \dfrac{3s^2}{32 - 28s - s^2}$. Έπειτα, κατά τα γνωστά,
$$\begin{aligned} E(M) &= P_M'(1) = 12 \\ \mathrm{Var}(M) &= E(M^2) - E(M)^2 = E\{M(M-1)\} + E(M) - E(M)^2 \\ &= P_M''(1) + P_M'(1) - P_M'(1)^2 = \frac{332}{3}. \end{aligned}$$
Η συνάρτηση πιθανότητας βρίσκεται αναπτύσσοντας την $P_M(s)$ σε απλά κλάσματα. Γράφουμε
$$P_M(s) = -s \cdot \frac{3s}{s^2 + 28s - 32} = -s \cdot \frac{3s}{(s - s_1)(s - s_2)}$$
όπου $s_1 = -14 - 2\sqrt{57}, s_2 = -14 + 2\sqrt{57}$ και έπειτα
$$\begin{aligned} P_M(s) &= -s\left(\frac{3s_1}{s_1 - s_2}\frac{1}{s - s_1} - \frac{3s_2}{s_1 - s_2}\frac{1}{s - s_2}\right) = \frac{3s}{s_2 - s_1}\left(\frac{1}{1 - \frac{s}{s_2}} - \frac{1}{1 - \frac{s}{s_1}}\right) \\ &= \frac{3s}{s_2 - s_1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{s_2^k} - \frac{1}{s_1^k}\right)s^k = \frac{3}{s_2 - s_1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s_2^{k-1}} - \frac{1}{s_1^{k-1}}\right)s^k. \end{aligned}$$
Άρα η συνάρτηση πιθανότητας της M είναι
$$P(M = k) = \frac{3}{s_2 - s_1}\left(\frac{1}{s_2^{k-1}} - \frac{1}{s_1^{k-1}}\right)$$
για $k \in \mathbb{N}^+$ και ισούται με 0 για $k \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}^+$.

9.16. Έστω X_1 το πλήθος των ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί η λέξη ΚΚ και X_2 το πλήθος των ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί η λέξη ΚΓ. Ζητάμε τις $E(X_1)$ και $E(X_2)$.

Έστω Y_1, Y_2 τα αποτελέσματα των δυο πρώτων ρίψεων. Τότε δεσμεύοντας στις Y_1, Y_2 έχουμε

$$\begin{aligned} E(X_1) &= P(Y_1 = K)E(X_1|Y_1 = K) + P(Y_1 = \Gamma)E(X_1|Y_1 = \Gamma) \\ &= \frac{1}{2}E(X_1|Y_1 = K) + \frac{1}{2}E(X_1|Y_1 = \Gamma) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}E(X_1|Y_1 = K, Y_2 = K) + \frac{1}{2}E(X_1|Y_1 = K, Y_2 = \Gamma)\right) + \frac{1}{2}E(X_1|Y_1 = \Gamma) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}(2 + E(X_1))\right) + \frac{1}{2}(1 + E(X_1)) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{3}{4}E(X_1), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε στην τέταρτη ισότητα τις σχέσεις

$$\begin{aligned} E(X_1|Y_1 = K, Y_2 = K) &= 2, \\ E(X_1|Y_1 = K, Y_2 = \Gamma) &= 2 + E(X_1), \\ E(X_1|Y_1 = \Gamma) &= 1 + E(X_1). \end{aligned}$$

Η πρώτη είναι άμεση ενώ οι άλλες δυο προκύπτουν γιατί μετά την εμφάνιση ενός Γ, είναι σαν να ξεκινάει το πείραμα από την αρχή. Λύνοντας την εξίσωση για την $E(X_1)$ παίρνουμε $E(X_1) = 6$.

Ομοίως έχουμε

$$\begin{aligned} E(X_2) &= P(Y_1 = K)E(X_2|Y_1 = K) + P(Y_1 = \Gamma)E(X_2|Y_1 = \Gamma) \\ &= \frac{1}{2}E(X_2|Y_1 = K) + \frac{1}{2}E(X_2|Y_1 = \Gamma). \end{aligned}$$

Όμως

$$E(X_2|Y_1 = K) = 1 + 2,$$

γιατί αν $Y_1 = K$, η πρώτη εμφάνιση της λέξης ΚΓ θα εμφανιστεί όταν θα προκύψει το πρώτο Γ. Συνεπώς η δεσμευμένη κατανομή της $X_2 - 1$ δοθέντος ότι $Y_1 = K$ ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή $P(X_2 - 1 = j|Y_1 = K) = \left(\frac{1}{2}\right)^j$, $j = 1, 2, \ldots$ με μέση τιμή $E(X_2 - 1|Y_1 = K) = 2$. Επίσης,

$$E(X_2|Y_1 = \Gamma) = 1 + E(X_2),$$

αφού μετά την εμφάνιση ενός Γ, είναι σαν να ξεκινάει το πείραμα τύχης από την αρχή. Επομένως, παίρνουμε την εξίσωση

$$E(X_2) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E(X_2),$$

και λύνοντας παίρνουμε $E(X_2) = 4$.

Παρατηρήστε ότι $E(X_1) \neq E(X_2)$. Η δομή της λέξης την οποία περιμένουμε να σχηματιστεί επηρεάζει τον μέσο αριθμό ρίψεων. Δεν αρκεί να γνωρίζουμε το μήκος της.

Απαντήσεις §10

10.1. (α) Είναι πεπερασμένη μόνο για $t \leq 0$. Γιατί

$$M_X(t) = \int_1^\infty e^{tx}\frac{1}{x^2}\,dx,$$

και όταν $t > 0$, η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε ικανοποιεί $\lim_{x\to\infty} x^{-2}e^{tx} = \infty$. Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα ισούται με ∞. Για $t \leq 0$ έχουμε $M_X(t) \leq M_X(0) = 1 < \infty$.

(β) Θεωρούμε την X με πυκνότητα

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{αν } |x| \geq 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Ανάλογα επιχειρήματα όπως στο (α) αποδεικνύουν το ζητούμενο.

10.2. Για $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned} M_X(t) = E(e^{tX}) &= \int_{-1}^{1} |x| e^{tx}\, dx = -\int_{-1}^{0} x e^{tx}\, dx + \int_{0}^{1} x e^{tx}\, dx = ... \\ &= \frac{2 - (e^t + e^{-t}) + t(e^t - e^{-t})}{t^2} \end{aligned}$$

ενώ $M_X(0) = 1$.

10.3. Ροπογεννήτριες είναι οι $(b), (c), (d)$. Η (a) δεν είναι γιατί η τιμή της στο 0 δεν είναι 1 ενώ η (e) δεν είναι γιατί παίρνει αρνητικές τιμές.

10.4. (α) Κατά τα γνωστά, $E(X) = M'(0) = 4, E(X^2) = M''(0) = 18$. Άρα $\operatorname{Var}(X) = 2$.

(β) Εφαρμόζουμε την ανισότητα Chebysev.

$$P(X \leq 1) = P(X - E(X) \leq -3) \leq P(|X - E(X)| \geq 3) \leq \frac{\operatorname{Var}(X)}{3^2} = \frac{2}{9}.$$

10.5. Έχουμε $E(e^{tX}) = E(E(e^{tX} \mid R)) = E(m(R))$ με

$$m(r) := E(e^{tX} \mid R = r) = (re^t + 1 - r)^n$$

για κάθε $r \in [0, 1]$. Άρα

$$E(m(R)) = \int_0^1 (re^t + 1 - r)^n\, dr = \ldots = \frac{1}{n+1} \frac{e^{(n+1)t} - 1}{e^t - 1} = \frac{1}{n+1}\left(1 + e^t + e^{2t} + \cdots + e^{nt}\right).$$

Αλλά η τελευταία έκφραση είναι η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής Y με $P(Y = k) = 1/(n+1)$ για $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Από το θεώρημα μοναδικότητας για ροπογεννήτριες, έπεται ότι η X έχει την ίδια κατανομή με την Y.

10.6. (α) Για κάθε $u \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$P_X(u) = E(u^X) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda u)^k}{k!} = e^{\lambda(u-1)}.$$

Η πιθανογεννήτρια είναι πεπερασμένη για κάθε $u \in \mathbb{R}$. Επομένως, παραγωγίζοντας ως προς u όρο προς όρο τη δυναμοσειρά δύο φορές, παίρνουμε για κάθε $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P_X'(u) &= E(Xu^{X-1}) = \lambda e^{\lambda(u-1)}, \\ P_X''(u) &= E(X(X-1)u^{X-2}) = \lambda^2 e^{\lambda(u-1)}. \end{aligned}$$

Για $u = 1$, οι δύο αυτές σχέσεις δίνουν $E(X) = \lambda, E(X(X-1)) = \lambda^2$. Άρα $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$ και $\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda$.

Σχόλιο: Χρησιμοποιούμε από τον Απειροστικό Λογισμό ότι αν μια δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγλισης $R > 0$, τότε η παράγωγος της στο $(-R, R)$ προκύπτει με παραγώγιση όρο προς όρο.

(β) Η πιθανογεννήτρια του αθροίσματος σε κάθε $u \in \mathbb{R}$ ισούται με

$$\begin{aligned} P_{X_1 + \cdots + X_n}(u) &= E(u^{X_1 + \cdots + X_n}) = E(u^{X_1}) \cdots E(u^{X_n}) = e^{\lambda_1(u-1)} \cdots e^{\lambda_n(u-1)} \\ &= e^{\lambda(u-1)}. \end{aligned}$$

Η τελευταία είναι η πιθανογεννήτρια της Poisson(λ). Ξέρουμε (πάλι από Απειροστικό Λογισμό) ότι αν δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y παίρνουν τιμές στο $\mathbb{N}$ και οι πιθανογεννήτριες τους, P_X, P_Y, συμφωνούν σε μια περιοχή του 0 (δηλαδή $P_X(u) = P_Y(u)$ για $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ για κάποιο $\varepsilon > 0$), τότε έχουν την ίδια κατανομή. Άρα $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$ με $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

10.7. α)

$$\begin{aligned}
P(z) &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{n+x-1}{x} p^n (1-p)^x z^x = p^n \sum_{x=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} ((1-p)z)^x \\
&= p^n (1-(1-p)z)^{-n} = \left(\frac{p}{1-(1-p)z} \right)^n
\end{aligned}$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ανάπτυγμα $\sum\limits_{x=0}^{\infty} \left[\begin{smallmatrix} n \\ x \end{smallmatrix}\right] t^x = (1-t)^{-n}$ για κάθε t με $|t| < 1$.

β) $P(z) = \sum\limits_{x=1}^{\infty} \dfrac{z^x}{x(x+1)}$. Ο όρος $\dfrac{z^{x+1}}{x(x+1)}$ προκύπτει αν ολοκληρώσουμε τον z^{x-1} δυο φορές ως προς z. Έτσι, ξεκινάμε με τη γεωμετρική σειρά. Για $|t| < 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=1}^{\infty} t^{x-1} = \frac{1}{1-t} \overset{\text{Για } |u|<1}{\Rightarrow} \int_0^u \sum_{x=1}^{\infty} t^{x-1} dt = \int_0^u \frac{1}{1-t} dt \Rightarrow \sum_{x=1}^{\infty} \frac{u^x}{x} = -\log(1-u) \\
&\overset{\text{Για } |z|<1}{\Rightarrow} \int_0^z \sum_{x=1}^{\infty} \frac{u^x}{x} du = -\int_0^z \log(1-u) du \\
&\Rightarrow \sum_{x=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{x(x+1)} = [-u \log(1-u)]_{u=0}^{z} - \int_0^z u \frac{1}{1-u} du \\
&= -z \log(1-z) + \int_0^z \left(1 - \frac{1}{1-u}\right) du = -z \log(1-z) + z + \log(1-z) \\
&\Rightarrow P(z) = 1 + \frac{1-z}{z} \log(1-z).
\end{aligned}$$

γ)

$$P(z) = \frac{1-p}{1+p} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{2(1-p)p^x}{1+p} z^x = \frac{1-p}{1+p} + \frac{2(1-p)}{1+p} \cdot \frac{pz}{1-pz}.$$

Για τις μέσες τιμές έχουμε

α)

$$E(X) = P'(1) = \left[n\Big(\frac{p}{1-(1-p)z}\Big)^{n-1} \cdot \frac{p(1-p)}{(1-(1-p)z)^2} \right]_{z=1} = \frac{n(1-p)}{p}.$$

β) $E(X) = P'(1) = \infty$.

γ)

$$E(X) = P'(1) = \left[\frac{2(1-p)}{1+p} \cdot \frac{p(1-pz) - pz(-p)}{(1-pz)^2} \right]_{z=1} = \frac{2p}{(1-p^2)}.$$

Για τις διασπορές, όμοια χρησιμοποιώντας τη σχέση $\text{Var}(X) = P''(1) + P'(1) - (P'(1))^2$.

10.8. Αναπτύσοντας την g σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0, βρίσκουμε ότι οι συντελεστές των όρων t^{3n} με $n \geq 1$ είναι αρνητικοί, άρα δεν είναι δυνατόν να είναι πιθανογεννήτρια.

Για να είναι η f πιθανογεννήτρια, αναγκαία συνθήκη είναι η $f(1) = 1$, απ' όπου βρίσκουμε $a = 1$. Για αυτή την τιμή του a και για t κοντά στο 0 (μάλιστα $t^2/7 < 1$ είναι αρκετό), υπολογίζουμε

$$f(t) = \frac{1}{7}(5t^2 + 1) \frac{1}{1 - \frac{t^5}{7}} = \frac{1}{7}(5t^2 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{5n}}{7^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7^{n+1}} t^{5n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{7^{n+1}} t^{5n+2},$$

η οποία είναι μια δυναμοσειρά με μη αρνητικούς συντελεστές (οι οποίοι αθροίζουν στο 1 λόγω της $f(1) = 1$). Άρα για $a = 1$ η f είναι πιθανογεννήτρια.

(α) Η κατανομή της X προσδιορίζεται από τη συνάρτηση πιθανότητάς της ως εξής.

$$P(X = k) = \begin{cases} 1/7^{n+1} & \text{αν } k = 5n \text{ με } n \in \mathbb{N}, \\ 5/7^{n+1} & \text{αν } k = 5n + 2 \text{ με } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(β) Κατά τα γνωστά, $E(X) = P_X'(1-) = 5/2$ και $E(X(X-1)) = P_X''(1-) = 55/6$. Άρα $\text{Var}(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = 65/12$.

10.9. Η ροπογεννήτρια της X ισούται με $M_X(t) = e^{\sigma^2 t^2/2}$, πεπερασμένη σε όλο το $\mathbb{R}$ (ιδιαίτερα σε μια περιοχή του 0). Άρα όλες οι ροπές μ_r είναι πεπερασμένες και

$$M_X(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu_r}{r!} t^r.$$

Από την άλλη, αναλύοντας την $e^{\sigma^2 t^2/2}$ σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0, έχουμε

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2n}}{n! 2^n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! \sigma^{2n}}{n! 2^n} \frac{1}{(2n)!} t^{2n}.$$

Άρα

$$\mu_r := \begin{cases} 0 & \text{αν } r \in \mathbb{N} \text{ περιττός}, \\ \frac{(2n)!\sigma^{2n}}{n!2^n} = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times \sigma^{2n} & \text{αν } r = 2n \text{ με } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

10.10. (α) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$M_X(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{tx} x^{a-1} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x(\lambda - t)}\, dx.$$

Προκύπτει απο την τελευταία έκφραση ότι $M(t) = \infty$ ακριβώς για $t \geq \lambda$ ενώ για $t < \lambda$ έχουμε

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x(\lambda-t)}\, dx \overset{y = x(\lambda - t)}{=} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(\lambda - t)^{a-1}} e^{-y} \frac{1}{\lambda - t}\, dy \\ &= \frac{\lambda^a}{(\lambda - t)^a} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a}. \end{aligned}$$

Επειδή η M_X είναι πεπερασμένη σε περιοχή του 0, μπορούμε να έχουμε σε εκείνη την περιοχή

$$\begin{aligned} E(Xe^{tX}) &= M_X'(t) = a\lambda^{-1}(1 - t\lambda^{-1})^{-a-1}, \\ E(X^2 e^{tX}) &= M_X''(t) = a(a+1)\lambda^{-2}(1 - t\lambda^{-1})^{-a-2}. \end{aligned}$$

Θέτοντας $t = 0$ παίρνουμε $E(X) = a\lambda^{-1}, E(X^2) = a(a+1)\lambda^{-2}$. Άρα $\text{Var}(X) = a\lambda^{-2}$.

(β) Η ροπογεννήτρια του αθροίσματος σε κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισούται με

$$M_{X_1 + \cdots + X_n}(t) = E(e^{t(X_1 + \cdots + X_n)}) = E(e^{tX_1}) \cdots E(e^{tX_n})$$

λόγω ανεξαρτησίας. Από το (α) έχουμε ότι αυτή η ποσότητα είναι πεπερασμένη ακριβώς όταν $t < \lambda$. Και για αυτά τα t έχουμε

$$M_{X_1 + \cdots + X_n}(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a_1} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a_2} \cdots \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a_n} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a}.$$

Επίσης, η κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$ έχει ακριβώς την ίδια ροπογεννήτρια, και αυτή η ταυτότητα των ροπογεννητριών ισχύει σε μια περιοχή του 0. Έπεται από γνωστή πρόταση ότι η $X_1 + \cdots + X_n$ ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$.

(γ) Κάθε μια από τις τυχαίες μεταβλητές $X_i/n, i = 1, \ldots, n$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $n\theta$ (γιατί για $x \geq 0$ έχουμε $P(X_1/n \geq x) = P(X_1 \geq nx) = e^{-\theta n x}\ldots$), η οποία είναι η $\Gamma(1, n\theta)$. Προκύπτει από το (β) ότι η $\overline{X}$ ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(n, n\theta)$.

10.11. Έστω f_X η πυκνότητα της X. Εύκολα βρίσκουμε ότι η πυκνότητα της Y είναι $f_Y(y) = \frac{1}{r} f_X(\frac{y}{r})$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο για την f_X (δηλαδή $f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}$), βρίσκουμε ότι η πυκνότητα της Y είναι αυτή της $\Gamma(a, \lambda/r)$.

Εναλλακτικά, με χρήση ροπογεννητριών. Η ροπογεννήτρια της Y είναι

$$M_Y(t) := E(e^{tY}) = E(e^{rtX}) = M_X(rt) = \left(1 - \frac{rt}{\lambda}\right)^{-a} = \left(1 - \frac{t}{\lambda/r}\right)^{-a}$$

για κάθε $t < \lambda/r$. Χρησιμοποιήσαμε τον τύπο για τη ροπογεννήτρια της X. Επειδή η M_Y είναι πεπερασμένη σε περιοχή του 0 και ισούται εκεί με τη ροπογεννήτρια της $\Gamma(a, \lambda/r)$, έπεται το συμπέρασμα.

10.12. (α) Κατά τα γνωστά, βρίσκουμε ότι η συνάρτηση κατανομής της $-\log X_1$ είναι η $F(t) = (1 - e^{-t})\,\mathbf{1}_{t>0}$ που είναι αυτή της εκθετικής με παράμετρο 1. Άρα $-\log X_1 \sim \exp(1) = \Gamma(1, 1)$.

(β) Λόγω του (α), έχουμε ότι η Y είναι άθροισμα ανεξάρτητων Γάμμα με κοινή δεύτερη παράμετρο. Άρα η κατανομή της είναι $\Gamma(1 + 1 + \cdots + 1, 1) = \Gamma(n, 1)$.

(γ) Έπεται από το (β) και την προηγούμενη άσκηση ότι η Y ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(n, 1/2)$ η οποία είναι η χ^2 με $2n$ βαθμούς ελευθερίας.

10.13. (α) Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $Z = (X - \mu)/\sigma$ η οποία ακολουθεί την κατανομή $N(0, 1)$. Τότε $X = \mu + \sigma Z$, και

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E(e^{t\mu + t\sigma Z}) = e^{t\mu} E(e^{t\sigma Z}) = e^{t\mu} M_Z(t\sigma) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $M_Z(t) = e^{t^2/2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έπειτα, για $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $E(X^k) = M_X^{(k)}(0)$. Παραγωγίζοντας, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
M_X'(t) &= (\mu + \sigma^2 t) M_X(t), \\
M_X''(t) &= (\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)^2) M_X(t), \\
M_X^{(3)}(t) &= \big\{(2\sigma^4 t + 2\mu\sigma^2) + [\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)^2](\mu + \sigma^2 t)\big\} M_X(t),
\end{aligned}$$

και άρα $E(X) = \mu, E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2, E(X^3) = 3\mu\sigma^2 + \mu^3$.

(β) Η ροπογεννήτρια του αθροίσματος σε κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισούται με

$$\begin{aligned}
M_{X_1 + \cdots + X_n}(t) &= E(e^{t(X_1 + \cdots + X_n)}) = E(u^{tX_1}) \cdots E(u^{tX_n}) = e^{\mu_1 t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \cdots e^{\mu_n t + \frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2} \\
&= e^{(\mu_1 + \cdots + \mu_n)t + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2)t^2}.
\end{aligned}$$

Η τελευταία είναι η ροπογεννήτρια της $N(\mu, \sigma^2)$ με μ, σ όπως στην εκφώνηση της άσκησης. Ξέρουμε ότι αν δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν πεπερασμένες ροπεγεννήτριες σε μια περιοχή του 0 (δηλαδή σύνολο της μορφής $(-\epsilon, \epsilon)$ για κάποιο $\epsilon > 0$) και συμφωνούν εκεί, τότε έχουν την ίδια κατανομή. Το συμπέρασμα έπεται.

(γ) Όμοια όπως στο προηγούμενο ερώτημα.

(δ) Με βάση το προηγούμενο, η $\overline{X} \sim N(\mu', \sigma'^2)$ με $\mu' = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\mu = \mu, \sigma'^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2}\sigma^2 = \sigma^2/n$. Κατά τα γνωστά, η τυποποίηση οποιασδήποτε κανονικής ακολουθεί την $N(0, 1)$. Η τυποποίηση της $\overline{X}$ είναι η

$$\frac{\overline{X}_n - \mu'}{\sigma'} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} = Z_n.$$

Απαντήσεις §11

11.1. Υπολογίζουμε ότι $\mathrm{Var}(X) = 13 - 3^2 = 4$ και εφαρμόζουμε την ανισότητα Chebysev.

$$\begin{aligned} P(-2 \le X \le 8) &= P(-5 \le X - E(X) \le 5) = P(|X - E(X)| \le 5) = 1 - P(|X - E(X)| > 5) \\ &\ge 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{5^2} = \frac{21}{25}. \end{aligned}$$

11.2. Υπολογίζουμε ότι $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 18 - 16 = 2$. Η ανισότητα Markov εφαρμόζεται (γιατί η X είναι μη αρνητική) και δίνει τα φράγματα

$$P(X \ge 5) \le \frac{EX}{5} = \frac{4}{5},\ P(X \ge 5) = P(X^2 \ge 25) \le \frac{E(X^2)}{25} = \frac{18}{25},$$

ενώ η Chebyshev δίνει $P(X \ge 5) \le P(|X - EX| \ge 1) \le \mathrm{Var}(X)/1 = 2$, το οποίο είναι τετριμμένο (ξέρουμε ότι μια πιθανότητα είναι μικρότερη του 1). Άρα το καλύτερο φράγμα που παίρνουμε είναι το $18/25$.

11.3. Η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$P(X < \mu - 1) + P(X > 2\mu) \le \frac{1}{2}.$$

Παίρνουμε δύο περιπτώσεις για το μ.

Αν $\mu \le 1$, τότε επειδή η X παίρνει μη αρνητικές τιμές, η πρώτη πιθανότητα στην πιο πάνω σχέση είναι 0 ενώ η δεύτερη είναι μικρότερη από $E(X)/2\mu = 1/2$ λόγω της ανισότητας Markov (πάλι χρησιμοποιούμε ότι η X παίρνει μη αρνητικές τιμές).

Αν $\mu > 1$, τότε το αριστερό μέλος της πιο πάνω ανισότητας γράφεται

$$P(X - \mu < -1) + P(X - \mu > \mu) \le P(|X - \mu| > 1) \le \frac{\mathrm{Var}(X)}{1^2} = \frac{1}{2}.$$

Προσέξτε οτι τα σύνολα $\{X - \mu < -1\}, \{X - \mu > \mu\}$ είναι ξένα.

11.4. Έχουμε

$$E(X) = \sum_{r=1}^{\infty} r f(r) \ge \sum_{r=1}^{k} r f(r) \ge \sum_{r=1}^{k} r f(k) = f(k)\frac{k(k+1)}{2} \ge k^2 f(k)/2.$$

Η δεύτερη ανισότητα ισχύει αφού η $(f(k))_{k \ge 1}$ είναι φθίνουσα. Το αποτέλεσμα έπεται.

11.5. Έχουμε

$$E(X) = \int_0^{\infty} t f(t)\, dt \ge \int_0^{x} t f(t) \ge \int_0^{x} t f(x)\, dt = f(x)\,\frac{x^2}{2}.$$

Η δεύτερη ανισότητα ισχύει αφού η f είναι φθίνουσα στο $[0, \infty)$. Το αποτέλεσμα έπεται.

11.6. $EX = 0f(0) + n^2 f(n^2) = 0 \times (1 - \frac{1}{n}) + n^2 \frac{1}{n} = n$. $E(X^2) = 0^2 f(0) + n^4 f(n^2) = n^3$. $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = n^3 - n^2 = n^2(n-1)$. $P(X > 0.8n) = P(X = n^2) = 1/n$, πολύ μικρή πιθανότητα.

11.7. (α)

$$\begin{aligned} P(X \le aEX) &= P(X - EX \le -(1-a)EX) \\ &\le P(|X - EX| \ge (1-a)EX) \le \frac{\mathrm{Var}(X)}{(1-a)^2 (EX)^2}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $(1 - a)EX > 0$.

(β) Έστω $A := \{\omega : X(\omega) > aEX\}$.

$$EX = E(X1_{A^c}) + E(X1_A) \leq aEX + E(X^2)^{1/2}P(A)^{1/2} \Rightarrow$$
$$(1-a)EX \leq E(X^2)^{1/2}P(A)^{1/2} \Rightarrow P(A) \geq (1-a)(EX)^2/E(X^2)$$

Εφαρμόσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

(γ) $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = n^3 - n^2$. Το (α) φράζει την πιθανότητα του συμπληρώματος απο το $(n-1)/(0.2)^2$ που είναι άχρηστο για n μεγάλο γιατί είναι > 1.

Το (β) δίνει κάτω φράγμα $(0.2)^2/n$. Είναι η σωστή τάξη μεγέθους. Ξέρουμε ότι η πραγματική τιμή της πιθανότητας είναι ακριβώς $1/n$.

Σχόλιο: Η Άσκηση 11.7 ερευνά την εξής ερώτηση. Μπορεί η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής να μας δώσει πληροφορίες για την «τυπική» συμπεριφορά της X; Είναι αναμενόμενο η X να βρίσκεται με μεγάλη πιθανότητα γύρω απο τη μέση της τιμή; Οι ανισότητες Markov, Chebyshev δίνουν άνω φράγμα στην πιθανότητα η X να είναι μακριά απο τη μέση της τιμή. Αν όμως το φράγμα που δίνουν είναι μεγαλύτερο του 1, τότε είναι άχρηστο και δεν παίρνουμε κάτω φράγμα για την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή να είναι κοντά στη μέση της τιμή. Η 11.7(β) δίνει πάντοτε μή τετριμμένο κάτω φράγμα, αρκεί να ισχύει $E(X^2) < \infty$.

11.8. $P(X > t) = P(aX > at) = P(e^{aX} > e^{at}) \leq E(e^{aX})/e^{at}$. Παίρνουμε $C = E(e^{aX}) \in (0, \infty)$.

11.9. Για $i \geq 1$, έστω X_i ο χρόνος εξυπηρέτησης του i αιτήματος. Απο τις ιδιότητες της εκθετικής κατανομής έχουμε $E(X_1) = 1/\theta = 2, \mathrm{Var}(X_1) = 1/\theta^2 = 4$. Έστω $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Το κεντρικό οριακό θεώρημα λέει ότι η

$$\frac{S_n - 2n}{\sqrt{4n}}$$

προσεγγιστικά ακολουθεί την κατανομή $N(0,1)$.
Ζητάμε την πιθανότητα

$$P\left(S_{100} \leq 220\right) = P\left(\frac{S_{100} - 200}{20} \leq 1\right) \approx P(Z \leq 1) = \Phi(1) \approx 0.8413.$$

Στις πιο πάνω ισότητες, η Z είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$, και χρησιμοποιήσαμε το κεντρικό οριακό θεώρημα.

11.10. (α) Έχουμε $P(X_i = 1) = 1/3, P(X_i = 0) = 2/3$. Δηλαδή κάθε X_i έχει κατανομή Bernoulli με $p = 1/3$. Άρα $E(X_i) = 1/3, \mathrm{Var}(X_i) = p(1-p) = 2/9$.

(β) Θέτουμε $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Οι $\{X_i : i \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Επίσης $Z = S_{1800}$ και

$$\begin{aligned} P(580 < S_{1800} < 640) &= P\left(-1 < \frac{S_{1800} - 1800\,(1/3)}{\sqrt{1800\,(2/9)}} < 2\right) \approx \Phi(2) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \approx 0.8186 \end{aligned}$$

11.11. Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή ομοιόμορφη στο $\{1,2,3,4\}$ και $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Οι δύο πρώτες ροπές της X_1 είναι

$$E(X_1) = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{5}{2},$$
$$E(X_1^2) = \frac{1}{4}(1^2+2^2+3^2+4^2) = \frac{15}{2}.$$

Άρα η X_1 έχει μέση τιμή $5/2$ και πεπερασμένη διασπορά $\sigma^2 = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = 5/4$. Το κεντρικό οριακό θεώρημα λέει οτι για n μεγάλο, η τυχαία μεταβλητή

$$\frac{S_n - 5n/2}{\sqrt{5/4}\sqrt{n}}$$

ακολουθεί προσεγιστικά την τυπική κανονική κατανομή, $N(0,1)$.

Για $n = 80$, έχουμε $5n/2 = 200$ και $\sqrt{(5/4)\,n} = 10$, οπότε

$$P(190 \leq S_{80} \leq 220) = P\left(-1 \leq \frac{S_{80} - 200}{10} \leq 2\right) \approx \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \approx 0.8186$$

Η προσέγγιση στη δεύτερη ισότητα προκύπτει απο το κεντρικό οριακό θεώρημα.

11.12. Θέτουμε

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{αν η } i \text{ ρίψη είναι γράμματα,} \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε $X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(1/2)$, άρα $\mu := E(X_1) = 1/2, \sigma^2 := \mathrm{Var}(X_1) = 1/4$. Οι $(X_i)_{i \geq 1}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Θέτουμε $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Για n μεγάλο, η $(S_n - n/2)/\sqrt{n/4}$ ακολουθεί προσεγγιστικά την κατανομή $N(0,1)$ (από το κεντρικό οριακό θεώρημα). Άρα

$$P(S_{100} \leq 40) = P(S_{100} - 50 \leq -10) = P\left(\frac{S_{100} - 50}{\sqrt{100/4}} \leq -2\right) \approx \Phi(-2) = 1 - \Phi(2).$$

11.13. Δουλεύουμε όπως και στην προηγούμενη άσκηση. Έστω Y_i ο αριθμός λαθών στη σελίδα i, και

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{αν η σελίδα } i \text{ δεν έχει καθόλου λάθη,} \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Ξέρουμε ότι $Y_i \sim \mathrm{Poisson}(0.7)$. Η X_i ακολουθεί την κατανομή $\mathrm{Bernoulli}(p)$ με $p = P(Y_i = 0) = e^{-0.7}(0.7)^0/0! = e^{-0.7} \approx 1/2$. $E(X_1) = p \approx 1/2, \mathrm{Var}(X_1) = p(1-p) \approx 1/4$. Άρα

$$P(S_{64} \leq 36) \approx P(S_{64} - 32 \leq 4) = P\left(\frac{S_{64} - 32}{\sqrt{64/4}} \leq 1\right) \approx \Phi(1).$$

Η πρώτη ισότητα είναι προσέγγιση γιατί χρησιμοποιήσαμε τις προσεγγιστικές τιμές για τα $E(X_1), \mathrm{Var}(X_1)$. Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το κεντρικό οριακό θεώρημα.

11.14. Συνοπτική λύση. Έστω X_i το αποτέλεσμα της i μέτρησης. $E(X_i) = 0, \mathrm{Var}(X_i) = (0.1)^2/12 = 0.01/12$. Έτσι

$$\begin{aligned} P(|S_{300}| \leq 0.25) &= P\left(\left|\frac{S_{300} - 300 \times 0}{\sqrt{300 \times 0.01/12}}\right| \leq \frac{0.25}{\sqrt{300 \times 0.01/12}}\right) \approx P(|Z| \leq 0.5) \\ &= \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = 2\Phi(0.5) - 1 \end{aligned}$$

όπου $Z \sim N(0,1)$ και χρησιμοποιήσαμε το κεντρικό οριακό θεώρημα.

11.15. Έστω $\{X_i : 1 \leq i \leq 200\}$ και $\{Y_i : 1 \leq i \leq 200\}$ οι επιδόσεις των φοιτητών των ομάδων Α και Β αντίστοιχα. Θέτουμε $W_i := X_i - Y_i$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, 200\}$. Τότε

$$M_A - M_B = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} X_i - \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} Y_i = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} W_i.$$

Οι $\{W_i : 1 \leq i \leq 200\}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και έχουν όλες την ίδια κατανομή, με μέση τιμή $\mu = E(W_1) = E(X_1) - E(Y_1) = 9 - 8.5 = 0.5$ και διασπορά

$$\mathrm{Var}(W_1) = \mathrm{Var}(X_1 - Y_1) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(Y_1) - 2\mathrm{Cov}(X_1, Y_1) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(Y_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

λόγω ανεξαρτησίας των X_1, Y_1.

Οπότε

$$\begin{aligned}
P(M_A - M_B \in [0.5, 0.65]) &= P\left(\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} W_i \in [0.5, 0.65]\right) = P\left(\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} W_i - 0.5 \in [0, 3/20]\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{200} W_i - 200 \times 0.5 \in [0, 30]\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{200} W_i - 200 \times 0.5}{\sqrt{200 \times 1/2}} \in [0, 3]\right) \\
&\approx P(Z \in [0, 3]) = \Phi(3) - \Phi(0) = \Phi(3) - 1/2 = 0.4987,
\end{aligned}$$

όπου $Z \sim N(0, 1)$.

11.16. Έστω X_i το κέρδος μας στον i γύρο. Οι $(X_i)_{i \geq 1}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με $E(X_1) = 1/5$ και $\mathrm{Var}(X_1) = 1 - (1/5)^2 = 24/25$. Θέτουμε $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ για κάθε θετικό ακέραιο n. Επειδή $n \geq 30$ (σχετικά μεγάλο δηλαδή), έχουμε ότι η $(S_n - n/5)/\sqrt{24n/25}$ ακολουθεί προσεγγιστικά την κατανομή $N(0, 1)$ (από το κεντρικό οριακό θεώρημα). Άρα

$$P(S_n \leq 2) = P\left(\frac{S_n - (n/5)}{\sqrt{24n/25}} \leq \frac{2 - (n/5)}{\sqrt{24n/25}}\right) \approx \Phi\left(\frac{10 - n}{\sqrt{24n}}\right).$$

Αυτή η πιθανότητα είναι μικρότερη από 0.1 (=$\Phi(-1.282)$) ακριβώς όταν $(10 - n)/\sqrt{24n} \leq -1.282$. Αυτή ικανοποιείται ακριβώς από τους ακεραίους n με $n \geq 58$.

11.17. Η ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα είναι η πυκνότητα μιας τυχαίας μεταβλητής Y με κατανομή $\Gamma(n, 2)$ και το ολοκλήρωμα είναι η πιθανότητα $P(Y < n/2)$. Από τις ιδιότητες της κατανομής Γάμμα, η Y έχει την ίδια κατανομή όπως ένα άθροισμα $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ από ανεξάρτητες και ισόνομες $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με καθεμία X_i να έχει την κατανομή $\Gamma(1, 2)$ η οποία είναι η εκθετική με παράμετρο 2. Άρα $\mu := E(X_1) = 1/2, \sigma^2 := \mathrm{Var}(X_1) = 1/4$ και το ολοκλήρωμα γράφεται

$$P(S_n < n/2) = P(S_n - n\mu < 0) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < 0\right) \overset{n\to\infty}{\to} \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Εφαρμόσαμε το κεντρικό οριακό θεώρημα.

Συμβολισμός: Παντού σε αυτό το φυλλάδιο συμβολίζουμε με $\mathbb{N}$ το σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots\}$ των μη αρνητικών ακεραίων. $A \subset B$ σημαίνει ότι το A είναι υποσύνολο του B όχι απαραίτητα γνήσιο (επιτρέπεται $A = B$).

Σημειωση

Αυτή είναι μια συλλογή ασκήσεων για το μάθημα Πιθανότητες Ι (Μαθηματικό Τμήμα ΕΚΠΑ). Γράφτηκαν με το σκεπτικό η μελέτη τους να αρκεί για την εμπέδωση της θεωρίας του μαθήματος και για την επιτυχία στις εξετάσεις. Δόθηκε προσοχή ώστε για την πλειοψηφία των ασκήσεων η λύση να γραφτεί σχολαστικά, και συνιστάται προσοχή στο πώς δίνεται μια πλήρης αιτιολόγηση, πώς αναφέρουμε και δικαιολογούμε κάθε τι που χρειάζεται για έναν ισχυρισμό.

Οι ασκήσεις προέκυψαν από τις εξής πηγές.

- Τα βιβλία που αναφέρονται παρακάτω.
- Ασκήσεις από τις παραδόσεις του συνάδελφου Αντώνη Οικονόμου που μου έδωσε δακτυλογραφημένες.
- Συζητήσεις με τους συναδέλφους Νίκο Παπαδάτο και Μιχάλη Λουλάκη.
- Θέματα εξετάσεων στο Μαθηματικό Τμήμα από τους συναδέλφους Έφη Βαγγελάτου, Κωστή Μηλολιδάκη, Αντώνη Οικονόμου, Νίκο Παπαδάτο, Σάμη Τρέβεζα.

Σεπτέμβρης 2019 — Δημήτρης Χελιώτης

Αναφορες

[1] W. Feller. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 1, 3rd Edition. Wiley, 1968.
[2] Μ. Κούτρας. Εισαγωγή στη θεωρία των πιθανοτήτων και εφαρμογές. Εκδόσεις Σταμούλη, 2012.
[3] S. Ross. Βασικές αρχές θεωρίας πιθανοτήτων. Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2011.
[4] D. Stirzaker. Elementary Probability. 2nd Edition. Cambridge University Press, 2003.
[5] Χ. Χαραλαμπίδης. Θεωρία πιθανοτήτων και εφαρμογές. Εκδόσεις Συμμετρία, 2009.