

Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών  
Μάθημα: Πιθανότητες Ι  
Περίοδος: Φεβρουάριος 2012  
Ομάδα Β

Όνοματεπώνυμο :

Α.Μ :

Αίθουσα :

Θέμα 1: Βαθμός [     ]

Θέμα 2: Βαθμός [     ]

Θέμα 3: Βαθμός [     ]

Θέμα 4: Βαθμός [     ]

Άθροισμα [     ]

Τελικός Βαθμός [     ]

Άριστα είναι το 100. Διάρκεια  $2\frac{1}{2}$  ώρες.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Σημείωση:

1) Για μια τυχαία μεταβλητή  $X$  με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & \text{αν } x \in \{1, 2, 3, \dots\} \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου  $p \in (0, 1)$  σταθερά, ισχύει  $E(X) = 1/p$ .

2) Για την συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής  $N(0, 1)$  ισχύει:

$$\Phi(0.5) = 0.691, \Phi(1) = 0.841, \Phi(2) = 0.977$$

**Θέμα 1.** [30 Βαθμοί] **(α)** Κατασκευάζουμε έναν 17-ψήφιο αριθμό που το κάθε ψηφίο του επιλέγεται ανεξάρτητα από την ομοιόμορφη κατανομή στο  $\{1, 2, \dots, 9\}$ . Ποιά η πιθανότητα να εμφανιστεί το ψηφίο 3 ακριβώς τέσσερεις φορές και μάλιστα σε διαδοχικές θέσεις;

**(β)** Από ένα κουτί που περιέχει 4 κόκκινες, 4 μαύρες, και 7 άσπρες μπάλες εξάγουμε διαδοχικά με επανάθεση μία σφαίρα κάθε φορά.

**(i)** Ποιός ο αναμενόμενος αριθμός εξαγωγών (δοκιμών) μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά μαύρη μπάλα;

**(ii)** Ποιός ο αναμενόμενος αριθμός εξαγωγών (δοκιμών) μέχρι να εμφανιστούν και τα δύο χρώματα, κόκκινο και μαύρο;

**Απάντηση:**

**Θέμα 2.** [30 Βαθμοί] (α) Έστω  $X$  τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή  $N(0, 1)$ . Να βρεθεί η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής  $W = |X|$ .

(β) Έστω  $X$  τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με πυκνότητα  $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}$ . Να βρεθεί η πιθανότητα  $P(X > t)$  για  $t > 0$ .

(γ) Ένα κιβώτιο περιέχει 13 λυχνίες οι οποίες έχουν διάρκεια ζωής, εκφρασμένη σε χρόνια, εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο  $\lambda_1 = 1/3$  οι 5 από αυτές, και με παράμετρο  $\lambda_2 = 1/5$  οι υπόλοιπες 8. Επιλέγουμε τυχαία μια λυχνία από το κιβώτιο. Ποιά η πιθανότητα η διάρκεια ζωής της λυχνίας να ξεπεράσει τα 7 χρόνια;

**Απάντηση:**

**Θέμα 3.** [25 Βαθμοί] Έστω  $X$  συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα  $f_X(x) = 6x(1-x) \mathbf{1}_{0 < x < 1}$ .

(α) Υπολογίστε τις  $E(X)$ ,  $\text{Var}(X)$ .

(β) Βρείτε προσεγιστικά την πιθανότητα το άθροισμα 320 ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με πυκνότητα την  $f_X$ , να μην ξεπερνά το αριθμό 156.

**Απάντηση:**

**Θέμα 4.** [25 Βαθμοί] Η συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή  $(X, Y)$  έχει πυκνότητα

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < 2y < x < 2, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- (α) Είναι οι τυχαίες μεταβλητές  $X, Y$  ανεξάρτητες;  
(β) Βρείτε την συνδιακύμανση  $\text{Cov}(X, Y)$ .

**Απάντηση:**