Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών
Μάθημα: Πιθανότητες Ι
Περίοδος: Σεπτέμβριος 2012
Ομάδα Β

Ονοματεπώνυμο :

Α.Μ. :

Αίθουσα :

Θέμα 1: Βαθμός [ ]

Θέμα 2: Βαθμός [ ]

Θέμα 3: Βαθμός [ ]

Θέμα 4: Βαθμός [ ]

Θέμα 5: Βαθμός [ ]

Άθροισμα [ ]

Τελικός Βαθμός [ ]

Άριστα είναι το 100. Διάρκεια $2\frac{1}{2}$ ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Τιμές από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής, $N(0,1)$**:**

$$\begin{array}{lll} \Phi(0.5) = 0.6915, & \Phi(1) = 0.8413, & \Phi(1.5) = 0.9332, \\ \Phi(2) = 0.9773, & \Phi(2.33) = 0.99, & \Phi(3) = 0.9987, \\ \Phi(1.65) = 0.95, & \Phi(1.96) = 0.975 & \end{array}$$

Θέμα 1. [25 Βαθμοί] Σε ένα διαγώνισμα πολλαπλής επιλογής, για κάθε ερώτηση προτείνονται 5 απαντήσεις από τις οποίες η μία ακριβώς είναι σωστή. Σωστή απάντηση βαθμολογείται με $+1$ ενώ λανθασμένη απάντηση με $x < 0$. Ένας φοιτητής που λύνει τα θέματα γνωρίζει την απάντηση σε μια τυχαία ερώτηση με πιθανότητα p και δεν έχει ιδέα για την απάντηση με πιθανότητα $1 - p$. Ο φοιτητής ακολουθεί τη στρατηγική να επιλέγει εντελώς στην τύχη όταν δεν έχει ιδέα για τη σωστή απάντηση μιας ερώτησης.

(α) Εάν σε μια ερώτηση έχει δώσει τη σωστή απάντηση, ποια η πιθανότητα να γνώριζε τη σωστή απάντηση;

(β) Ποιο πρέπει να είναι το ποσό της ποινής x εάν επιθυμούμε ο φοιτητής να έχει αναμενόμενη βαθμολογία σε μια τυχαία ερώτηση ίση με p;

Απάντηση:

Θέμα 2. [25 Βαθμοί] Έστω τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(-3, 0)$.

(α) Ποιές είναι οι δυνατές τιμές της τυχαίας μεταβλητή $Y = 1/X$; Να βρεθεί η πυκνότητα της Y, και να επαληθευθεί ότι έχει τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν μια συνάρτηση ως πυκνότητα.

(β) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια $M_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX})$ της X.

Απάντηση:

Θέμα 3. [15 Βαθμοί] Έστω τυχαία μεταβλητή $X \sim \Gamma(a, \theta)$ (με $a, \theta > 0$), δηλαδή συνεχής με πυκνότητα

$$f_X(x) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x} \, \mathbf{1}_{x>0}.$$

(α) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια $M_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX})$ της X. Για ποιά $t \in \mathbb{R}$ είναι η M_X πεπερασμένη;

(β) Για $r > 0$, τι κατανομή ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή $Y = rX$;

Απάντηση:

Θέμα 4. [25 Βαθμοί] Σε 3 ρίψεις ενός τίμιου νομίσματος, έστω X ο αριθμός των κεφαλών στις 2 πρώτες ρίψεις και Y ο αριθμός κεφαλών στις 2 τελευταίες ρίψεις. Θέτουμε $f(x,y) = \mathbf{P}(X = x, Y = y)$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(α) Υπολογίσετε την $f(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbf{P}(Y = 2 \,|\, X = 1)$.

(γ) Υπολογίστε τη συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Απάντηση:

Θέμα 5. [20 Βαθμοί] Έχει παρατηρηθεί ότι ο χρόνος αποφοίτησης (σε εξάμηνα) ενός φοιτητή του τμήματος μαθηματικών είναι μιά τυχαία μεταβλητή με τυπική απόκλιση 4 και μέση τιμή μ. Δίνεται ότι για ένα δεδομένο σύνολο 100 φοιτητών, η πιθανότητα ο μέσος όρος των χρόνων αποφοίτησής τους να ξεπεράσει το 14.86 ισούται με 5/100. Να υπολογιστεί η μέση τιμή μ.

Απάντηση: