Αρμονική Ανάλυση: Ασκήσεις ΙΙΙ

1. Έστω $\mathcal{A}$ διαιρετική άλγεβρα Banach. Για κάθε $x \in \mathcal{A}$, το $\sigma(x)$ είναι μονοσύνολο, $\sigma(x) = \{\lambda_x\}$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $x \to \lambda_x : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ είναι ισομορφισμός αλγεβρών και ισομετρία.

2. Έστω $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\ell^2)$ η άλγεβρα Banach των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : \ell^2 \to \ell^2$. Δείξτε ότι ο τελεστής $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$ έχει νόρμα 1 και φασματική ακτίνα $\rho(T) = 0$, αλλά δεν είναι μηδενοδύναμος: $T^n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3. (α) Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η άλγεβρα $M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ μιγαδικών πινάκων δεν έχει μη τετριμμένα αμφίπλευρα ιδεώδη, έχει όμως αριστερά ιδεώδη και δεξιά ιδεώδη. Βρείτε την τομή των αριστερών μεγιστικών ιδεωδών της.

(β) Δείξτε ότι η άλγεβρα $T_n(C) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ των άνω τριγωνικών πινάκων έχει ακριβώς n μεγιστικά αμφίπλευρα ιδεώδη.

4. Δείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{M}(c_0)$ των χαρακτήρων της άλγεβρας Banach c_0 (με πράξεις κατά σημείο) είναι ομοιομορφικός με τον χώρο $\mathbb{N}$ με τη διακριτή τοπολογία, και συνεπώς δεν είναι συμπαγής.

5. Για κάθε $a = (a(1), \dots, a(n)) \in \mathbb{C}^n$ θεωρούμε τον τελεστή $T_a : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$T_a(e_k) = \begin{cases} 0 & : k = 1 \\ a(1)e_1 & : k = 2 \\ a(k)e_k & : 2 < k \leq n+1\,. \end{cases}$$

Θεωρούμε την άλγεβρα $\mathcal{A} = \{T_a : a \in \mathbb{C}^n\}$ με τις πράξεις και τη νόρμα των τελεστών. Δείξτε ότι το σύνολο των χαρακτήρων της $\mathcal{A}$ είναι το $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ όπου $\phi_k(T_a) = a(k)$ (και συνεπώς είναι συμπαγές, παρόλο που η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα).

6. Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff. Στην άσκηση αυτή, θα δείξουμε ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στα κλειστά υποσύνολα του X και τα κλειστά ιδεώδη της άλγεβρας $\mathcal{A} = C(X)$. Έστω $E \subseteq X$ κλειστό. Ορίζουμε

$$I(E) = \{f \in \mathcal{A} : f|_E = 0\}\,.$$

Δείξτε ότι το $I(E)$ είναι κλειστό ιδεώδες της $\mathcal{A}$ και ότι, αν $F \subseteq X$ κλειστό με $F \supseteq E$, τότε $I(F) \subseteq I(E)$.

Δυικά, αν $J \subseteq \mathcal{A}$ είναι κλειστό ιδεώδες, ορίζουμε

$$Z(J) = \{x \in X : f(x) = 0 \text{ για κάθε } f \in J\}\,.$$

Δείξτε ότι, για κάθε κλειστό $E \subseteq X$ και κάθε κλειστό ιδεώδες $J \subseteq \mathcal{A}$,

$$Z(I(E)) = E \quad \text{και} \quad J = I(Z(J))\,.$$

Σημείωση. Η δεύτερη ισότητα δεν ισχύει εν γένει σε υπάλγεβρες της $C(X)$, όπως πχ. στην άλγεβρα Fourier ή άλγεβρα Wiener $\mathcal{W}$. Πρόκειται για το πρόβλημα της λεγόμενης *φασματικής σύνθεσης*.

7. Δείξτε ότι οι το σύνολο c_{00} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι ιδεώδες της άλγεβρας Banach $\mathcal{A} = c_0$ (με πράξεις κατά σημείο) που δεν περιέχεται σε κανένα μεγιστικό ιδεώδες.

Υπόδειξη: Έστω ότι υπάρχει μεγιστικό ιδεώδες $\mathcal{M}$ της $\mathcal{A}$ που περιέχει το c_{00}. Αν $y \in \mathcal{A} \backslash \mathcal{M}$, θέτουμε $x = |y|^{1/2}$. Τότε $x \in c_0$! Το ιδεώδες που παράγεται από το $\mathcal{M}$ και το x αναγκαστικά θα περιέχει το x, κι αυτό οδηγεί σε άτοπο.