Πιθανότητες Ι

Εξέταση 23 Σεπτεμβρίου 2021

1. (20 Βαθμοί) Ένας δάσκαλος αποστέλλεται τυχαία για να διδάξει σε μία από τρεις τάξεις T_1, T_2, T_3 που έχουν αντίστοιχα 3, 8, και 13 παιδιά. Η πιθανότητα να σταλεί στην T_1 είναι 2/5, το ίδιο και στην T_2, ενώ για την T_3 η πιθανότητα είναι 1/5.
(α) Ποια είναι η πιθανότητα στην τάξη που τελικά βρίσκεται να υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα με γενεθλια τον ίδιο μήνα.
(β) Πληροφορούμαστε ότι στην τάξη στην οποία βρέθηκε υπάρχουν δύο άτομα με γενέθλια τον ίδιο μήνα. Ποια η πιθανότητα να βρέθηκε στην T_1;

2. (20 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{αν } x \in (2,7), \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R}\backslash(2,7). \end{cases}$$

(α) Ποια η τιμή της σταθεράς c;
(β) Ποια η πιθανότητα $\mathbf{P}(3 < X < 11)$;
(γ) Ποια η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $Y = \sqrt{X}$;
(δ) Ποια η τιμή της $\mathbf{E}(X^{-3})$;

3. (30 Βαθμοί) Σε έναν χώρο πιθανότητας έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y για τις οποίες γνωρίζουμε τα εξής. Η X είναι διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} & \text{αν } x \in \mathbb{N}^+ = \{1, 2, ...\}, \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{N}^+$ η $Y|\{X = x\}$ ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(x, 1)$, δηλαδή έχει πυκνότητα

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{(x-1)!} y^{x-1} e^{-y} 1_{(0,\infty)}(x).$$

(α) Να δειχθεί ότι όντως η f_X είναι συνάρτηση πιθανότητας και να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(X) = 2$ και $\mathrm{Var}(X) = 2$ μέσω πλήρους υπολογισμού.
(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή $\mathbf{E}(Y)$ και η συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

4. (15 Βαθμοί) Έστω ότι οι $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με πυκνότητα f και συνάρτηση κατανομής F. Να βρεθεί η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $Y := \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$.
(Υπόδειξη: Υπολογίστε τη συνάρτηση κατανομής της Y.)

5. (20 Βαθμοί) Ένας τοξοβόλος πρόκειται να πραγματοποιήσει n βολές, καθεμία από τις οποίες βαθμολογείται με έναν πραγματικό αριθμό από το 0 ως το 100. Θεωρούμε ότι οι βαθμοί διαφορετικών βολών είναι τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες μεταξύ τους και ισόνομες με μέση τιμή 80 και τυπική απόκλιση 10. Έστω Σ το άθροισμα των βαθμολογιών των n βολών.
(α) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του n ώστε $\Sigma \geq 8000$ με πιθανότητα προσεγγιστικά τουλάχιστον 0.5;
(β) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του n ώστε $\Sigma \geq 8000$ με πιθανότητα προσεγγιστικά τουλάχιστον 0.95;

Δίνεται ότι $\Phi(0.95) = 0.82, \Phi(1.65) = 0.95$, και αν $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, τότε $\mathbf{E}(X) = a/\lambda$.

Ενδεχομένως (αλλά όχι απαραίτητα) να σας φανούν χρήσιμα τα αθροίσματα $\sum_{k=1}^{\infty} kt^k = t(1-t)^{-2}, \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)t^k = 2t^2(1-t)^{-3}$ για κάθε $t \in (-1, 1)$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $1\frac{1}{2}$ ώρα. **Καλή επιτυχία!**