

Πιθανότητες Ι
Εξέταση 23 Σεπτεμβρίου 2021

1. (20 Βαθμοί) Μια παρέα 16 ατόμων, που είναι 10 άντρες και 6 γυναίκες μεταξύ των οποίων ο Κίμωνας και η Ναταλία, θέλει να μετακινηθεί χρησιμοποιώντας ταξί. Στο πρώτο ταξί που βρίσκει επιβιβάζονται τυχαία 4 άτομα.

- (α) Ποια η πιθανότητα να έχουν επιβιβαστεί ο Κίμωνας και η Ναταλία;
(β) Ποια η πιθανότητα να έχει επιβιβαστεί ακριβώς ένας από τους Κίμωνα και Ναταλία;
(γ) Ποια η πιθανότητα να έχουν επιβιβαστεί 2 άντρες και 2 γυναίκες;

2. (20 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^3} & \text{αν } x \in (1, 5), \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus (1, 5). \end{cases}$$

- (α) Ποια η τιμή της σταθεράς c ;
(β) Ποια η πιθανότητα $\mathbf{P}(2 < X < 10)$;
(γ) Ποια η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $Y = \log X$;
(δ) Ποια η τιμή της $\mathbf{E}(X^4)$;

3. (30 Βαθμοί) Σε έναν χώρο πιθανότητας έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y για τις οποίες γνωρίζουμε τα εξής. Η X είναι διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x!e} & \text{αν } x \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}, \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{N}$, η $Y|X=x$ ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(x+1, 1)$, δηλαδή έχει πυκνότητα

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x!} y^x e^{-y} 1_{(0, \infty)}(y).$$

- (α) Ναδειχθεί ότι όντως η f_X είναι συνάρτηση πιθανότητας και ναδειχθεί ότι $\mathbf{E}(X) = 1$ και $\mathbf{Var}(X) = 1$ μέσω πλήρους υπολογισμού.
(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή $\mathbf{E}(Y)$ και η συνδιακύμανση $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

4. (15 Βαθμοί) Έστω ότι οι X_1, X_2, \dots, X_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές καθεμία με πυκνότητα f και συνάρτηση κατανομής F . Να βρεθεί η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $Y := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

(Υπόδειξη: Υπολογίστε τη συνάρτηση κατανομής της Y .)

5. (20 Βαθμοί) Ένας τοξοβόλος πρόκειται να πραγματοποιήσει 100 βολές καθεμία από τις οποίες βαθμολογείται με έναν πραγματικό αριθμό από το 0 ως το 100. Θεωρούμε ότι οι βαθμοί διαφορετικών βολών είναι τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες μεταξύ τους και ισόνομες με καθεμία να έχει μέση τιμή 80 και τυπική απόκλιση 15. Έστω Σ το άθροισμα των βαθμολογιών όλων των βολών.

- (α) Ποια η πιθανότητα να συμβεί $\Sigma \geq 8300$;
(β) Ποια η πιθανότητα να συμβεί $\Sigma \leq 7550$;

Δίνεται ότι $\Phi(1) = 0.841$, $\Phi(2) = 0.977$, $\Phi(3) = 0.998$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 1½ ώρα.

Καλή επιτυχία!