Πιθανότητες I

Σεπτέμβριος 2012

Ομάδα Α

Θέμα 1.[25 Βαθμοί] Σε ένα διαγώνισμα πολλαπλής επιλογής, για κάθε ερώτηση προτείνονται 4 απαντήσεις από τις οποίες η μία ακριβώς είναι σωστή. Σωστή απάντηση βαθμολογείται με $+1$ ενώ λανθασμένη απάντηση με $x < 0$. Ένας φοιτητής που λύνει τα θέματα γνωρίζει την απάντηση σε μια τυχαία ερώτηση με πιθανότητα p και δεν έχει ιδέα για την απάντηση με πιθανότητα $1 - p$. Ο φοιτητής ακολουθεί τη στρατηγική να επιλέγει εντελώς στην τύχη όταν δεν έχει ιδέα για τη σωστή απάντηση μιας ερώτησης.

(α) Εάν σε μια ερώτηση έχει δώσει τη σωστή απάντηση, ποια η πιθανότητα να γνώριζε τη σωστή απάντηση;

(β) Ποιο πρέπει να είναι το ποσό της ποινής x εάν επιθυμούμε ο φοιτητής να έχει αναμενόμενη βαθμολογία σε μια τυχαία ερώτηση ίση με p;

Θέμα 2.[25 Βαθμοί] Έστω τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(-2, 2)$.

(α) Ποιές είναι οι δυνατές τιμές της τυχαίας μεταβλητή $Y = 1/X$; Να βρεθεί η πυκνότητα της Y, και να επαληθευθεί ότι έχει τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν μια συνάρτηση ως πυκνότητα.

(β) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια $M_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX})$ της X.

Θέμα 3.[15 Βαθμοί] Έστω τυχαία μεταβλητή $X \sim \Gamma(a, \theta)$ (με $a, \theta > 0$), δηλαδή συνεχής με πυκνότητα

$$f_X(x) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x} \, \mathbf{1}_{x>0}.$$

(α) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια $M_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX})$ της X. Για ποιά $t \in \mathbb{R}$ είναι η M_X πεπερασμένη;

(β) Για $r > 0$, τι κατανομή ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή $Y = rX$;

Θέμα 4.[25 Βαθμοί] Σε 3 ρίψεις ενός τίμιου νομίσματος, έστω X ο αριθμός των κεφαλών στις 2 πρώτες ρίψεις και Y ο αριθμός κεφαλών στις 2 τελευταίες ρίψεις. Θέτουμε

$$f(x, y) = \mathbf{P}(X = x, Y = y)$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(α) Υπολογίσετε την $f(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbf{P}(Y = 1 \,|\, X = 1)$.

(γ) Υπολογίστε τη συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Θέμα 5.[20 Βαθμοί] Έχει παρατηρηθεί ότι ο χρόνος αποφοίτησης (σε εξάμηνα) ενός φοιτητή του τμήματος μαθηματικών είναι μιά τυχαία μεταβλητή με τυπική απόκλιση 5 και μέση τιμή μ. Δίνεται ότι για ένα δεδομένο σύνολο 100 φοιτητών, η πιθανότητα ο μέσος όρος των χρόνων αποφοίτησής τους να ξεπεράσει το 14.265 ισούται με 1/100. Να υπολογιστεί η μέση τιμή μ.

Τιμές από τον Πίνακα της Τυποποιημένης Κανονικής, $N(0, 1)$**:**

$$\Phi(0.5) = 0.6915, \quad \Phi(1) = 0.8413, \quad \Phi(1.5) = 0.9332, \quad \Phi(1.65) = 0.95,$$
$$\Phi(1.96) = 0.975, \quad \Phi(2) = 0.9773, \quad \Phi(2.33) = 0.99, \quad \Phi(3) = 0.9987,$$

Άριστα είναι το 100. Διάρκεια $2\frac{1}{2}$ ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Απαντήσεις

1. (α) Θέτουμε

$$A := \{\text{ο φοιτητής ξέρει την απάντηση στην ερώτηση}\},$$
$$B := \{\text{ο φοιτητής απαντάει σωστά στην ερώτηση}\}.$$

$$\mathbf{P}(A\,|\,B) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B\,|\,A)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B\,|\,A)+\mathbf{P}(A^c)\mathbf{P}(B\,|\,A^c)} = \frac{p}{p+(1-p)\frac{1}{4}} = \frac{4p}{3p+1}.$$

(β) Θέλουμε

$$p = p\cdot 1 + (1-p)\,\frac{1}{4}\cdot 1 + (1-p)\,\frac{3}{4}\,x.$$

Άρα $x = -1/3$.

2. (α) Οι δυνατές τιμές της Y είναι οι αριθμοί του συνόλου $(-\infty,-1/2)\cup(1/2,\infty)$.

$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4t^2} & \text{αν } t\in(-\infty,-1/2)\cup(1/2,\infty),\\ 0 & \text{αν } t\in[-1/2,1/2].\end{cases}$$

Η f είναι μη αρνητική και έχει ολοκλήρωμα 1.

(β)

$$\mathbf{E}(e^{tX}) = \int_{-2}^{2}\frac{1}{4}e^{tx}\,dx = \begin{cases} \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{4t} & \text{αν } t\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 1 & \text{αν } t=0.\end{cases}$$

3. (α) Θεωρία.

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{t}{\theta}} & \text{αν } t<\theta,\\ \infty & \text{αν } t\ge\theta.\end{cases}$$

(β) Ένας τρόπος.

$$M_Y(t) = M_X(rt) = \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{t}{\theta/r}} & \text{αν } t<\theta/r,\\ \infty & \text{αν } t\ge\theta/r.\end{cases}.$$

Κατά τα γνωστά, αυτό δίνει ότι $Y\sim\Gamma(a,\theta/r)$.

4. (α) Η f είναι παντού μηδέν εκτός από τα σημεία $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$. Οι τιμές που δίνει η f σε αυτά τα σημεία φαίνονται στον εξής πίνακα.

$y\backslash x$	0	1	2
0	1/8	1/8	0
1	1/8	2/8	1/8
2	0	1/8	1/8

Για παράδειγμα $\mathbf{P}(X=1,Y=1)=2/8$ γιατί το γεγονός $\{X=1,Y=1\}$ πραγματοποιείται αν και μόνο αν έρθει ένα από τα αποτελέσματα ΚΓΚ, ΓΚΓ, το καθένα από τα οποία έχει πιθανότητα 1/8.

(β) Χρησιμοποιώντας τον πίνακα από το (α), βρίσκουμε

$$\mathbf{P}(Y=1\,|\,X=1) = \frac{\mathbf{P}(Y=1,X=1)}{\mathbf{P}(X=1)} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2}$$

(γ) Από το ερώτημα (α) βρίσκουμε ότι $\mathbf{E}(XY)=5/4, \mathbf{E}(X)=\mathbf{E}(Y)=1$. Άρα

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y) = \frac{1}{4}.$$

5. Έστω X_i ο (τυχαίος) χρόνος αποφοίτησης, σε εξάμηνα, του φοιτητή i, με $i = 1, 2, \ldots, 100$. Έστω $S_{100} := X_1 + \cdots + X_{100}$. Δίνεται ότι

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_{100}}{100} > 14.265\right) = 10^{-2}.$$

Για ευκολία, θέτουμε $n = 100, a = 14.265, \sigma = 5$. Τότε, το κεντρικό οριακό θεώρημα δίνει

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} > 14.265\right) = P(S_n > an) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{(a-\mu)n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{(a-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Επειδή αυτή η ποσότητα ισούται με $10^{-2} = 1 - \Phi(2.33)$ (από τον πίνακα τιμών της Φ) και η Φ είναι 1-1, παίρνουμε κατά προσέγγιση ότι

$$\frac{(a-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} = 2.33$$

Άρα $\mu = a - 2.33\sigma/\sqrt{n} = 14.265 - 2.33/2 = 13.1$