Τμήμα Μαθηματικών. Ακαδ. έτος 2019-20 (εαρινό εξάμηνο)
Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ - Φύλλο 1

1. Έστω $\vec{a}, \vec{b}$ δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Να δειχθεί ότι για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει μοναδικό $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ το οποίο είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και επίσης είναι τέτοιο ώστε το $\vec{x} - \vec{y}$ είναι κάθετο στα $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

2. Για κάθε ένα από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ να εξεταστεί αν είναι ανοικτό, αν είναι κλειστό, και να βρεθεί το σύνολο των σημείων συσσώρευσης.

$$\mathbb{Q}^2, \quad \mathbb{Z}^2, \quad \{(x,n) : x \in \mathbb{R}^2\,,\ n \in \mathbb{N}\}, \quad \{(x, \frac{1}{n}) : x \in \mathbb{R}^2\,,\ n \in \mathbb{N}\},$$
$$\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \quad (\text{όπου } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ συνεχής συνάρτηση})$$

3. (κιβωτισμός) Να αποδειχθεί ότι αν (F_k) είναι μία ακολουθία μη-κενών συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ με $F_{k+1} \subset F_k$, τότε $\cap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$.

4. Έστω $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

   (i) Η $\vec{f}$ είναι συνεχής συνάρτηση

   (ii) Αν το $A \subset \mathbb{R}^m$ είναι ανοικτό τότε το $\vec{f}^{-1}(A)$ είναι ανοικτό

   (iii) Αν το $K \subset \mathbb{R}^m$ είναι κλειστό τότε το $\vec{f}^{-1}(K)$ είναι κλειστό

5. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^4 + y^4 - 1}{x^2 + y^2 - 1}\ , \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{\sin(x^2 + y^2)}\ , \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{y - x}$$

6. Να εξεταστεί αν υπάρχουν στο $(0,0)$ τα διαδοχικά όρια καθώς και το όριο της

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}.$$

7. Να εξεταστεί για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ μπορεί η

$$h(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2}$$

   να επεκταθεί σε μία συνεχή συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$.

8. Δίνεται διάνυσμα $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ και η συνάρτηση

$$f(\vec{x}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|}\ , \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}.$$

   Αν υπάρχει το $\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} f(\vec{x})$, τότε τι μπορείτε να συμπεράνετε για το διάνυσμα $\vec{a}$;

Τμήμα Μαθηματικών. Ακαδ. έτος 2019-20 (εαρινό εξάμηνο)
Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ - Φύλλο 2

1. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(1 - \cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right)\sqrt{x^2+y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι στο (0,0) η f είναι συνεχής αλλά δεν είναι διαφορίσιμη. Να εξεταστεί επίσης αν υπάρχουν οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι στο $(0,0)$. Να βρεθεί, εφόσον υπάρχει, η κατεύθυνση μέγιστου ρυθμού μεταβολής στο $(0,0)$.

2. Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο ελλειπτικό παραβόλοειδές $z = 3x^2 + y^2$ στο σημείο $(1,-2,7)$. Να βρεθεί το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σημείο αυτό.

3. Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται κυρτό αν έχει την εξής ιδιότητα: αν $\vec{x}, \vec{y} \in A$ και $t \in [0,1]$ τότε $(1-t)\vec{x} + t\vec{y} \in A$. Έστω ότι αν το $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό και ότι η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι C^1 με φραγμένες μερικές παραγώγους. Έστω $M = \sup_A |\nabla f|$. Αν δειχθεί ότι για κάθε $\vec{x}, \vec{y} \in A$ ισχύει

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| \leq M\|\vec{x} - \vec{y}\|\,.$$

4. Έστω $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ C^1, θετικά ομογενής συνάρτηση βαθμού $\alpha > 0$, δηλαδή συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f(t\vec{x}) = t^\alpha f(\vec{x})\,, \qquad t > 0\,,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Να δειχθεί ότι

$$\vec{x} \cdot \nabla f(\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})\,, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

5. Υλικό σημείο κινείται υπό την επίδραση δύναμης και η θέση του τη χρονική στιγμη t είναι

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad , \qquad t \in [0, \pi/2].$$

Τη χρονική στιγμή $t = \pi/2$ παύει η άσκηση δύναμης και το σώμα κινείται ελεύθερα. Να βρεθεί η θέση του τη στιγμή όπου θα φτάσει σε ύψος 5.

6. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\beta \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\beta}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $(0,0)$ και για ποια β είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

7. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

έχει μερικές παραγώγους σε κάθε σημείο. Απόδειξτε ότι οι μερικές παράγωγοι δεν είναι συνεχείς στο $(0,0)$ αλλά η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

8. Αποδείξτε ότι το 2×2 σύστημα

$$u = x^2 y \ \ , \quad v = x^3 - y^2$$

μπορεί να λυθεί μονοσήμαντα ως προς (x,y) για (u,v) κοντά στο $(4,7)$ με την λύση (x,y) να βρίσκεται κοντά στο $(2,1)$. Για τις αντίστοιχες συναρτήσεις $x(u,v)$, $y(u,v)$ να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\partial x/\partial u$, $\partial x/\partial v$, $\partial y/\partial u$ και $\partial y/\partial v$ στο σημείο $(u,v) = (4,7)$.

Τμήμα Μαθηματικών. Ακαδ. έτος 2019-20 (εαρινό εξάμηνο)
Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ - Φύλλο 3

1. Έστω
$$g(x) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}.$$
Να δειχθεί ότι οι μερικές παράγωγοι β΄ τάξης f_{xy} και f_{yx} υπάρχουν στο $(0,0)$ αλλά $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

2. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία C^2 συνάρτηση και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|)$. Να δειχθεί ότι

   (i) Η κατεύθυνση μέγιστης αύξησης σε κάθε μη-κρίσιμο σημείο $\vec{x}$ είναι παράλληλη με το $\vec{x}$

   (ii) $f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + \ldots + f_{x_nx_n} = g'' + \dfrac{n-1}{r}g' \,, \qquad r = \|\vec{x}\|$

   (iii) Αποδείξτε ότι αν $n \geq 3$ τότε η συνάρτηση $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^{2-n}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, είναι λύση της εξίσωσης του Laplcace: $f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + \ldots + f_{x_nx_n} = 0$, στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

3. Να δειχθεί ότι αν η συνάρτηση f είναι C^2 στο $\mathbb{R}^2$ τότε
$$f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta} \qquad (x = r\cos\theta \ , \ \ y = r\sin\theta)$$

4. Έστω $P(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου του m. Να δειχθεί ότι αν
$$\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \frac{P(\vec{x})}{\|\vec{x}\|^m} = 0$$
τότε το P είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

5. Αν $P(x,y,z)$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού και
$$\lim_{(x,y,z)\to(3,2,1)} \frac{(y^2 - xz)^{yz} - P(x,y,z)}{(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} = 0,$$
να βρεθεί ο συντελεστής του xy στο πολυώνυμο αυτό.

6. Δείξτε ότι υπάρχει μία C^∞ συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(1-\delta, 1+\delta)$ ώστε $x^{f(x)} + f(x)^x = 2$ για κάθε $x \in (1-\delta, 1+\delta)$. Επίσης να υπολογιστεί το $f'(1)$.

7. Αποδείξτε ότι υπάρχει C^∞ συνάρτηση $z = \phi(x,y)$ ορισμένη σε μία περιοχή U του σημείου $(3,-2)$ τέτοια ώστε $\phi(3,-2) = 1$ και
$$\phi(x,y)^6 + x\phi(x,y)^2 + 5y\phi(x,y) + y^2 + 2 = 0 \ , \qquad (x,y) \in U \, .$$
Στη συνέχεια βρείτε την κατεύθυνση μέγιστου ρυθμού μεταβολής της ϕ στο σημείο $(3,-2)$.

8. Να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $h(x, y) = x^4 + 2y^2 - 12xy$.

9. Θεωρούμε το ελλειψοειδές $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, όπου $a, b, c > 0$. Βρείτε ένα σημείο του (x_0, y_0, z_0) ώστε αν φέρουμε το εφαπτόμενο επίπεδο E στο σημείο αυτό, ο όγκος που ορίζεται από το E στο πρώτο ογδοημόριο να είναι ο ελάχιστος δυνατός. [Θεωρείστε γνωστό ότι ο όγκος του τετραπλεύρου που ορίζεται από την αρχή των αξόνων και τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι $\frac{1}{6}|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$.]

Τμήμα Μαθηματικών. Ακαδ. έτος 2019-20 (εαρινό εξάμηνο)
Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ - Φύλλο 4

1. Να υπολογιστεί το διαδοχικό ολοκλήρωμα
$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 (1+x^5)^{-7} y \, dx \, dy$$

2. Να βρεθεί το κέντρο βάρους του χωρίου
$$D = \big\{(x,y) : a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2 \ : y \geq \lambda|x|\big\} \qquad \big(\lambda \geq 0, \ b > a > 0\big\}$$

3. Να υπολογιστεί το $\lim a_N$ όπου
$$a_N = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{ij}{(N^2+i^2+j^2)^2}$$
[*Υπόδειξη.* Αναγνωρίστε το a_N ως ένα άθροισμα Riemann]

4. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τους κυλίνδρους $x^2+y^2=a^2$ και $x^2+z^2=a^2$.

5. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{(x+2y)^3}{(2x^2+5y^2+2xy)^{3/2}} dx\,dy$, όπου
$$D = \big\{(x,y) : 2x^2+5y^2+2xy \leq 1 \ , \ \ 1 \leq 2x+4y \leq 2\big\}$$
Υπόδειξη. Θέστε $u = x+2y$, $v = x-y$.

6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iiint_G z(x^2+y^2)^{-1/2} dx\,dy\,dz$ όπου G το στερεό χωρίο που φράσσεται από πάνω από το επίπεδο $z=2$ και από κάτω από το παραβολοειδές $2z = x^2+y^2$.

7. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που σε πολικές συντεταγμένες ορίζεται από τη σχέση $r^2 \leq a^2 \cos 2\theta$ $(a > 0))$.

8. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που η βάση του είναι το καρδιοειδές $r \leq a(1+\cos\theta)$, και το οποίο φράσσεται από πάνω από το παραβολοειδές $z = x^2+y^2$.

9. Να βρεθεί για ποια $\alpha \in \mathbb{R}$ συγκλίνει το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\iiint_{\mathbb{R}^3}(x^2+y^2+z^2)^{-\alpha} dx\,dy\,dz$.

10. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από κάτω από τον κώνο $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$ και από πάνω από τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=4$.

Τμήμα Μαθηματικών. Ακαδ. έτος 2019-20 (εαρινό εξάμηνο)
Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ - Φύλλο 5

1. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \Big\{[ye^{xy}\cos z+2x\sin(yz)+x]dx+[xe^{xy}\cos z+zx^2\cos(yz)-e^y]dy+[yx^2\cos(yz)-e^{xy}\sin z+2z]dz\Big\}$$

όπου γ είναι η καμπύλη $(t^3\cos t, t^2\sin t, te^t)$, $0\le t\le\pi$.

2. Εξετάστε αν το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}=(2xy+z-1, x^2+2yz^2, 2y^2z+x-2z)$ είναι συντηρητικό και στη συνέχεια υπολογίστε το $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ όπου $\gamma(t)=(\frac{t}{4}, \frac{t}{4}\cos t, t^{8/3})$, $0\le t\le 4\pi$.

3. Αποδείξτε ότι η καμπύλη Γ που είναι η τομή του ημισφαιρίου $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ και του κυλίνδρου $x^2+y^2=2x$ έχει το ίδιο μήκος με την έλλειψη $2x^2+y^2=2$.

4. Έστω $\vec{F}=(P,Q):\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^2$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο με $P_y=Q_x$. Να δειχθεί ότι αν γ_1, γ_2 είναι απλές κλειστές τμηματικά C^1 καμπύλες θετικής φοράς και $(0,0)\in \mathrm{int}(\gamma_1)\cap\mathrm{int}(\gamma_2)$, τότε $\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$. [*Η λύση μπορεί να βασιστεί σε μεγάλο βαθμό σε κατάλληλο σχήμα. Θεωρείστε πρώτα την περίπτωση όπου οι γ_1 και γ_2 δεν τέμνονται.*]

5. Έστω a,b,A,B θετικοί αριθμοί τέτοιο ώστε $\frac{a^2}{A^2}+\frac{b^2}{B^2}\neq 1$. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma\left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)$ όπου γ η έλλειψη με εξίσωση $\frac{(x-a)^2}{A^2}+\frac{(y-b)^2}{B^2}=1$.

6. Επαληθεύστε το θεώρημα απόκλισης του Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z)=(0,0,z^3)$ στη σφαίρα $S(R)$.

7. Αποδείξτε ότι ο τύπος του Stokes συνεπάγεται τον τύπο του Green.

8. Έστω το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(\vec{r})=\|\vec{r}\|^{-3}\vec{r}$ και $\alpha>0$. Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_{\partial K_\alpha}\vec{F}\cdot\vec{\nu}dS$ όπου K_α είναι το μέρος της μπάλας $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ όπου $z\ge-\alpha$ και $\vec{\nu}$ είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂K_α.

9. Εφαρμόστε το θεώρημα του Stokes προκειμένου να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}$ όπου $\vec{F}=(-y^3,x^3,z^3)$ και γ η τομή του επιπέδου $x+y+z=1$ με τον κύλινδρο $x^2+y^2=1$, όπου η φορά λαμβάνεται έτσι ώστε να προκύπτει θετική φορά αν προβάλλουμε στο επίπεδο $z=0$.

$$\boxed{\text{Λύσεις φύλλου 2}}$$

1/ Ισχύει

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)|$$
$$\leq 2\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

άρα η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Για τις κατευθύνσεις $\vec{u} = \pm\vec{e}_1 = (\pm 1, 0)$ έχουμε

$$\frac{f(t\vec{u}) - f(0,0)}{t} = \frac{f(\pm t, 0)}{t} = 0,$$

άρα $D_{\vec{u}} f(0,0) = 0$.

Για οποιαδήποτε άλλη κατεύθυνση $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ έχουμε

$$\frac{f(t\vec{u}) - f(0,0)}{t} = \frac{\left(1 - \cos\left(\frac{t\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)\right)|t|}{t}$$

$$= \frac{1 - \cos\left(\frac{t\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)}{t^2} \cdot t|t| \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

άρα $D_{\vec{u}} f(0,0) = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$
αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

ισοδύναμα αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1 - \cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) = 0 .$$

Όμως κατά μήκος της παραβολής
$2y = x^2$ το όριο είναι $1-\cos 2$.
Άρα η f δεν είναι διαφορίσιμη
στο $(0,0)$.

2/ Το παραβολοειδές είναι το γράφημα της συνάρτησης

$$f(x,y) = 3x^2+y^2.$$

Σύμφωνα με τη θεωρία η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι

$$z = 7 + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,-2)} (x-1) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,-2)} (y+2)$$

Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x \Longrightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,-2)} = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \Longrightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,-2)} = -4.$$

Άρα η εξίσωση είναι

$$z = 7 + 6(x-1) - 4(y+2)$$

δηλ.

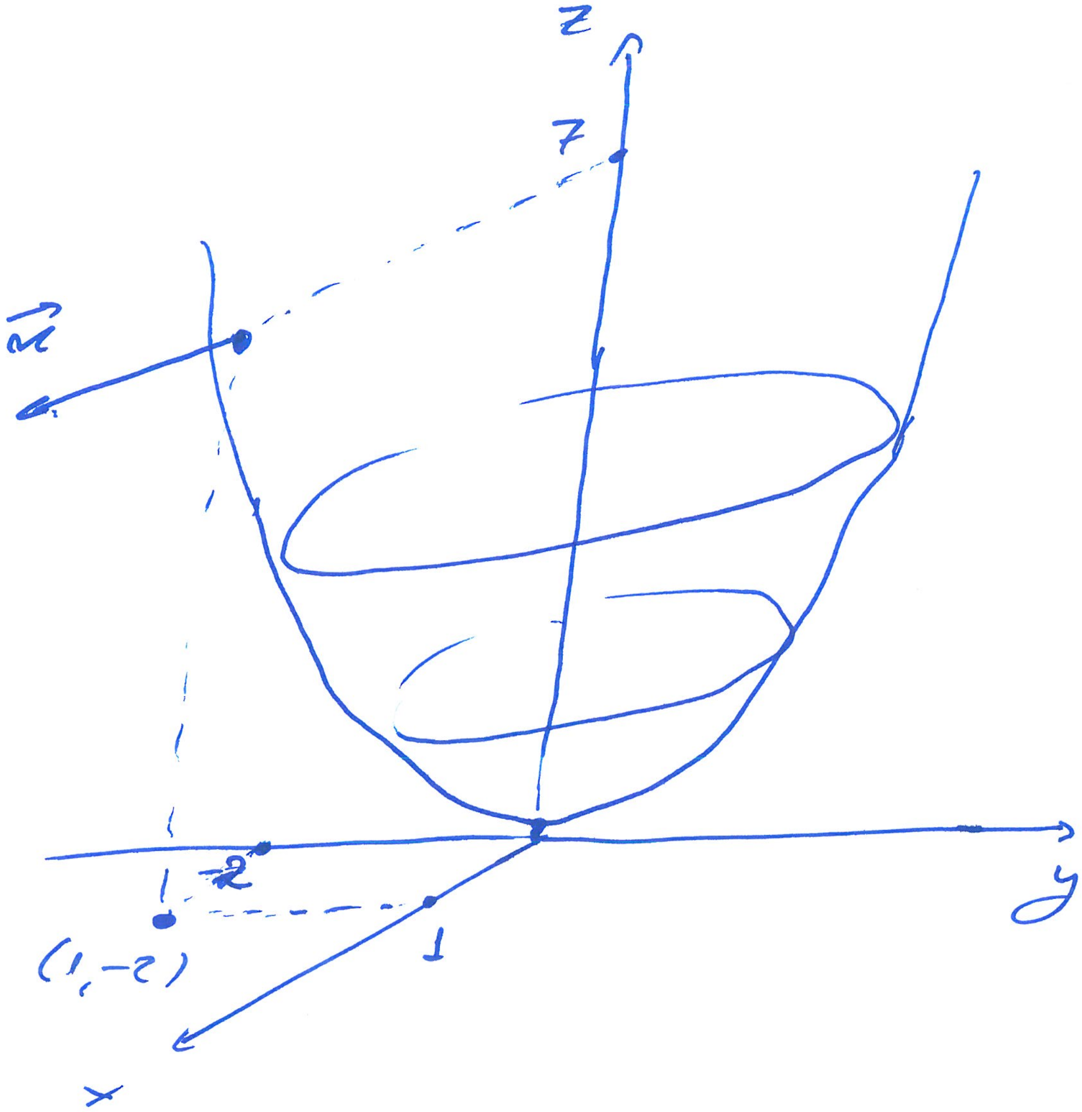
$$z = 6x - 4y - 7$$

δηλ.

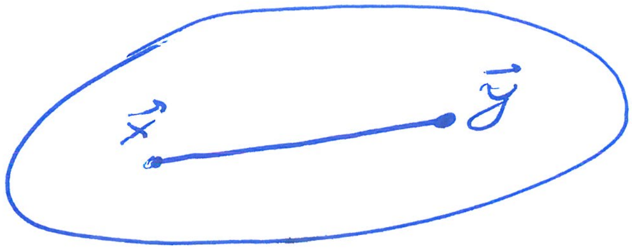
$$6x - 4y - z = 7$$

Το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο είναι το $\vec{n} = \dfrac{(6,-4,-1)}{\|(6,-4,-1)\|}$

$$= \frac{1}{\sqrt{53}}(6,-4,-1)$$


z
7
$\vec{n}$
2
y
(1, -2)
1
x

3/



Παραμετροποιούμε το ευθύγραμμο τμήμα θέτοντας

$$\vec{\gamma}(t) = (1-t)\vec{x} + t\vec{y} \quad , \quad t \in [0,1].$$

Ορίζουμε $g(t) = f(\vec{\gamma}(t))$.

Η $g(t)$ είναι C' οπότε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε

$$g(1) - g(0) = g'(\xi)(1-0) = g'(\xi)$$

Άρα, χρησιμοποιώντας και τον κανόνα της αλυσίδας

$$
\begin{aligned}
|f(\vec{y}) - f(\vec{x})| &= |g(1) - g(0)| \\
&= |g'(\xi)| \\
&= |\nabla f(\vec{\gamma}(\xi)) \cdot \vec{\gamma}\,'(\xi)| \\
&= |\nabla f(\vec{\gamma}(\xi)) \cdot (\vec{y} - \vec{x})| \\
&\leq \|\nabla f(\vec{\gamma}(\xi))\| \cdot \|\vec{y} - \vec{x}\| \\
&\leq M \|\vec{y} - \vec{x}\|
\end{aligned}
$$

4/ Έστω $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Παραγωγίζουμε τη σχέση

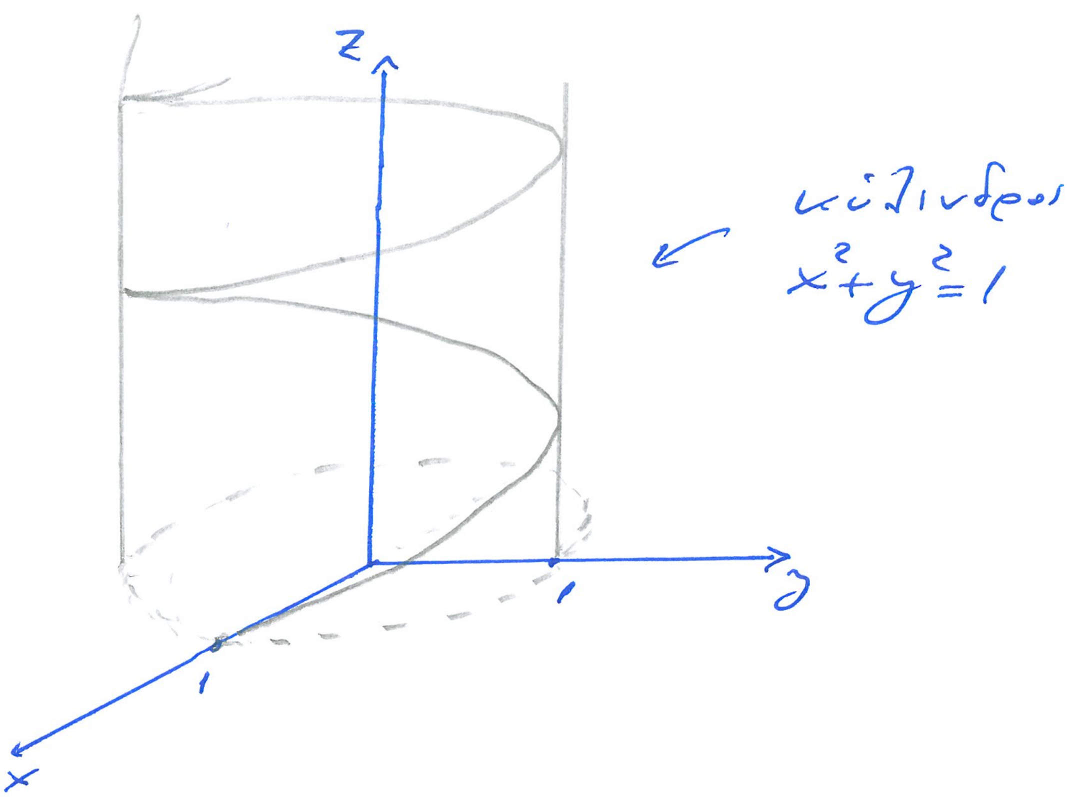
$$f(t\vec{x}) = t^{\alpha} f(\vec{x}) \quad , \quad t>0$$

ως προς t. Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$\nabla f(t\vec{x}) \cdot \vec{x} = \alpha t^{\alpha-1} f(\vec{x}) \quad , \quad t>0$$

Επιλέγοντας $t=1$ προκύπτει το ζητούμενο.

5/



Η ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t \le \frac{\pi}{2}$ είναι $\vec{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

Τη στιγμή $t = \frac{\pi}{2}$ ξεκινά ευθύγραμμη ομαλή κίνηση από τη θέση $\vec{\gamma}(\frac{\pi}{2}) = (0, 1, \frac{\pi}{2})$ με ταχύτητα

$\vec{\gamma}'(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0, 1)$.

Άρα η θέση τη στιγμή $t \ge \frac{\pi}{2}$ είναι

$$\vec{\varphi}(t) = (0, 1, \tfrac{\pi}{2}) + (t - \tfrac{\pi}{2})(-1, 0, 1)$$
$$= (\tfrac{\pi}{2} - t, 1, t)$$

Φτάνει σε ύψος $z=5$ τη στιγμή $t=5$, οπότε η θέση του είναι $(\frac{\pi}{2} - 5, 1, 5)$.

6/ Κατά μήκος της ευθείας $y=\lambda x$ έχουμε

$$f(x,\lambda x)=\frac{\lambda x^2}{(x^2+\lambda^2x^2)^\theta}=\frac{\lambda}{(1+\lambda^2)^\theta}|x|^{2-2\theta}$$

Αν $2-2\theta<0$ αυτό τείνει στο άπειρο, ενώ αν $2-2\theta=0$ το όριο εξαρτάται από το λ.

Στην περίπτωση $2-2\theta>0$, δηλ. $\theta<1$, έχουμε $f(x,\lambda x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$, άρα πιθανό όριο είναι το 0. Πράγματι

$$\frac{|xy|}{(x^2+y^2)^\theta}\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{1-\theta}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0=f(0,0)$$

Άρα f συνεχής στο $(0,0)$ ανν $\theta<1$.

Έχουμε

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

άρα $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, και όμοια $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα, η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ ανν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

δηλ. ανν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\theta+\frac{1}{2}}} = 0$$

δηλαδή, από τα προηγούμενα,

ανν $\theta + \frac{1}{2} < 1$

δηλ

ανν $\theta < \frac{1}{2}$

7/ Για $(x,y)\neq(0,0)$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Επίσης

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = x \sin\frac{1}{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 ,$$

άρα $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Όμοια βρίσκουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Οι μερικές παράγωγοι δεν είναι συνεχείς στο $(0,0)$: κατά μήκος της ευθείας $y=0$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x \sin\frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{|x|}$$

Θεωρώντας π.χ. την $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ βλέπουμε ότι η $\partial f/\partial x\,(x,0)$ δεν τείνει στο $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ καθώς $x\to 0$. Άρα η $\partial f/\partial x$ είναι ασυνεχής στο $(0,0)$. Το ίδιο ισχύει και για την $\partial f/\partial y$.

Ωστόσο η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. Έχουμε

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\,\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\longrightarrow 0 \quad , \text{ καθώς } (x,y)\to(0,0)$$

άρα πράγματι η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

8/ Θέτουμε $\vec{f}(x,y)=(u,v)=(x^2y,\ x^3-y^2)$

Έχουμε τότε $\vec{f}(2,1)=(4,7)$.

Ο Ιακωβιανός πίνακας είναι

$$J\vec{f}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2xy & x^2\\ 3x^2 & -2y\end{bmatrix}$$

και άρα $\det J\vec{f}(2,1)=-56\neq 0$.

Από το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης έπεται ότι υπάρχει τοπική αντίστροφη της $\vec{f}$ από μια περιοχή του $(4,7)$ σε μια περιοχή του $(2,1)$.

Επιπλέον

$$(D\vec{f}^{-1})(4,7)=[D\vec{f}(2,1)]^{-1}$$

δηλ.

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}_{(4,7)}=\begin{bmatrix}4 & 4\\ 12 & -2\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{-56}\begin{bmatrix}-2 & -4\\ -12 & 4\end{bmatrix}$$

και άρα

$$\frac{\partial x}{\partial u}(4,7)=\frac{1}{28},\quad \frac{\partial x}{\partial v}(4,7)=\frac{1}{14},\quad \frac{\partial y}{\partial u}(4,7)=\frac{3}{14}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}(4,7)=-\frac{1}{14}$$

Λύσεις τρίτου φύλλου ασκήσεων

1 Υπολογίζουμε

$$f_x = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} \quad , \text{ στο } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$f_y = \frac{-xy^4 - 4x^3y^2 + x^5}{(x^2+y^2)^2} \quad , \text{ στο } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

καθώς επίσης $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

Άρα για $y \neq 0$

$$\frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} = \frac{-\frac{y^5}{y^4} - 0}{y} = -1$$

συνεπώς $f_{xy}(0,0) = -1$.

Επίσης για $x \neq 0$

$$\frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x} = \frac{\frac{x^5}{x^4} - 0}{x} = 1$$

και άρα $f_{yx}(0,0) = 1$.

2. Έχουμε $f(\vec{x}) = g(r)$, $r = \|\vec{x}\|$.

(i) Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}) = g'(r)\,\frac{\partial r}{\partial x_k} = g'(r)\,\frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_1^2+\dots+x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{x_k}{r}\,g'(r)$$

Άρα

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{g'(r)}{r}\,\vec{x} \qquad (r = \|\vec{x}\|)$$

το οποίο είναι παράλληλο με το $\vec{x}$.

(ii) Έχουμε

$$f_{x_k x_k}(\vec{x}) = \left(\frac{x_k}{r}\,g'(r)\right)_{x_k}$$

$$= \frac{g'(r)}{r} + x_k\,\frac{d}{dr}\left(\frac{g'(r)}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x_k}$$

$$= \frac{g'(r)}{r} + x_k\left(\frac{g''(r)}{r} - \frac{g'(r)}{r^2}\right)\frac{x_k}{r}$$

$$= \frac{g''(r)\,x_k^2}{r^2} + \frac{g'(r)}{r}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{x_k^2}{r^2}\right)$$

και άρα

$$\sum_{k=1}^{n} f_{x_k x_k}(\vec{x}) = \frac{g''(r)}{r^2}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$$

$$+ \frac{g'(r)}{r}\left(\frac{n}{r^2} - \frac{1}{r^2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$$

$$= g''(r) + \frac{n-1}{r}\,g'(r)$$

(iii) Σύμφωνα με το (ii) έχουμε

$$f_{x_1x_1}+\dots+f_{x_nx_n} = \frac{d^2}{dr^2} r^{2-n} + \frac{n-1}{r}\frac{d}{dr} r^{2-n}$$

$$= (2-n)(1-n) r^{-n} + \frac{n-1}{r}(2-n) r^{1-n} = 0$$

3. Έχουμε

$$\begin{pmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$f_r = f_x x_r + f_y y_r$$

$$= \cos\theta\, f_x + \sin\theta\, f_y$$

και

$$f_{rr} = \cos\theta\left(\cos\theta\, f_{xx} + \sin\theta\, f_{xy}\right)$$

$$+ \sin\theta\left(\cos\theta\, f_{yx} + \sin\theta\, f_{yy}\right)$$

$$= \cos^2\theta\, f_{xx} + 2\cos\theta\sin\theta\, f_{xy} + \sin^2\theta\, f_{yy}$$

Επίσης

$$f_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta$$

$$= -r\sin\theta\, f_x + r\cos\theta\, f_y$$

και

$$f_{\theta\theta} = -r\cos\theta\, f_x - r\sin\theta\left(-r\sin\theta\, f_{xx} + r\cos\theta\, f_{xy}\right)$$

$$- r\sin\theta\, f_y + r\cos\theta\left(-r\sin\theta\, f_{yx} + r\cos\theta\, f_{yy}\right)$$

$$= r^2\sin^2\theta\, f_{xx} - 2r^2\cos\theta\sin\theta\, f_{xy}$$

$$+ r^2\cos^2\theta\, f_{yy} - r\cos\theta\, f_x - r\sin\theta\, f_y$$

Άρα

$$f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} =$$

$$= \cos^2\theta\, f_{xx} + 2\cos\theta\sin\theta\, f_{xy} + \sin^2\theta\, f_{yy}$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\cos\theta\, f_x + \sin\theta\, f_y\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2}\Big[r^2\sin^2\theta\, f_{xx} - 2r^2\cos\theta\sin\theta\, f_{xy}$$

$$+ r^2\cos^2\theta\, f_{yy} - r\cos\theta\, f_x - r\sin\theta\, f_y \Big]$$

$$= f_{xx} + f_{yy}$$

~~4. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στη διάσταση n.~~

~~Για $n=1$ πρέπει να δείξουμε ότι αν~~

$$\cancel{\lim_{x\to 0} \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{x^m} = 0}$$

~~τότε $a_0 = a_1 = \cdots = a_m = 0$, το οποίο είναι πολύ απλό.~~

~~Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για διάσταση $n-1$ ($\forall m \in \mathbb{N}$) και θα το αποδείξουμε για διάσταση n.~~

5

5. Σύμφωνα με τη θεωρία, το $P(x,y,z)$ είναι το πολυώνυμο Taylor β' βαθμού της $f(x,y,z) = (y^2-xz)^{yz}$ στο σημείο $(3,2,1)$. Άρα ο συντελεστής του xy είναι $2f_{xy}(3,2,1)/2! = f_{xy}(3,2,1)$

Υπολογίζουμε:

$$f_x = yz(y^2-xz)^{yz-1}\cdot(-z)$$
$$= -yz^2(y^2-xz)^{yz-1}$$

$$f_{xy} = -z^2(y^2-xz)^{yz-1}$$
$$-yz^2(yz-1)(y^2-xz)^{yz-2}\cdot 2y$$
$$-yz^2(y^2-xz)^{yz-1}\ln(y^2-xz)\, z$$

$$= -z^2(y^2-xz)^{yz-1}$$
$$-2y^2z^2(yz-1)(y^2-xz)^{yz-2}$$
$$-yz^3(y^2-xz)^{yz-1}\ln(y^2-xz)$$

Άρα ο συντελεστής είναι

$$f_{xy}(3,2,1) = -9$$

6. Έστω η συνάρτηση $F(x,y) = x^y + y^x$.
Η $F(x,y)$ είναι C^1 στο $(0,\infty)\times(0,\infty)$ και ισχύει $F(1,1) = 2$. Συνεπώς η ύπαρξη της f θα έπεται από το Θ. Πεπλεγμένης Συνάρτησης αν δείξουμε ότι $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) \neq 0$.
Έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x + x y^{x-1}$$

άρα

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 1.$$

Άρα υπάρχει η $f(x)$. Επιπλέον

$$f'(1) = -\frac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = -1.$$

7. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x,y,z) = z^6 + xz^2 + 5yz + y^2 + 2$$

Παρατηρούμε ότι $F(3,-2,1)=0$. Επίσης

$$F_z(3,-2,1) = 6z^5 + 2xz + 5y\Big|_{(3,-2,1)} = 2 \neq 0$$

Συνεπώς η ύπαρξη της $\varphi(x,y)$ έπεται από το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης.

Επιπλέον έχουμε

$$\varphi_x(3,-2) = -\frac{F_x(3,-2,1)}{F_z(3,-2,1)} = -1$$

$$\varphi_y(3,-2) = -\frac{F_y(3,-2,1)}{F_z(3,-2,1)} = -\frac{5}{2}$$

δηλαδή $\nabla\varphi(3,-2) = (-1,-5/2)$. Συνεπώς η κατεύθυνση μέγιστου ρυθμού μεταβολής της $\varphi(x,y)$ στο σημείο $(3,-2)$ είναι η

$$\vec{u} = \frac{\nabla\varphi(3,-2)}{\|\nabla\varphi(3,-2)\|} = \frac{1}{\sqrt{29}}(-2,-5)$$

8. Έχουμε $\nabla h = (4x^3-12y, 4y-12x)$

Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 4x^3-12y=0 \\ 4y-12x=0 \end{cases}$$

Βρίσκουμε τρία κρίσιμα σημεία, τα $(0,0)$, $\pm(3,9)$.

Ο Εσσιανός πίνακας είναι

$$Hh = \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}.$$

Κοιτάμε ξεχωριστά το κάθε κρίσιμο σημείο

- $(0,0)$

  Έχουμε

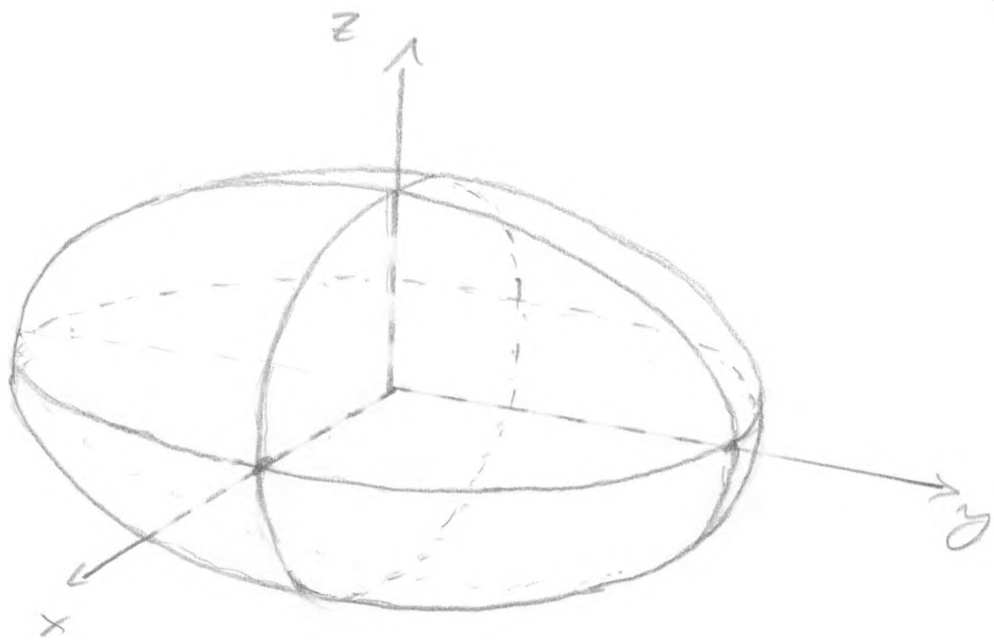
  $ac-b^2=-144<0$

  άρα είναι σαγματικό σημείο

- $(3,9)$.

  Έχουμε $ac-b^2 = 12\cdot 9\cdot 4 - 12^2 = 288>0$, $a=12\cdot 9>0$, άρα γνήσιο τοπικό ελάχιστο

- $(-3,-9)$ Ομοίως, γνήσιο τοπικό ελάχιστο.



Έστω (x_0, y_0, z_0) το ζητούμενο σημείο. Γνωρίζουμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο στο (x_0, y_0, z_0) έχει εξίσωση

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$$

και συνεπώς τέμνει τους τρεις άξονες στα σημεία $\left(\frac{a^2}{x_0}, 0, 0\right)$, $\left(0, \frac{b^2}{y_0}, 0\right)$ και $\left(0, 0, \frac{c^2}{z_0}\right)$.

Έπεται ότι ο όγκος του αντίστοιχου τετραέδρου είναι

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2 b^2 c^2}{x_0 y_0 z_0}$$

Συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται στο:

Να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση $f(x,y,z)=xyz$ υπό τον περιορισμό $\underbrace{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}_{g(x,y,z)}=1$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange: θεωρούμε το σύστημα.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z)=\lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z)=1 \end{cases}$$

δηλαδή το

$$\begin{cases} yz=\lambda \frac{2x}{a^2} \\ xz=\lambda \frac{2y}{b^2} \\ xy=\lambda \frac{2z}{c^2} \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο πρώτες σχέσεις παίρνουμε

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{b^2}{a^2}$$

και επειδή θεωρούμε $x, y, z > 0$,

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}$$

Χρησιμοποιώντας και την τρίτη σχέση παίρνουμε

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Όμως

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

άρα

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

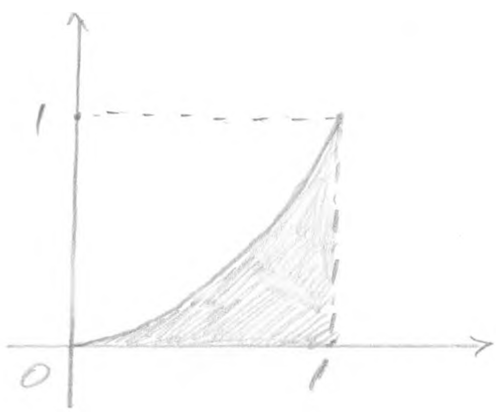
Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

Λύσεις τέταρτου φύλλου ασκήσεων

1. Όπως δίνεται το ολοκλήρωμα είναι δύσκολο να υπολογιστεί. Το αναγνωρίζουμε ως διαδοχικό ολοκλήρωμα στο χωρίο

$$D=\{(x,y):\ 0\le y\le 1\ ,\ \sqrt{y}\le x\le 1\}$$

$$=\{(x,y):\ 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le x^2\}$$



Άρα

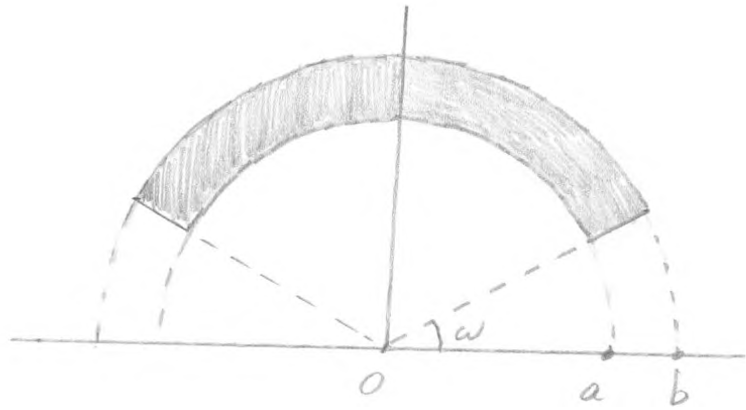
$$I=\int_0^1\int_0^{x^2}(1+x^5)^{-7}y\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1(1+x^5)^{-7}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2}=\frac{1}{4}\int_0^1(1+x^5)^{-7}x^4\,dx$$

$$=-\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}\left[(1+x^5)^{-6}\right]_0^1$$

$$=\frac{21}{2560}$$

2.



Έστω $\omega = \arctan 2$. Σε πολικές συντεταγμένες το D εκφράζεται ως

$$D = \{(r,\theta) : a \le r \le b,\ \omega \le \theta \le \pi - \omega\}$$

Θεωρώντας πυκνότητα $\rho = 1$ η μάζα του D είναι

$$m = \text{εμ}(D) = \int_a^b \int_\omega^{\pi-\omega} r \, d\theta \, dr$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)(b^2 - a^2)$$

Το κέντρο μάζας βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα και έχει τεταγμένη

$$y_0 = \frac{1}{m} \iint_D y \, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{m} \int_a^b \int_\omega^{\pi-\omega} r\sin\theta \cdot r \, d\theta \, dr$$

$$= \frac{1}{m}\left(\int_a^b r^2 dr\right)\left(\int_\omega^{\pi-\omega} \sin\theta \, d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{(\frac{\pi}{2}-\omega)(b^2-a^2)} \cdot \frac{b^3-a^3}{3} \cdot 2\cos\omega$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\cos\omega}{\frac{\pi}{2}-\omega} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

3. Βάσει της υπόδειξης, θέλουμε στο γενικό όρο του αθροίσματος να εμφανίσουμε το $\frac{1}{N^2}$. Επίσης, λόγω συμμετρίας, είναι λογικό το σχετικό χωρίο ολοκλήρωσης να είναι τετράγωνο, και χωρίς περιορισμό της γενικότητας το $[0,1]\times[0,1]$. Φαίνεται επίσης λογικό τα σημεία υπολογισμού της συνάρτησης να είναι τα $(\frac{i}{N}, \frac{j}{N})$, $i,j=1,\dots,N$.

Γράφουμε

$$a_N = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{ij}{(N^2+i^2+j^2)^2} = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\frac{i}{N}\cdot\frac{j}{N}}{\left(1+(\frac{i}{N})^2+(\frac{j}{N})^2\right)^2} \cdot \frac{1}{N^2}$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα αυτό είναι άθροισμα Riemann για το ολοκλήρωμα

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

για τη διαμέριση του $[0,1]\times[0,1]$ σε N^2 ίσα τετράγωνα πλευράς $\frac{1}{N}$. Το (i,j)-τετράγωνο είναι το $[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]\times[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}]$ και το αντίστοιχο σημείο επιλογής είναι το $(\frac{i}{N}, \frac{j}{N})$.

Έπεται ότι

$$\lim a_N = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα γράφοντάς το ως διαδοχικό ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{x}{2(1+x^2+y^2)} \right]_0^1 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{2+x^2}\right)dx = \frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}$$

4. Έχουμε

$$D = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le a^2,\ x^2+z^2 \le a^2\}$$

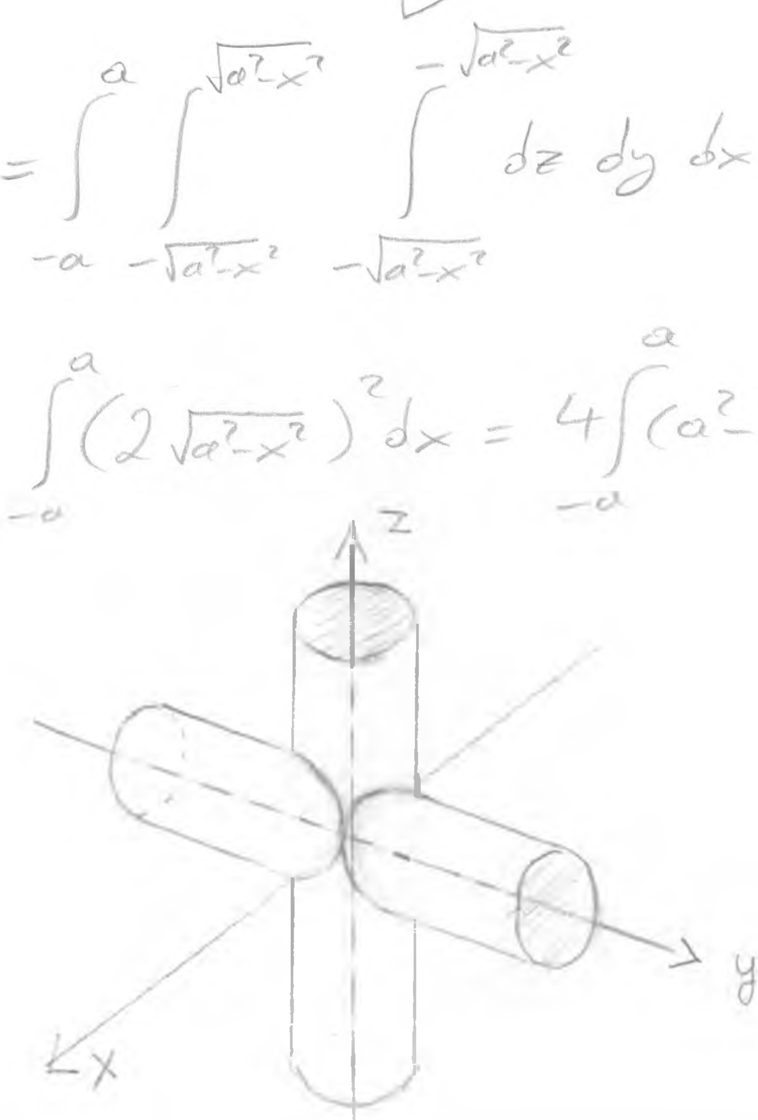
$$= \{(x,y,z) : -a \le x \le a,\ -\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2},$$
$$-\sqrt{a^2-x^2} \le z \le \sqrt{a^2-x^2}\}$$

Άρα

$$\text{όγκος}(D) = \iiint_D dV =$$

$$= \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{-\sqrt{a^2-x^2}} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{-a}^{a}\left(2\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx = 4\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx = \frac{16a^3}{3}$$



5. Εκφράζουμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση ως προς u, v. Έχουμε

$$x = \frac{u+2v}{3}, \quad y = \frac{u-v}{3},$$

άρα

$$2x^2 + 5y^2 + 2xy =$$

$$= 2\left(\frac{u+2v}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{u-v}{3}\right)^2 + 2\,\frac{u+2v}{3}\cdot\frac{u-v}{3}$$

$$= u^2 + v^2$$

Ορίζουμε $T(u,v) = (x,y) = \left(\frac{u+2v}{3}, \frac{u-v}{3}\right)$.

Τότε λοιπόν $D = T(D^*)$ όπου

$$D^* = \left\{(u,v) : u^2+v^2 \le 1, \ \frac{1}{2} \le u \le 1\right\}$$

Επίσης

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{3}$$

Άρα

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(T(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

$$= \iint_{D^*} \frac{u^3}{(u^2+v^2)^{3/2}}\,du\,dv$$

Για τον υπολογισμό αυτού του ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες (στο (u,v)-επίπεδο)

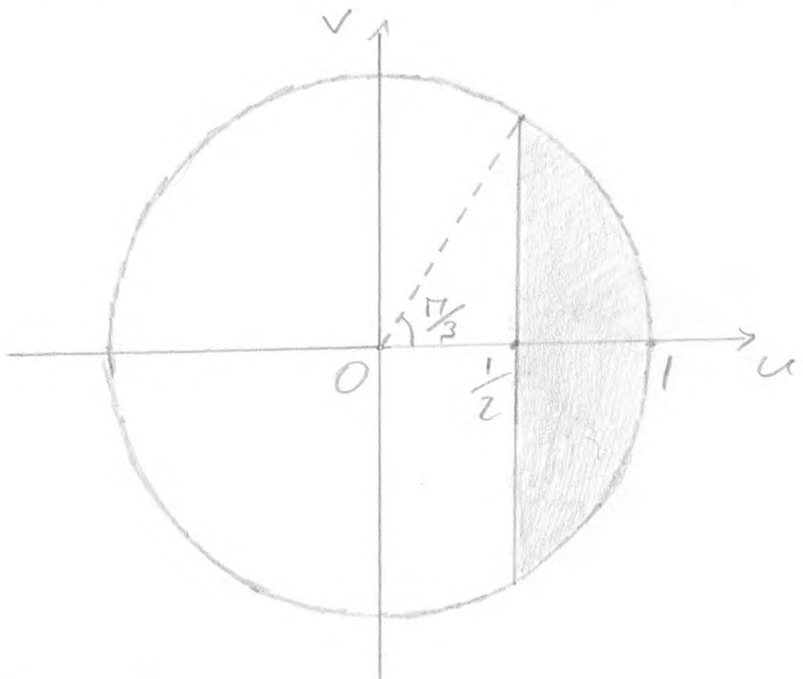
$$u = r\cos\theta$$
$$v = r\sin\theta$$

Σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$D^* = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1 ,\ \tfrac{1}{2} \le r\cos\theta \le 1\}$$

$$= \{(r,\theta) : -\tfrac{\pi}{3} \le \theta \le \tfrac{\pi}{3} ,\ \frac{1}{2\cos\theta} \le r \le 1\}$$

(θ-απλό)



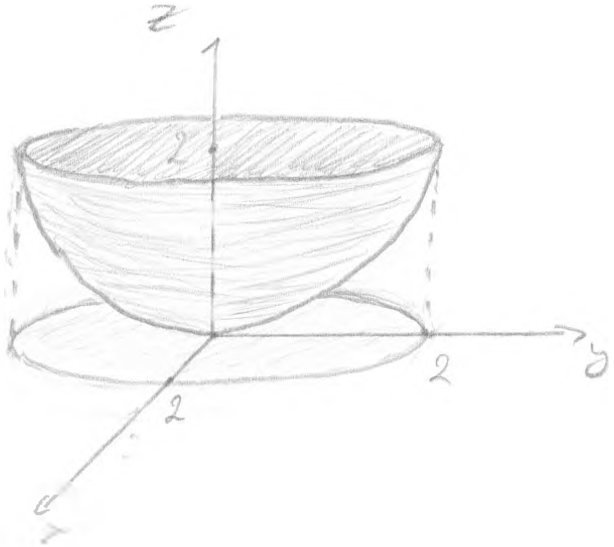
Άρα

$$I = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{1} \frac{(r\cos\theta)^3}{r^3}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^3\theta \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4\cos^2\theta}\right)\right] d\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

8

6.



Έχουμε

$$G = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2+y^2}{2} \le z \le 2 \right\}$$

Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες, οπότε

$$G = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \le z \le 2 ,\ r \le \sqrt{2z} \right\}$$

Παίρνουμε

$$\iiint_G z(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2z}} z\, r^{-1} r \, dr\, dz\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^2 z \int_0^{\sqrt{2z}} dr\, dz = 2\pi \int_0^2 z\sqrt{2z}\, dz$$

$$= \frac{32\pi}{5}$$

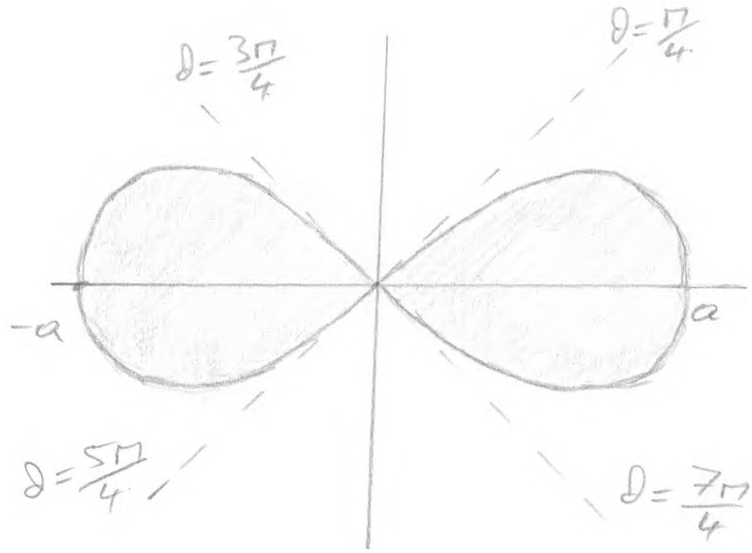
7.

$D = \{ (r,\theta) : r^2 \le a^2 \cos 2\theta \}$

Πρέπει $\cos 2\theta \ge 0 \iff$ (για $\theta \in [0, 2\pi]$)

$\iff \theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$

(ή, αν $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$, $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$)



Λόγω συμμετρίας

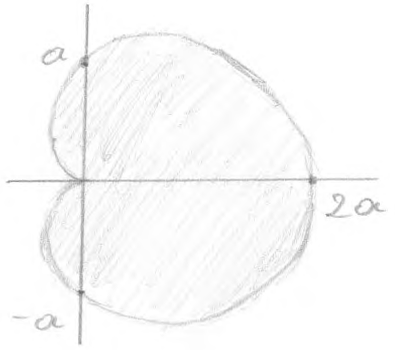
$E = 2 \times$ εμβαδον(δεξιού μισού)

$$= 2 \iint_{\delta.\mu.} dx\,dy$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}$$

δ.



Συμβολίζοντας με D το καρδιοειδές έχουμε

$$V = \iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy$$

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες και έχουμε

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 \cdot r \, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} a^4 (1+\cos\theta)^4 \, d\theta$$

$$= \frac{35\pi}{16} a^4$$

9. Χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες: 11

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} (x^2+y^2+z)^{-\alpha}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^{-2\alpha} \rho^2 \sin\varphi \, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

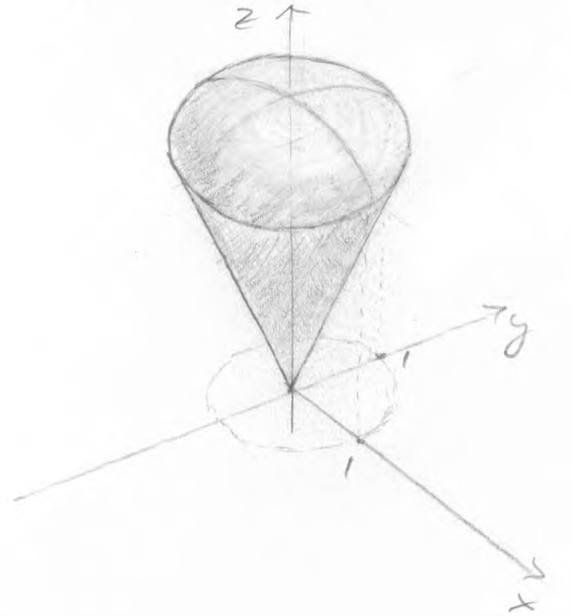
$$= 4\pi \int_0^\infty \rho^{2-2\alpha}\, d\rho$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι καταχρηστικό και στο 0 και στο $+\infty$. Για να συγκλίνει στο 0 πρέπει $2-2\alpha > -1$ ενώ για να συγκλίνει στο $+\infty$ πρέπει $2-2\alpha < -1$. Άρα το ολοκλήρωμα δε συγκλίνει για καμία τιμή του α.

10. Ο κώνος και η σφαίρα τέμνονται στα σημεία (x,y,z) που είναι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

Απαλείφοντας το z βρίσκουμε ότι η λύση είναι ο κύκλος $z=\sqrt{3}$, $x^2+y^2=1$.



Άρα το στερεό, έστω G, είναι το

$$G=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\leq 1,\ \sqrt{3(x^2+y^2)}\leq z\leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$$

Καλύτερα σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

$$G=\{(r,\theta,z):\ 0\leq r\leq 1,\ \sqrt{3}\,r\leq z\leq \sqrt{4-r^2}\}$$

Οπότε

$$\mathrm{vol}(G) = \iiint_G dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{3}\,r}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^1 r\left(\sqrt{4-r^2} - \sqrt{3}\,r\right) dr$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{8}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$$

Λύσεις πέμπτου φύλλου ασκήσεων

1. Με απλές πράξεις (παραλείπονται) βλέπουμε ότι $\mathrm{curl}\,\vec{F}=\vec{0}$. Επειδή το $\vec{F}$ ορίζεται και είναι C^1 σε όλο το $\mathbb{R}^3$, έπεται ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό, δηλαδή υπάρχει $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ώστε $\vec{F}=\nabla\varphi$.
Γράφουμε $\vec{F}=(P,Q,R)$ και έχουμε:

$$\varphi=\int\varphi_x\,dx=\int\left(ye^{xy}\cos z+2x\sin(yz)+x\right)dx$$

$$=e^{xy}\cos z+x^2\sin(yz)+\frac{x^2}{2}+h_1(y,z)$$

Επίσης

$$\varphi=\int\varphi_y\,dy=\int\left(xe^{xy}\cos z+zx^2\cos(yz)-e^{y}\right)dy$$

$$=e^{xy}\cos z+x^2\sin(yz)-e^{y}+h_2(x,z)$$

και παρόμοια

$$\varphi=\int\varphi_z\,dz=\int\left(yx^2\cos(yz)-e^{xy}\sin z+2z\right)dz$$

$$=x^2\sin(yz)+e^{xy}\cos z+z^2+h_3(x,y)$$

Από τις τρεις παραπάνω σχέσεις μετά από την απλοποίηση παίρνουμε

$$\frac{x^2}{2} + h_1(y,z) = -e^y + h_2(x,z) = z^2 + h_3(x,y)$$

(*)

Μπορούμε να συμπεράνουμε "με το μάτι" ότι

$$h_1(y,z) = -e^y + z^2 + c$$

$$h_2(x,z) = \frac{x^2}{2} + z^2 + c$$

$$h_3(x,y) = \frac{x^2}{2} - e^y + c$$

Ή αν θέλουμε πιο αυστηρά: παραγωγίζουμε ως προς x την (*)

$$x = \frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{\partial h_3}{\partial x}$$

Άρα, ολοκληρώνοντας ως προς x,

$$h_2(x,y) = \frac{x^2}{2} + g_1(z)$$

$$h_3(x,y) = \frac{x^2}{2} + g_2(y)$$

Αντικαθιστώντας στην (*) καταλήγουμε ότι

$$h_1(y,z) = -e^y + g_1(z) = z^2 + g_2(y)$$

άρα

$$g_1(z) - z^2 = e^y + g_2(y)$$

άρα $\quad g_1(z) - z^2 = e^y + g_2(y) = c_1$

Καταλήγουμε τελικά ότι

$$\varphi(x,y,z) = e^{xy}\cos z + x^2\sin(yz) + \frac{x^2}{2} - e^{y} + z^2 + c \quad \left(\begin{matrix}\text{επιλέγουμε}\\ c=0\end{matrix}\right)$$

Σύμφωνα με τη θεωρία έχουμε

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \nabla\varphi\cdot d\vec{r} = \varphi(\vec{r}(\pi)) - \varphi(\vec{r}(0))$$

Έχουμε

$$\varphi(\vec{r}(0)) = \varphi(0,0,0) = 0$$

$$\varphi(\vec{r}(\pi)) = \varphi(-\pi^3, 0, \pi e^{\pi})$$

$$= \cos(\pi e^{\pi}) + \frac{\pi^6}{2} - 1 + \pi^2 e^{2\pi}$$

και άρα

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot dr = \cos(\pi e^{\pi}) + \frac{\pi^6}{2} - 1 + \pi^2 e^{2\pi}$$

2. Εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη άσκηση. Έστω $\vec{F} = (P, Q, R)$.

Οι συνιστώσες του $\operatorname{curl}\vec{F}$ είναι

$$(\operatorname{curl}\vec{F})_1 = R_y - Q_z = 4yz - 4yz = 0$$

$$(\operatorname{curl}\vec{F})_2 = P_z - R_x = 1 - 1 = 0$$

$$(\operatorname{curl}\vec{F})_3 = Q_x - P_y = 2x - 2x = 0$$

Το $\vec{F}$ είναι C^∞ διανυσματικό πεδίο στο $\mathbb{R}^3$, είναι αστρόβιλο, και είναι συντηρητικό. Έστω φ τέτοια ώστε $\nabla\varphi = \vec{F}$.

Έχουμε

$$\varphi(x,y,z) = \int \varphi_x \, dx = \int P \, dx = \int (2xy + z - 1)\, dx$$

$$= x^2 y + xz - x + h(y,z)$$

Παραγωγίζουμε ως προς y:

$$Q = \varphi_y = x^2 + \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\begin{array}{c} \| \\ x^2 + 2yz^2 \end{array} \qquad \Longrightarrow \frac{\partial h}{\partial y} = 2yz^2$$

$$\Longrightarrow h(y,z) = \int \frac{\partial h}{\partial y}\, dy = \int 2yz^2 \, dy = y^2 z^2 + g(z)$$

Συνεπώς

$$\varphi(x,y,z) = x^2y + xz - x + y^2z^2 + g(z).$$

Παραγωγίζουμε ως προς z:

$$R = \varphi_z = x + 2y^2z + g'(z)$$

$$\parallel$$

$$2y^2z + x - 2z$$

Άρα $g'(z) = 2z$, άρα $g(z) = z^2 + c$

Καταλήγουμε λοιπόν (με $c=0$) στην

$$\varphi(x,y,z) = x^2y + xz - x + y^2z^2 + z^2$$

Έχουμε $\gamma(0) = (0,0,0)$, άρα

$$\varphi(\gamma(0)) = \varphi(0,0,0) = 0$$

Επίσης $\gamma(4\pi) = (\pi, \pi, (4\pi)^{8/3})$, άρα

$$\varphi(\gamma(4\pi)) = \pi^3 + \pi(4\pi)^{8/3} - \pi + \pi^4 + (4\pi)^{16/3}$$

Τελικά

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \varphi(\gamma(4\pi)) - \varphi(\gamma(0))$$

$$= \pi^4 + \pi^3 - \pi + \pi(4\pi)^{8/3} + (4\pi)^{16/3}$$

3. Έχουμε

$$x^2+y^2=2x$$

$$\Longleftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$$

Μία παραμέτρηση του κύκλου αυτού (στο $\mathbb{R}^2$) είναι η

$$(x(t),y(t))=(1+\cos t,\sin t), \quad t\in[0,2\pi].$$

Επιλέγοντας

$$z(t)=\sqrt{4-x(t)^2-y(t)^2}=\sqrt{4-2x(t)}$$

$$=\sqrt{2-2\cos t}=2\sqrt{\sin^2\tfrac{t}{2}}=2\sin\tfrac{t}{2}$$

έχουμε ότι η

$$\vec{\gamma}(t)=(x(t),y(t),z(t))$$

$$=(1+\cos t,\sin t,2\sin\tfrac{t}{2}), \quad 0\le t\le 2\pi$$

είναι μία παραμέτρηση της τομής.

Έχουμε

$$\vec{\gamma}'(t)=(-\sin t,\cos t,\cos\tfrac{t}{2})$$

άρα

$$\|\vec{\gamma}'(t)\|=(1+\cos^2\tfrac{t}{2})^{\frac{1}{2}}$$

και συνεπώς

$$\ell(\vec{\gamma})=\int_{\vec{\gamma}}ds=\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\tfrac{t}{2})^{\frac{1}{2}}dt$$

Μια παραμετρικοποίηση της έλλειψης $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ είναι η

$$\vec{\sigma}(t)=(\cos t, \sqrt{2}\sin t), \quad t\in[0,2\pi]$$

Συνεπώς το μήκος της είναι

$$\ell(\vec{\sigma})=\int_{\vec{\sigma}} ds = \int_0^{2\pi} \|\vec{\sigma}'(t)\| dt$$

$$=\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + 2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}} dt$$

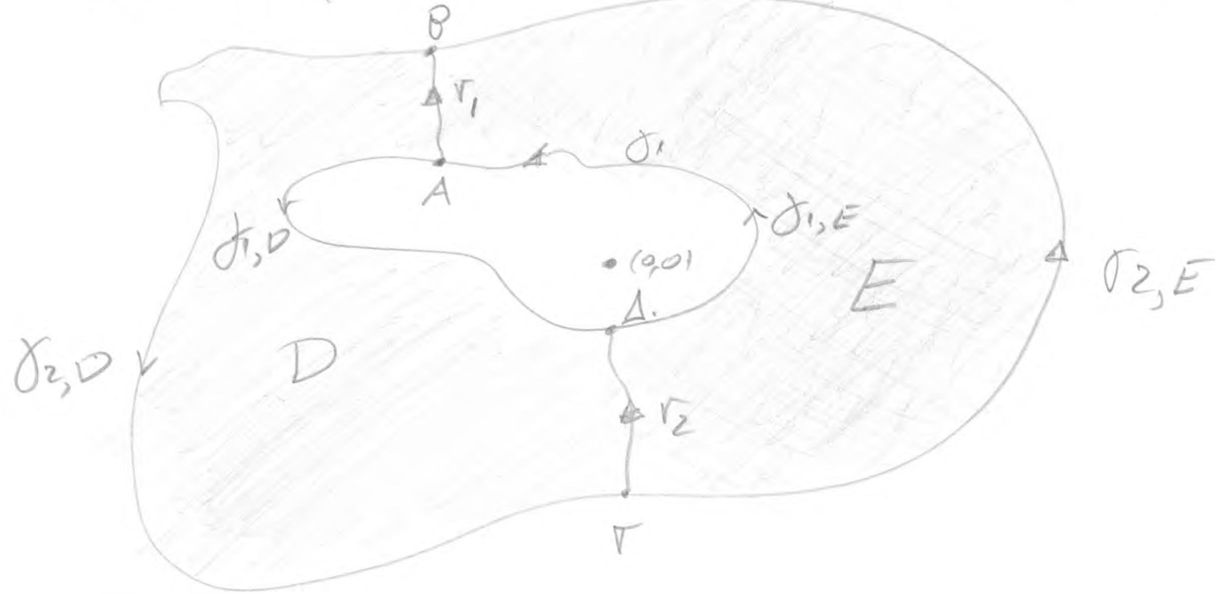
$$=\int_0^{2\pi} (1+\cos^2 t)^{\frac{1}{2}} dt \qquad t=\frac{\tau}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \left(1+\cos^2\frac{\tau}{2}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau$$

$$=\int_0^{2\pi} \left(1+\cos^2\frac{\tau}{2}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau$$

$$=\ell(\vec{\gamma}).$$

4. Υποθέτουμε πρώτα ότι $Im(\gamma_1)\cap Im(\gamma_2)=\emptyset$.



Φέρνουμε καμπύλες r_1, r_2 όπως στο σχήμα. Προκύπτουν έτσι δύο χωρία D, E, τα οποία είναι απλά συνεκτικά. Από γνωστό θεώρημα έπεται ότι

$$\int_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\partial E}\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$$ (θετική φορά ολοκλήρωσης)

Συμβολίζουμε με $\gamma_{1,D}$ το τμήμα της γ_1 που ξεκινά από το A και καταλήγει στο Δ και με $\gamma_{1,E}$ το τμήμα από το Δ στο A. Αντίστοιχα ορίζουμε τις $\gamma_{2,D}$ και $\gamma_{2,E}$: η $\gamma_{2,D}$ ξεκινά από το B και καταλήγει στο Γ ενώ η $\gamma_{2,E}$ ξεκινά από το Γ και καταλήγει στο B.

Έχουμε τότε

$$\int_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_{2,D}}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{r_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_{1,D}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_{\partial E}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_{1,E}}\vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{r_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_{2,E}}\vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{r_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$0 = \int_{\gamma_{2,D}}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_{2,E}}\vec{F}\cdot d\vec{r} - \left(\int_{\gamma_{1,D}}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_{1,E}}\vec{F}\cdot d\vec{r}\right)$$

$$= \int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Αν $\text{ιχν}(\gamma_1)\cap\text{ιχν}(\gamma_2)\neq\phi$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε καμπύλη γ που δεν τέμνει τις γ_1, γ_2, και έχουμε από το προηγούμενο

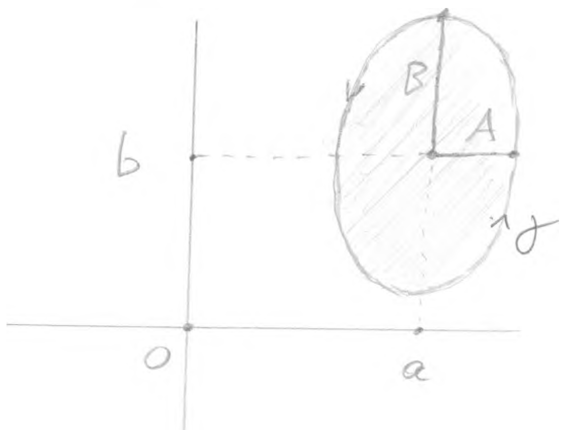
$$\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}, \quad \int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

5 Η υπόθεση $\frac{a^2}{A^2}+\frac{b^2}{B^2}\neq 1$ σημαίνει ότι η έλλειψη γ δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) $\frac{a^2}{A^2}+\frac{b^2}{B^2}>1$

Τότε $(0,0)\in ext(\gamma)$.

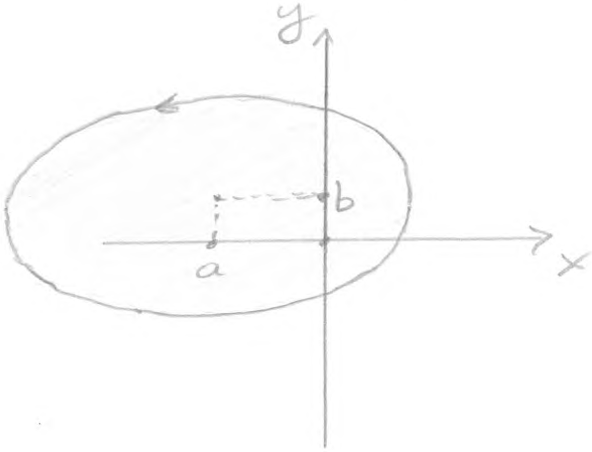


Η διαφορική μορφή $\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$ είναι κλειστή (δηλ. $P_y=Q_x$) σε ένα απλά συνεκτικό σύνολο που περιέχει τη γ (π.χ. στην "φουσκωμένη" έλλειψη $\frac{(x-a)^2}{A^2}+\frac{(y-b)^2}{B^2}=1+\varepsilon$ για αρκετά μικρό $\varepsilon>0$). Από γνωστό θεώρημα έπεται ότι

$$\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=0$$

(β) $\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} < 1$

Τώρα $(0,0) \in \mathrm{int}(\gamma)$



Από την άσκηση 4 έπεται ότι

$$\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int_{S(1)} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

(γνωστό, σελ 84-85)

$= 2\pi$

6. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\iiint_{\overline{B}(R)} \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \iint_{S(R)} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$$

Έχουμε $\operatorname{div}\vec{F} = 3z^2$. Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες και υπολογίζουμε:

$$\iiint_{\overline{B}(R)} \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} 3(\rho\cos\varphi)^2 \rho^2 \sin\varphi \, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

$$= 6\pi \left(\int_0^R \rho^4 d\rho\right)\left(\int_0^\pi \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi\right)$$

$$= \frac{4\pi R^5}{5}$$

Για το επιφανειακό ολοκλήρωμα, παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι σε τυχόν $(x,y,z)\in S(R)$ έχουμε

$$\vec{n} = \frac{1}{R}(x,y,z)$$

Άρα

$$\vec{F}\cdot\vec{n} = (0,0,z^3)\cdot\frac{1}{R}(x,y,z)$$

$$= \frac{z^4}{R}$$

Χρησιμοποιούμε την παραμετρισμό

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = (R\sin\varphi\cos\theta,\ R\sin\varphi\sin\theta,\ R\cos\varphi),$$
$$0\le\varphi\le\pi,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

της σφαίρας $S(R)$.
Έχουμε (όπως στη σελ 107-108) ότι

$$\|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta\| = R^2\sin\varphi$$

Άρα

$$\iint_{S(R)} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \frac{1}{R}\iint_{S(R)} z^4\, dS$$

$$= \frac{1}{R}\iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} (R\cos\varphi)^4\, \|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta\|\, d\varphi\, d\theta$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos^4\varphi \cdot R^2\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$= 2\pi R^5 \int_0^{\pi} \cos^4\varphi\, \sin\varphi\, d\varphi$$

$$= 2\pi R^5\, \frac{2}{5}$$

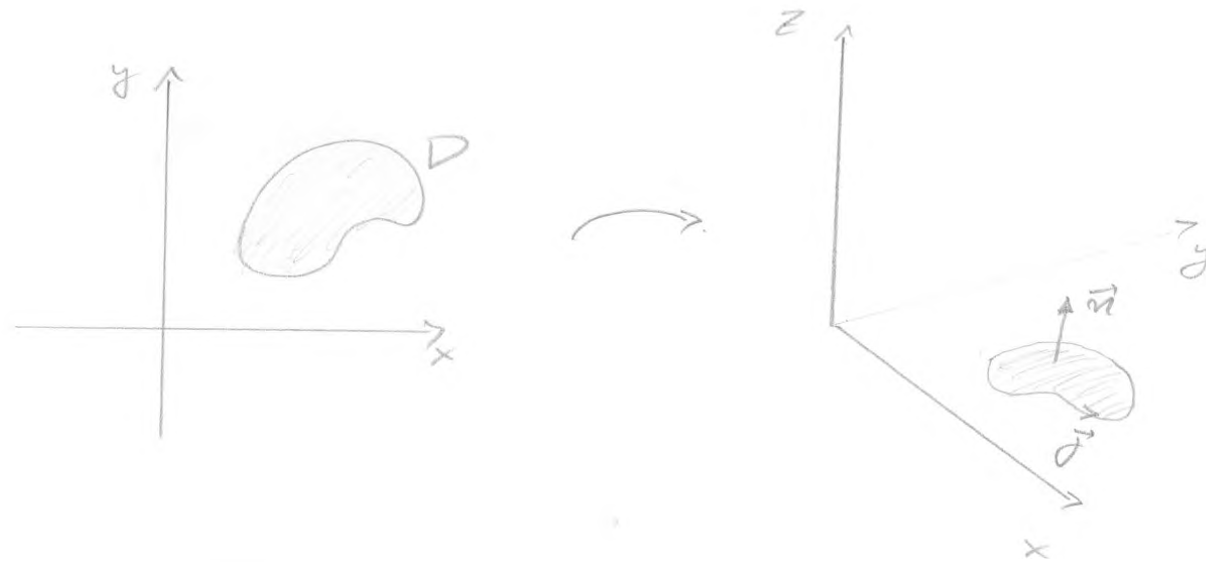
$$= \frac{4\pi R^5}{5}$$

7. Θέλουμε να αποδείξουμε τον τύπο του Green

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

όπου P, Q C^1 συναρτήσεις στο $A \subset \mathbb{R}^2$ και $D \subset A$ απλά συνεκτικό σύνολο με C^1 σύνορο.

Βλέπουμε το πρόβλημα στο $\mathbb{R}^3$



Στον κύλινδρο $A \times \mathbb{R}$ ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0)$$

Η επιφάνεια $S = D \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ είναι απλή, ομαλή, προσανατολισμένη και ένα κάθετο διάνυσμα είναι το $\vec{n} = (0,0,1)$. Ο θετικός προσανατολισμός του ∂S ως προς το $\vec{n}$

είναι αυτός της φοράς των δεικτών του ρολογιού. Άρα αν

$$(x(t), y(t)) \;, \quad t \in [0,1]$$

είναι μία παραμέτρηση (θετικής φοράς) του ∂D, τότε η

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), 0) \;, \quad t \in [0,1]$$

είναι μία κατάλληλη παραμέτρηση του ∂S.

Το θεώρημα του Stokes είναι

$$\iint_S (\operatorname{curl} \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Έχουμε

$$\operatorname{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, Q_x - P_y)$$

και άρα $\operatorname{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} = Q_x - P_y$.

Μια παραμέτρηση της S είναι η

$$(x, y, 0) \;, \quad (x,y) \in D.$$

Ισχύει

$$\vec{r}_x = (1,0,0) \quad , \quad \vec{r}_y = (0,1,0)$$

άρα $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (0,0,1)$ και $\|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\| = 1$.

Συνεπώς

$$\iint_S (\mathrm{curl}\,\vec{F})\cdot\vec{n}\, dS = \iint_D (Q_x - P_y)\,\|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\|\, dx\, dy$$

$$= \iint_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy$$

Επίσης

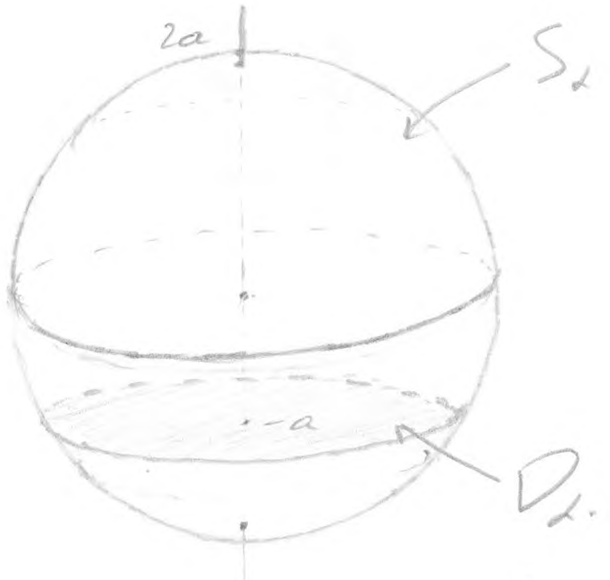
$$\int_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{\gamma}} P\,dx + Q\,dy + 0\,dz$$

$$= \int_0^1 \left[P(x(t),y(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t) \right] dt$$

$$= \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy.$$

Άρα έχουμε το ζητούμενο.

8.



$\partial K_\alpha = S_\alpha \cup D_\alpha$

Για ένα σημείο $(x,y,z) = (2a\sin\varphi\cos\theta, 2a\sin\varphi\sin\theta, 2a\cos\varphi)$ της σφαίρας ισχύει $z \geq -\alpha$ ανν $\cos\varphi \geq -\frac{1}{2}$, δηλαδή αν $\varphi \in [0, \frac{2\pi}{3}]$. Άρα μία παραμέτρηση του S_α είναι η.

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = (2\alpha\sin\varphi\cos\theta, 2\alpha\sin\varphi\sin\theta, 2\alpha\cos\varphi),$$
$$\varphi\in[0,\tfrac{2\pi}{3}],\ \theta\in[0,2\pi].$$

Επίσης το ~~κάθετο~~ εξωτερικό διάνυσμα στο $\vec{r}\in S_\alpha$ είναι το $\vec{\nu} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{\vec{r}}{2\alpha}$. Άρα

$$\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{\nu} = \|\vec{r}\|^{-3}\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{2\alpha} = \frac{1}{4\alpha^2}$$

Συνεπώς

$$\iint_{S_\alpha} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{4\alpha^2}\, \|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta\|\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{4\alpha^2}\, (2\alpha)^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin\varphi\, d\varphi$$

$$= 3\pi$$

~~(γ) Από το Θεώρημα Απόκλισης~~

$$\cancel{\iiint_{K_\alpha} \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial K_\alpha} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, dS}$$

Το ∂K_α αποτελείται από δύο μέρη:

το S_α και τον κυκλικό δίσκο

$$D_\alpha = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 4\alpha^2,\ z=-\alpha.\}$$

Συνεπώς

$$\iint_{\partial K_\alpha} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, dS = \underbrace{\iint_{S_\alpha} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, dS}_{3\pi} + \iint_{D_\alpha} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, dS$$

Το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο D_α είναι το $\vec{\nu}=(0,0,-1)$. Άρα στο D_α έχουμε

$$\vec{F}\cdot\vec{\nu}=\|\vec{r}\|^{-3}\vec{r}\cdot(0,0,-1)=-\|\vec{r}\|^{-3}z=\alpha\|\vec{r}\|^{-3}$$

Έχουμε

$$D_\alpha=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le 3\alpha^2\ ,\ z=-\alpha\}$$

άρα μία παραμέτρηση του D_α είναι η

$$\vec{r}(x,y)=\{(x,y,-\alpha):\ (x,y)\in\overline{D}(\sqrt{3}\alpha)\}$$

Άρα

$$\iint_{D_\alpha}\vec{F}\cdot\vec{\nu}=\iint_{\overline{D}(\sqrt{3}\alpha)}\alpha\cdot(x^2+y^2+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}\overbrace{\|\vec{r}_x\times\vec{r}_y\|}^{1}\,dx\,dy$$

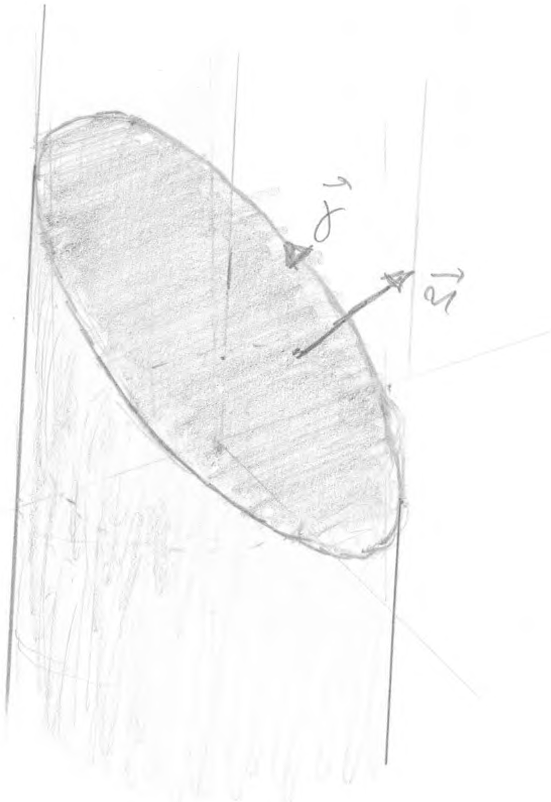
$$=\int_0^{\sqrt{3}\alpha}\int_0^{2\pi}\alpha\cdot(r^2+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}r\,d\theta\,dr$$

$$=2\pi\alpha\int_0^{\sqrt{3}\alpha}(r^2+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}r\,dr$$

$=\pi$

Άρα τελικά $\displaystyle\iint_{\partial K_\alpha}\vec{F}\cdot\vec{\nu}\,dS=4\pi$

9.



Από τον τύπο του Stokes έχουμε

$$\int_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{S} (\mathrm{curl}\,\vec{F})\cdot \vec{n}\, dS$$

όπου $S=\{(x,y,z): x^2+y^2\leq 1,\ x+y+z=1\}$.

και $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Έχουμε

$$\mathrm{curl}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & z^3 \end{vmatrix} = (0,\ 0,\ 3x^2+3y^2)$$

και άρα

$$\mathrm{curl}\,\vec{F}\cdot\vec{n} = \sqrt{3}\,(x^2+y^2)$$

Μια παραμετρικοποίηση του S είναι η

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, 1-x-y), \quad (x,y) \in \overline{D(1)}$$

Έχουμε

$$\vec{r}_x = (1,0,-1), \quad \vec{r}_y = (0,1,-1)$$

άρα

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1).$$

Συνεπώς

$$\iint_S (\operatorname{curl} \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\overline{D(1)}} \sqrt{3}(x^2+y^2) \|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\|\, dx\, dy$$

$$= 3 \iint_{\overline{D(1)}} (x^2+y^2)\, dx\, dy = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= 6\pi \int_0^1 r^3 dr$$

$$= \frac{3\pi}{2}.$$

Άσκηση 3.7

• Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y} - e^{\sqrt{x^2+y^2}} - x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Έχουμε

$$f(x,0) = \frac{e^{x} - e^{|x|} - x}{|x|}$$

$$= \begin{cases} -1 \ , & x>0 \\ \dfrac{e^{x} - e^{-x} - x}{-x} \ , & x<0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow -1 \quad , \quad \text{όταν } x \to 0$$

και

$$f(0,y) = \frac{1 - e^{|y|}}{|y|} \longrightarrow -1 \quad , \quad \text{όταν } y \to 0.$$

Σκεφτόμαστε πως ίσως το -1 είναι όριο.
Μας δυσκολεύουν τα εκθετικά.
Ξέρουμε ότι $e^{t} \approx 1+t$ για μικρά t.
Πιο συγκεκριμένα, από τον τύπο του
Taylor

$$e^t = 1 + t + \frac{e^{\xi}}{2} t^2 \quad (\xi \text{ μεταξύ των } 0, t)$$

Παίρνουμε ότι

$$|e^t - 1 - t| < t^2$$

για t αρκετά κοντά στο μηδέν (αφού $e^{\xi} < 2$)

Έχουμε τότε:

$$|f(x,y)+1| = \left| \frac{e^{x\cos y} - e^{\sqrt{x^2+y^2}} - x - \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{e^{x\cos y} - 1 - x\cos y - \left(e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 - \sqrt{x^2+y^2}\right) - x + x\cos y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|$$

(για (x,y) κοντά στο $(0,0)$)

$$\leq \frac{(x^2\cos^2 y) + (x^2+y^2) + |x|(1-\cos y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} + 2|x|$$

$$\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

• $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y} - x - |x| - |y| - 1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Σκεπτόμαστε όπως πριν και διώχνουμε το εκθετικό. Έχουμε

$$f(x,y) = \underbrace{\frac{e^{x\cos y} - 1 - x\cos y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{e(x,y)} + \underbrace{\frac{x\cos y - x - |x| - |y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{f_1(x,y)}$$

Έχουμε για (x,y) κοντά στο $(0,0)$

$$|e(x,y)| \le \frac{x^2\cos^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Άρα αρκεί να μελετήσουμε την f_1 (ότι ισχύει για την f_1 θα ισχύει και για την f)

Κοιτάμε τι γίνεται πάνω στις ευθείες $y=\lambda x$

$$f_1(x,\lambda x) = \frac{x\cos\lambda x - x - |x| - |\lambda|\cdot|x|}{|x|\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\cos\lambda x - 2 - |\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}}, & x>0 \\[2ex] \dfrac{\cos\lambda x + |\lambda|}{-\sqrt{1+\lambda^2}}, & x<0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} \; -\frac{1+|\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}} \qquad (\text{εξαρτάται από το } \lambda)$$

Άρα το όριο της f_1 στο $(0,0)$ δεν υπάρχει, άρα ούτε της f.

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y} - x - \sqrt{x^2+y^2} - 1}{|x|+|y|}$$

Εργαζόμαστε όπως πριν:

$$f(x,y) = \underbrace{\frac{e^{x\cos y} - 1 - x\cos y}{|x|+|y|}}_{e(x,y)} + \underbrace{\frac{x\cos y - x - \sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|}}_{f_1(x,y)}$$

Όπως πριν, για (x,y) κοντά στο $(0,0)$,

$$|e(x,y)| \le \frac{x^2\cos^2 y}{|x|+|y|} \le \frac{x^2}{|x|+|y|} \le |x|+|y| \to 0$$

Για $x>0$ έχουμε

$$f(x,\lambda x) = \frac{x\cos\lambda x - x - x\sqrt{1+\lambda^2}}{x+|\lambda|x}$$

$$= \frac{\cos\lambda x - 1 - \sqrt{1+\lambda^2}}{1+|\lambda|} \longrightarrow -\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{1+|\lambda|}$$

$\rightsquigarrow$ το όριο δεν υπάρχει

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y} - x - \sin(\sqrt{x^2+y^2}) - 1}{e^{|x|+|y|} - 1}$$

Έχουμε

$$f(x,y) = \frac{e^{x\cos y} - x - \sin\sqrt{x^2+y^2} - 1}{|x|+|y|} \cdot \underbrace{\frac{|x|+|y|}{e^{|x|+|y|}-1}}_{\to 1}$$

Για το υπόλοιπο χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$|\sin t - t| \leq |t|^3$$

η οποία ισχύει για μικρά t

(λόγω του $\sin t = t - \frac{\sin^{3}\xi}{3!} t^3$ $\quad \xi \in (0,t)$ $(t>0)$, $\xi \in (t,0)$ $(t<0)$)

Έχουμε για (x,y) κοντά στο $(0,0)$

$$f(x,y) = \frac{-\sin\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \quad \leftarrow e(x,y)$$

$$+ \frac{e^{x\cos y} - x - \sqrt{x^2+y^2} - 1}{|x|+|y|} \quad \leftarrow \text{δεν έχει όριο από το προηγούμενο}$$

ενώ

$$|e(x,y)| \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{|x|+|y|} \leq \frac{(|x|+|y|)^{2\cdot\frac{3}{2}}}{|x|+|y|} = (|x|+|y|)^2 \to 0.$$

Άρα το όριο δεν υπάρχει.

Άσκηση 3.10

Να υπολογιστεί το διαφορικό της $f(x,y) = x^y = e^{y\log x}$ στο τυχόν (x,y), $x>0$, $y\in\mathbb{R}$.

Είναι φανερό ότι f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο. Γνωρίζουμε ότι το διαφορικό $df(x,y)$ είναι η απεικόνιση από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}$ που ορίζεται από

$$[df(x,y)](h_1,h_2) = \nabla f(x,y)\cdot(h_1,h_2)$$

$$= f_x(x,y)h_1 + f_y(x,y)h_2.$$

Υπολογίζουμε

$$f_x(x,y) = y\,x^{y-1}$$

$$f_y(x,y) = x^y\log x$$

Άρα

$$[df(x,y)](h_1,h_2) = y\,x^{y-1}h_1 + x^y\log x\,h_2$$

3.19 (iii) Να επαληθευτεί ο κανόνας της αλυσίδας για την $f(x,y)=(\log x)^y$, $x=e^t$, $y=t$.

Έστω

$$g(t)=f(x(t),y(t))$$

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$g'(t) = \nabla f(x(t),y(t))\cdot(x'(t),y'(t))$$

$$= f_x(x(t),y(t))\,x'(t) +$$

$$+ f_y(x(t),y(t))\,y'(t).$$

Έχουμε:

$$f_x(x,y)=\frac{y}{x}(\log x)^{y-1}$$

$$f_y(x,y)=(\log x)^y \cdot \log(\log x)$$

Άρα

$$f_x(x(t),y(t)) = \frac{t}{e^t}(\log e^t)^{t-1} = \frac{t^t}{e^t}$$

$$f_y(x(t),y(t)) = (\log e^t)^t \log(\log e^t)$$

$$= t^t \log t$$

Επίσης $x'(t)=e^t$, $y'(t)=1$, άρα

$$f_x(x(t),y(t))\,x'(t) + f_y(x(t),y(t))\,y'(t) =$$

$$= \frac{t^t}{e^t}\cdot e^t + t^t \log t = t^t(1+\log t)$$

Έχουμε επίσης:

$$g(t) = f(x(t),y(t)) = f(e^t, t)$$

$$= (\log e^t)^t = t^t = e^{t\log t}$$

και άρα

$$g'(t) = e^{t\log t}\,(t\log t)'$$

$$= t^t(1+\log t)$$

Άρα ισχύει.

Άσκηση 5.1: Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$(u,v) \xrightarrow{T} (x,y) = (u^2+v^5+uv,\ u^2v+u+v^2)$$

αντιστρέφεται τοπικά κοντά στο $(0,1)$ και ορίζει C^∞ συναρτήσεις $u(x,y)$, $v(x,y)$ για (x,y) κοντά στο $(1,1)$. Επίσης υπολογίστε τις u_x, u_y, v_x, v_y στο $(1,1)$.

Άμεση εφαρμογή του θεωρήματος αντίστροφης συνάρτησης. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι $(0,1) \to (1,1)$.

Υπολογίζουμε την Ιακωβιανή ορίζουσα:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u+v & 2uv+1 \\ 5v^4+u & u^2+2v \end{vmatrix}$$

άρα

$$\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(0,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Άρα υπάρχει η τοπική αντίστροφη και είναι C^∞. Εφαρμόζουμε τη σχέση

$$(DT^{-1})_{(x,y)} = \left[DT(T^{-1}(x,y))\right]^{-1}.$$

Έχουμε άρα

$$(DT^{-1})(1,1) = \left[DT(0,1)\right]^{-1}$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}_{(1,1)} = \begin{bmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{bmatrix}^{-1}_{(0,1)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$u_x(1,1) = -\frac{2}{3}$$

$$u_y(1,1) = \frac{5}{3}$$

$$v_x(1,1) = -\frac{1}{3}$$

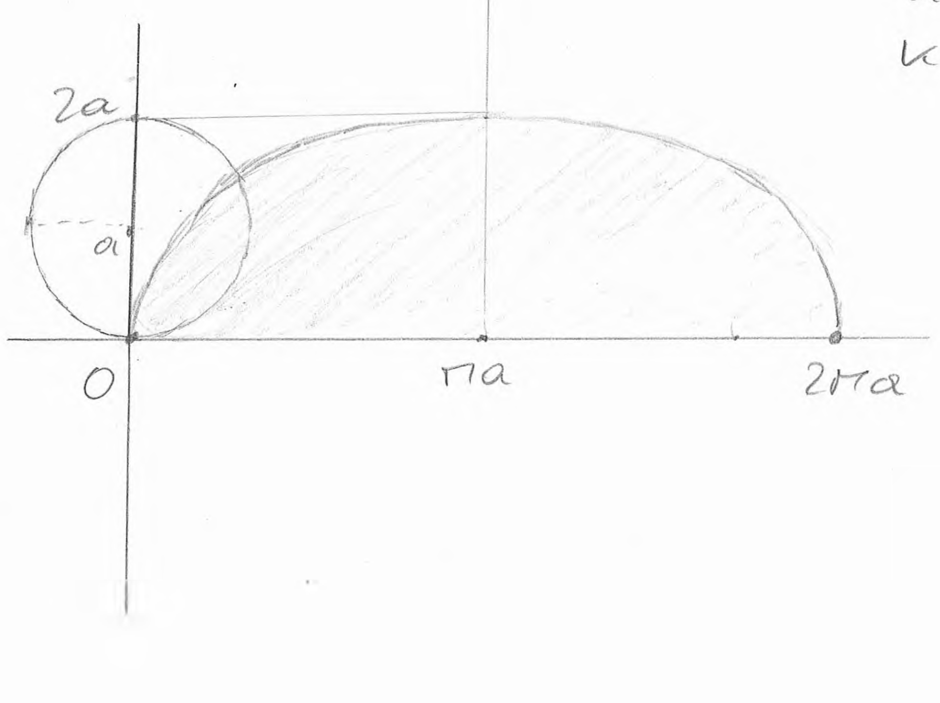
$$v_y(1,1) = -\frac{1}{3}$$

Μάθημα 26/5/20
(επαναληπτικές ασκήσεις)

1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$, και τον οριζόντιο άξονα.

Παρατήρηση: η κίνηση είναι άθροισμα δύο κινήσεων: της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης (at, a) και της κυκλικής κίνησης αρνητικής φοράς $(-a\sin t, -a\cos t)$. Το άθροισμα είναι η κίνηση ενός σημείου στην περιφέρεια ενός τροχού, ξεκινώντας σε επαφή με την ευθεία $y=0$ έως να ξαναφτάσει σε αυτήν.

κυκλοειδής καμπύλη



Τύπος του Green

$$\iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$$

Έστω $P(x,y)=0$, $Q(x,y)=x$. Τότε $P_y=0$, $Q_x=1$, άρα

$$\varepsilon\mu(D) = \iint_D dx\,dy = \int_{\partial D} x\,dy.$$

Έχουμε

$$\int_{\partial D} x\,dy = \int_I x\,dy - \int_\gamma x\,dy$$

όπου I το ευθ. τμήμα με αρχή το $(0,0)$ και τέλος το $(2\pi a, 0)$ και γ η κυκλοειδής καμπύλη.

Ισχύει $\int_I x\,dy = 0$. Άρα

$$\varepsilon\mu(D) = -\int_\gamma x\,dy = -\int_0^{2\pi} a(t-\sin t)\,[a(1-\cos t)]'\,dt$$

$$= -a^2 \int_0^{2\pi} (t\sin t - \sin^2 t)\,dt = 3\pi a^2$$

2. Να υπολογιστεί το

$$\iint_K \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{\lambda} dx\,dy$$

όπου $K=\{(x,y): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$, $\lambda\ge 0$.

Κάνουμε την αλλαγή συντεταγμένων

$$x = ar\cos\theta$$
$$y = br\sin\theta \qquad (x,y)=T(r,\theta)$$

οπότε $T^{-1}(K)=\{(r,\theta): 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$

Έχουμε

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \left|\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= abr$$

Άρα

$$\iint_K \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{\lambda} dx\,dy = \iint_{T^{-1}(K)} r^{2\lambda}\, abr\, dr\,d\theta$$

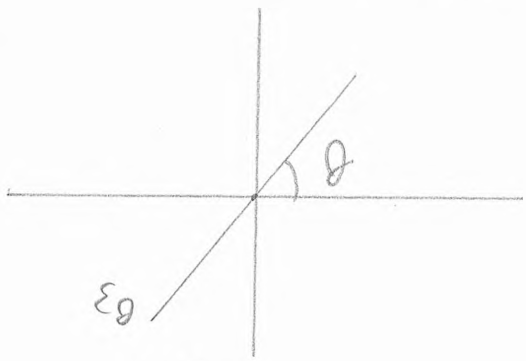
$$= ab\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{2\lambda+1}\,dr\,d\theta = \frac{\pi ab}{\lambda+1}$$

3. Να δειχθεί ότι η $f(x,y)=(y-x^3)(y-2x^2)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0,0)$ κατά μήκος κάθε ευθείας (που διέρχεται από το $(0,0)$), αλλά δεν έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0,0)$.

Κάθε ευθεία που διέρχεται από το $(0,0)$ παραμετροποιείται ως

ε_θ: $x = t\cos\theta$, $y = t\sin\theta$, $t\in\mathbb{R}$,

για κάποιο $\theta\in[0,2\pi]$.



Οι τιμές της f κατά μήκος της ε_θ δίνονται τότε από τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} g_\theta(t) &= f(t\cos\theta, t\sin\theta) \\ &= (t\sin\theta - t^2\cos^2\theta)(t\sin\theta - 2t^2\cos^2\theta) \\ &= t^2(\sin^2\theta - 3t\sin\theta + t^2\cos^4\theta) \\ &= t^2 h(t) \end{aligned}$$

Αν $\sin\theta \neq 0$ τότε $h(t) > 0$ για μικρά t,
άρα

$$g_\theta(t) = t^2 h(t) > 0 = g_\theta(0)$$

για μικρά t, $t \neq 0$

Αν $\sin\theta = 0$ τότε $g_\theta(t) = t^4$, άρα και πάλι έχει τοπικό ελάχιστο στο $t=0$.

Άρα σε κάθε περίπτωση (δηλ. $\forall \theta \in [0, 2\pi]$) η $g_\theta(t)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $t=0$.

Όμως κατά μήκος της παραβολής $y = \frac{3}{2}x^2$ έχουμε

$$f(x, \tfrac{3}{2}x^2) = \left(\tfrac{3}{2}x^2 - x^2\right)\left(\tfrac{3}{2}x^2 - 2x^2\right)$$

$$= -\frac{1}{4}x^2$$

$$< 0 = f(0,0)$$

άρα το $(0,0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f.

Να εξετασθεί αν υπάρχει το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+(x-y)^8}$$

Υπάρχει μεγάλη ελευθερία όσον αφορά το $(x-y)^8$.

Κατά μήκος της ευθείας $y=x$ το όριο είναι ένα.

Κατά μήκος της καμπύλης $(x-y)^8=x^2$ το όριο είναι $\frac{1}{2}$.

Γράφουμε την καμπύλη λίγο καλύτερα.

Αν $x>0$ τότε για να έχουμε

$$(x-y)^8=x^2$$

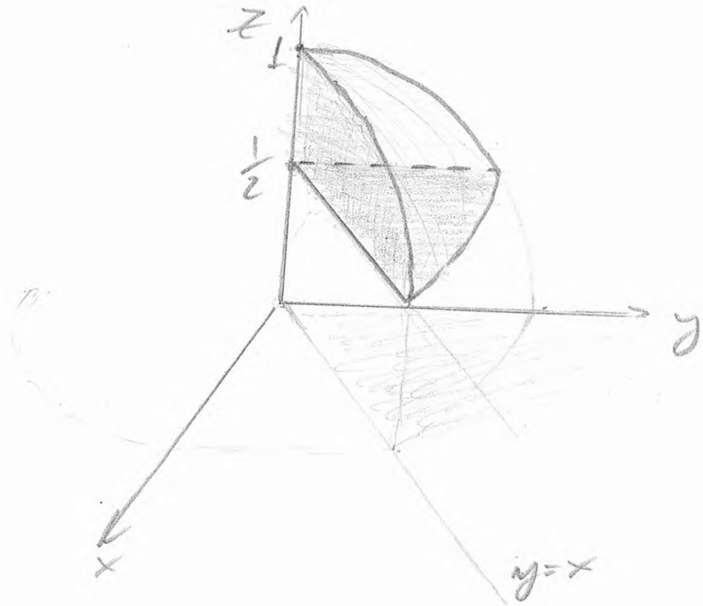
αρκεί $x-y=x^{1/4}$

Άρα θεωρούμε την καμπύλη $y=x-x^{1/4}$, $x>0$.

Το όριο δεν υπάρχει.

Να υπολογιστεί το $\iiint\limits_K x\,dV$

όπου K το γεωμετρικό χωρίο που βρίσκεται μέσα στη μοναδιαία σφαίρα, στο 1° ογδοημόριο βρίσκεται πάνω από το επίπεδο $z=\frac{1}{2}$ και ανάμεσα στα επίπεδα $x=0$ και $y=x$



Το χωρίο περιγράφεται από τις ανισότητες:

$$x^2+y^2+z^2\le 1, \quad z\ge \frac{1}{2}, \quad y\ge x, \quad x\ge 0$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\rho\le 1, \quad \rho\cos\varphi\ge \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{4}\le \theta\le \frac{\pi}{2}.$$

Το φ κυμαίνεται από $\varphi=0$ ως το σημείο όπου $\rho\cos\varphi=\frac{1}{2}$ και $\rho=1$.
άρα ως $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

Συνεπώς

$$K=\left\{(\rho,\varphi,\theta):\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{2\cos\varphi}\le\rho\le 1\right\}.$$

Άρα

$$\iiint_K x\,dV=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\pi/3}\int_{\frac{1}{2\cos\varphi}}^{1}\rho\sin\varphi\cos\theta\cdot\rho^2\sin\varphi\ d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$=\left(\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta\right)\int_0^{\pi/3}\int_{\frac{1}{2\cos\varphi}}^{1}\rho^3\sin^2\varphi\ d\rho\, d\varphi$$

$$=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^{\pi/3}\sin^2\varphi\cdot\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{16\cos^4\varphi}\right)d\varphi$$

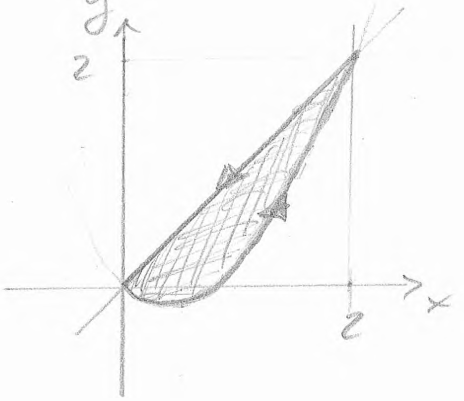
$$=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[\frac{1}{4}\int_0^{\pi/3}\sin^2\varphi\, d\varphi-\frac{1}{64}\int_0^{\pi/3}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\,d\varphi\right]$$

$$=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-\frac{\sqrt{3}}{64}\right]$$

Να υπολογιστεί το

$$I = \int_{\partial G} (y^2-x)\,dx + (x^2-y)\,dy$$

όπου G το χωρίο που περιβάλλεται από τις καμπύλες $y=x^2-x$ και $y=x$.



α΄ τρόπος: με τον ορισμό

β΄ τρόπος (πιο σύντομος): με τύπο Green

$$\int_{\partial G} (y^2-x)\,dx + (x^2-y)\,dy =$$

$$= \iint_G \left[(x^2-y)_x - (y^2-x)_y\right] dx\,dy$$

$$= \iint_G (2x-2y)\,dx\,dy = 2\int_0^2 \int_{x^2-x}^{x} (x-y)\,dy\,dx$$

$$= 2\int_0^2 \left[xy - \frac{y^2}{2}\right]_{x^2-x}^{x} dx = 2\int_0^2 \left[x^2 - \frac{x^2}{2} - \left(x(x^2-x) - \frac{(x^2-x)^2}{2}\right)\right] dx$$

$$= 2\int_0^2 \left(2x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{16}{15}$$

Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-3y^2$ στο τετράγωνο $\{(x,y): |x|\leq 1,\ |y|\leq 1\}$.

Η f έχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο στο τετράγωνο ως συνεχής συνάρτηση σε συμπαγές σύνολο.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι φανερό ότι

$$\max_{[-1,1]\times[-1,1]} f(x,y) = \max_{[-1,1]}(x^3+3x^2) + \max_{[-1,1]}(y^3-3y^2)$$

Το πρώτο μέγιστο λαμβάνεται για $x=1$ και ισούται με 4. Επίσης το δεύτερο μέγιστο λαμβάνεται για $y=0$ και ισούται με 0.

Άρα

$$\max_{[-1,1]\times[-1,1]} f = f(1,0) = 4.$$

Παρόμοια δουλεύουμε για το min.

<u>Παρατήρηση</u> Για την λύση αυτή είχε σημασία όχι μόνο ότι η f έχει τη μορφή $g(x)+h(y)$ αλλά και ότι το χωρίο είναι ορθογώνιο

Θεωρείστε την καμπύλη στο $\mathbb{R}^3$ που είναι τομή των επιφανειών $z=y^2-3x^2$ και $z^2+y^2=2$ και γράψτε παραμετρικές εξισώσεις για την εφαπτόμενη στην ευθεία στο σημείο $(0,1,1)$.

Η εφαπτόμενη στη ευθεία στο $(0,1,1)$ θα είναι η τομή των δύο εφαπτόμενων επιπέδων στο $(0,1,1)$.

Το υπερβολοειδές έχει εξίσωση

$$F(x,y,z)=0 \quad \text{όπου } F(x,y,z)=y^2-3x^2-z.$$

Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο $(0,1,1)$ είναι

$$xF_x(0,1,1)+(y-1)F_y(0,1,1)+(z-1)F_z(0,1,1)=0$$

Έχουμε

$$F_x=-6x \longrightarrow F_x(0,1,1)=0$$

$$F_y=2y \longrightarrow F_y(0,1,1)=2$$

$$F_z=-1$$

άρα η εξίσωση είναι

$$2(y-1)-(z-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{2y-z=1}$$

Παρόμοια για τον κύλινδρο: έχει εξίσωση

$$G(x,y,z)=0 \quad \text{όπου} \quad G(x,y,z)=y^2+z^2-2$$

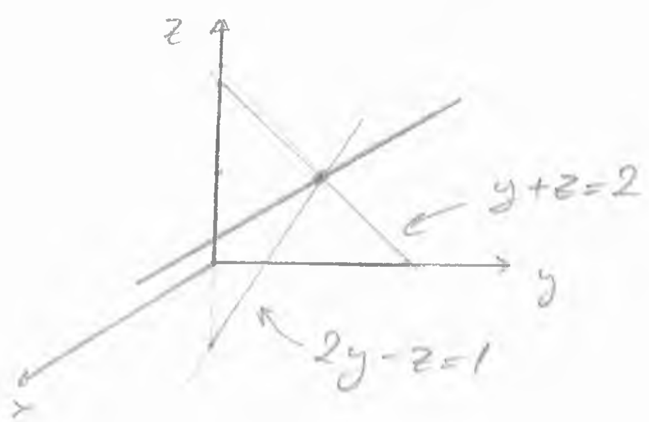
και άρα (---) η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι $y+z=2$.

Άρα η εφαπτόμενη ευθεία είναι η τομή των επιπέδων

$$2y-z=1$$
$$y+z=2$$

Το παραπάνω σύστημα δίνει $y=z=1$, άρα η ευθεία είναι η

$$(x,1,1) \quad , \; x\in\mathbb{R}.$$



Να δειχθεί ότι για κάθε $p>0$ υπάρχουν $c_1, c_2>0$ ώστε

$$c_1 (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \leq (|x|^p+|y|^p)^{\frac{1}{p}} \leq c_2 (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$.

<u>Παρατήρηση</u>: Το παραπάνω μπορεί να είναι χρήσιμο για ασκήσεις όπου εμφανίζονται συναρτήσεις της μορφής

$$f(x,y) = \frac{x^k y^\ell}{(|x|^p+|y|^p)^\theta}$$

για $k,\ell\in\mathbb{N}$, $\theta\in\mathbb{R}$ (ή παραλλαγές αυτής)

Θα αποδείξουμε κάτι γενικότερο:
έστω $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε

(i) $f(x,y)>0$, $\forall (x,y)\neq(0,0)$

(ii) $f(\lambda x,\lambda y) = |\lambda|\, f(x,y)$ $(\lambda\in\mathbb{R})$

(και όμοια για την g).

(π.χ. $f(x,y) = \left[(|x|^3+2|y|^3)^{\frac{5}{3}} + (|x|+|x+y|)^5\right]^{\frac{1}{5}}$

Τότε υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ ώστε

$$c_1 g(x,y) \le f(x,y) \le c_2 g(x,y)$$

για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Λύση: Η συνάρτηση $h = f/g$ είναι συνεχής στη μοναδιαία σφαίρα, συνεπώς είναι φραγμένη: $\exists\, c_2 > 0$ τ.ω.

$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \le c_2 \quad \text{αν} \quad x^2+y^2=1.$$

Έστω τώρα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Αν $(x,y) = (0,0)$ τότε $f(x,y) = g(x,y) = 0$

Έστω ότι $(x,y) \ne (0,0)$. Τότε

$$f(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\, f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\le \sqrt{x^2+y^2}\, c_2\, g\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= c_2\, g(x,y)$$

15

Έστω $f(x,y) = \dfrac{x^5 y}{(1+xy^2)^2}$. Να υπολογιστεί η $\dfrac{\partial^{15} f}{\partial x^8 \partial y^7}(0,0)$.

<u>Λύση</u>: Η ζητούμενη μερική παράγωγος σχετίζεται με τον συντελεστή του x^8y^7 στο πολυώνυμο Taylor (βαθμού 15) της f στο $(0,0)$. Διαιρώντας με το x^5y, βλέπουμε ότι σχετίζεται με το συντελεστή του $\dfrac{x^8y^7}{x^5y} = x^3y^6$ στο πολυώνυμο Taylor της $(1+xy^2)^{-2}$ στο $(0,0)$.

Το πολυώνυμο Taylor βαθμού 3 της $g(t) = (1+t)^{-2}$ υπολογίζεται εύκολα και είναι

$$P_3(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2}t^2$$

$$= 1 - 2t + 3t^2 - 4t^3$$

Άρα (;) το πολυώνυμο Taylor βαθμού 9 της $(1+xy^2)^{-2}$ γύρω από το $(0,0)$ είναι

$$P_3(xy^2) = 1 - 2xy^2 + 3x^2y^4 - 4x^3y^6.$$

και άρα το πολυώνυμο Taylor βαθμού 15 της $f(x,y) = x^5y(1+xy^2)^{-2}$ είναι

$$x^5y\,(1 - 2xy^2 + 3x^2y^4 - 4x^3y^6)$$

$$= x^5y - 2x^6y^3 + 3x^7y^5 - 4x^8y^7 =: \bar{P}_{15}(x,y)$$

Άρα ο συντελεστής του x^8y^7 είναι -4.

Όμως, από τον γενικό τύπο, ο συντελεστής είναι [πολυδείκτης $\alpha=(8,7)$]

$$\frac{1}{8!\,7!}\,\frac{\partial^{15} f}{\partial x^8 \partial y^7}(0,0).$$

Άρα

$$\left.\frac{\partial^{15} f}{\partial x^8 \partial y^7}\right|_{(0,0)} = -4\cdot(8!)(7!)$$

$$= -812.851.200$$

Απόδειξη ότι το $\bar{P}_{15}(x,y)$ είναι το πολυώνυμο Taylor της $f(x,y)$ βαθμού 15 γύρω από το $(0,0)$.

Αρκεί ν.δ.ο.

$$\frac{f(x,y)-\bar{P}_{15}(x,y)}{(x^2+y^2)^{15/2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Έχουμε

$$\frac{f(x,y)-\bar{P}_{15}(x,y)}{(x^2+y^2)^{15/2}} = \frac{x^5y\left[g(xy^2)-P_3(xy^2)\right]}{(x^2+y^2)^3(x^2+y^2)^{9/2}}$$

Έχουμε

$$\frac{|x^5y|}{(x^2+y^2)^3} \leq \frac{(x^2+y^2)^{5/2}(x^2+y^2)^{1/2}}{(x^2+y^2)^3} = 1.$$

άρα αρκεί ν.δ.ο.

$$\frac{g(xy^2)-P_3(xy^2)}{(x^2+y^2)^{9/2}} \longrightarrow 0$$

Έστω (x,y) κοντά στο $(0,0)$.

Αν $xy^2=0$ τότε ο τελευταίος αριθμητής είναι μηδέν.

Έστω ότι $xy^2\neq 0$. Τότε

$$\frac{g(xy^2)-P_3(xy^2)}{(x^2+y^2)^{9/2}} =$$

$$= \frac{g(xy^2)-P_3(xy^2)}{(xy^2)^3} \cdot \frac{x^3y^6}{(x^2+y^2)^{9/2}}$$

Έχουμε (όπως πιο πάνω)

$$\left|\frac{x^3y^6}{(x^2+y^2)^{9/2}}\right| \leq 1.$$

ενώ

$$\frac{g(xy^2)-P_3(xy^2)}{(xy^2)^3} \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy^2\neq 0}]{} 0$$

λόγω του ότι

$$\frac{g(t)-P_3(t)}{t^3} \longrightarrow 0.$$

Άρα έχουμε το ζητούμενο

Μάθημα 2/6/20

1. Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη στα $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\gamma}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

να είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$

Λύση. Έχουμε

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0 \quad , \forall x\neq 0$$

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0 \quad , \forall y\neq 0$$

άρα $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

Συνεπώς η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

δηλαδή αν

$$\frac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\gamma+\frac{1}{2}}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Για $y=\lambda x$ έχουμε

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|^\alpha |\lambda x|^\beta}{(x^2+\lambda^2 x^2)^{\gamma+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{|\lambda|}{(1+\lambda^2)^{\gamma+\frac{1}{2}}} \cdot |x|^{\alpha+\beta-2\gamma-1}$$

Έπεται ότι αν $\alpha+\beta-2\gamma-1 \leq 0$ τότε η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.
Έστω ότι $\alpha+\beta-2\gamma-1>0$. Τότε, αφού

$$|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2},$$

παίρνουμε

$$\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2+y^2)^{\gamma+\frac{1}{2}}} \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}{(x^2+y^2)^{\gamma+\frac{1}{2}}}$$

$$= (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-2\gamma-1)}$$

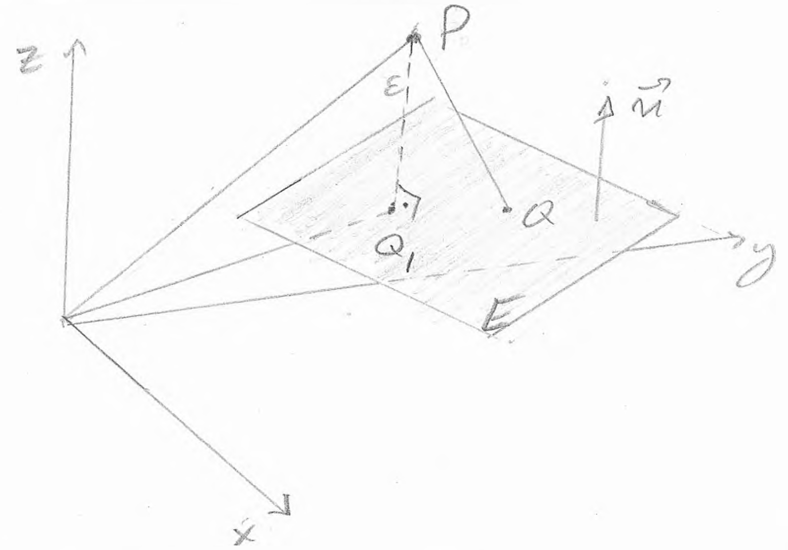
$$\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Άρα η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν $\alpha+\beta>2\gamma+1$.

2. Δείξτε ότι η απόσταση του σημείου $P=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ από το επίπεδο $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ είναι

$$\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma z_0+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

<u>Λύση</u> Γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα $\vec{n}=(A,B,\Gamma)$ είναι κάθετο στο επίπεδο δηλαδή αν $Q,Q'\in E$ τότε $\overrightarrow{QQ'}\cdot\vec{n}=0$



Εξ ορισμού η απόσταση του $P=(x_0,y_0,z_0)$ από το E είναι το

$$\inf\{\|\overrightarrow{PQ}\| : Q\in E\}$$

Θεωρούμε το $Q_1\in E$ το οποίο ανήκει στην τομή του E με την ευθεία ε που διέρχεται από το P και είναι παράλληλη με το $\vec{n}$.

Η ε δίνεται παραμετρικά ως

$$\varepsilon: \quad \overrightarrow{OP} + t\vec{n} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

δηλαδή

$$x(t) = x_0 + tA$$
$$y(t) = y_0 + tB$$
$$z(t) = z_0 + t\Gamma$$

Για να ισχύει $(x(t), y(t), z(t)) \in E$ πρέπει

$$A\,x(t) + B\,y(t) + \Gamma\,z(t) + \Delta = 0$$

$$\Longleftrightarrow A(x_0 + tA) + B(y_0 + tB) + \Gamma(z_0 + t\Gamma) + \Delta = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad t = -\frac{Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta}{A^2 + B^2 + \Gamma^2} =: t_1$$

Ισχύει

$$\|\overrightarrow{PQ_1}\| = \|\overrightarrow{OQ_1} - \overrightarrow{OP}\|$$

$$= \|(x(t_1), y(t_1), z(t_1)) - (x_0, y_0, z_0)\|$$

$$= |t_1| \cdot \|(A, B, \Gamma)\|$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι

$$\|\overrightarrow{PQ}\| \geq \|\overrightarrow{PQ_1}\|, \quad \forall Q \in E$$

Έστω λοιπόν $Q \in E$. Τότε

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ_1} - \overrightarrow{QQ_1}\|^2$$

$$= \|\overrightarrow{PQ_1}\|^2 - 2\,\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{QQ_1} + \|QQ_1\|^2$$

$$= \|\overrightarrow{PQ_1}\|^2 + \|\overrightarrow{QQ_1}\|^2 \qquad (\text{αφού } \overrightarrow{PQ_1} \,/\!/\, \vec{n})$$

$$\geq \|\overrightarrow{PQ_1}\|^2$$

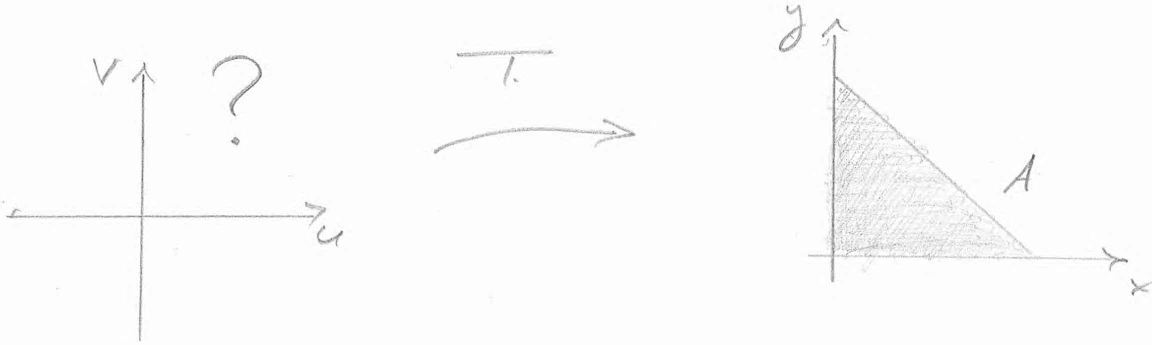
3. Έστω $\alpha, \beta > 0$ και $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Έστω $A = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$.

Να δειχθεί ότι

$$\iint_A x^\alpha y^\beta f(x+y)\,dx\,dy = \left(\int_0^1 u^{\alpha+\beta+1} f(u)\,du\right)\left(\int_0^1 v^\alpha (1-v)^\beta\,dv\right)$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε το μετασχηματισμό $x = uv$, $y = u(1-v)$.

<u>Λύση</u>. Έστω T ο μετασχηματισμός



Αναζητούμε το $T^{-1}(A)$ καθώς επίσης και το αν ο T είναι 1-1

Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} x = uv \\ y = u - uv \end{array}\right\} \Rightarrow u = x+y, \quad v = \frac{x}{x+y}.$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{αν } x+y \neq 0, \\ \text{δηλ. } (x,y) \neq (0,0) \end{array} \right).$$

Παρατηρούμε ότι

$$[x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1] \Leftrightarrow [0 \leq u \leq 1, \; 0 \leq v \leq 1]$$

άρα $T^{-1}(A) = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1, \; 0 \leq v \leq 1\}$.

Επιπλέον ο T είναι 1-1 (αφού τα u, v με $T(u,v) = (x,y)$ ορίζονται μονοσήμαντα (με μόνη εξαίρεση αν $(x,y) = (0,0)$)).

Υπολογίζουμε την Ιακωβιανή ορίζουσα:

Έχουμε

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u.$$

Άρα, από τον τύπο αλλαγής μεταβλητών έχουμε

$$\iint_A x^\alpha y^\beta f(x+y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{T^{-1}(A)} (uv)^\alpha u^\beta (1-v)^\beta f(u) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,1]} (uv)^\alpha u^\beta (1-v)^\beta f(u)\, u\, du\,dv$$

$$= \int_0^1 u^{\alpha+\beta+1} f(u)\,du \cdot \int_0^1 v^\alpha (1-v)^\beta\,dv$$

4. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\})$ τέτοια ώστε $f(\vec{x}) > 0$ και

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j f_{x_j}(\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) \quad , \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$$

Να δειχθεί ότι υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε

$$A \|\vec{x}\|^{\alpha} \leq f(\vec{x}) \leq B \|\vec{x}\|^{\alpha} \quad , \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}.$$

<u>Λύση.</u> Η σχέση (*) που δίνεται θυμίζει το συμπέρασμα της άσκησης 4 του δεύτερου φύλλου ασκήσεων.
Επίσης η ζητούμενη σχέση θυμίζει τη σχέση στη σελ 14 του μαθήματος της 26.5.20.

Θα δείξουμε ότι

$$f(t\vec{x}) = t^{\alpha} f(\vec{x}) \quad , \quad \forall t > 0 \, , \, \forall \vec{x} \neq \vec{0}$$

Έστω $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Ορίζουμε

$$g(t) = f(t\vec{x}) \quad , \quad t > 0.$$

Η g είναι διαφορίσιμη και από τον κανόνα της αλυσίδας

$$g'(t) = \vec{x} \cdot \nabla f(t\vec{x})$$

$$= \frac{1}{t} (t\vec{x}) \cdot \nabla f(t\vec{x})$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{t} \alpha f(t\vec{x})$$

$$= \frac{\alpha}{t} g(t).$$

δηλαδή $g'(t) / g(t) = \frac{\alpha}{t}$

δηλαδή

$$\frac{d}{dt} \ln g(t) = \frac{d}{dt} \ln t^{\alpha}.$$

Άρα $\ln g(t) = \ln t^{\alpha} + c_1$

και $g(t) = e^{c_1} t^{\alpha}$

δηλ. $g(t) = c t^{\alpha}$, $\forall t > 0$

Αναγκαστικά $c = g(1) = f(\vec{x})$. Άρα δείξαμε ότι

$$f(t\vec{x}) = t^{\alpha} f(\vec{x}), \quad \forall t > 0, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

(Άρα έχουμε το αντίστροφο παλαιότερης άσκησης)

Εργαζόμαστε όπως στην άσκηση της σελ 13, 26/5/20.

Θέτουμε

$$h(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{\|\vec{x}\|^{\alpha}}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}.$$

Η h είναι συνεχής και θετική στη μοναδιαία σφαίρα $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| = 1\} = S$

άρα $\exists\, A, B > 0$ τ.ω.

$$A \leq h(\vec{x}) \leq B \quad , \forall \vec{x} \in S$$

Έστω τώρα $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Τότε

$$A \leq h\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right) \leq B.$$

Όμως

$$h\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right) = f\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right) = \frac{1}{\|\vec{x}\|^{\alpha}} f(\vec{x}).$$

Άρα

$$A\|\vec{x}\|^{\alpha} \leq f(\vec{x}) \leq B\|\vec{x}\|^{\alpha}.$$

5. Σχεδιάστε τις καμπύλες στάθμης $\{(x,y): f(x,y)=c\}$ για $c=0$, για κάποιο $c>0$ και για κάποιο $c<0$ για τις συναρτήσεις:

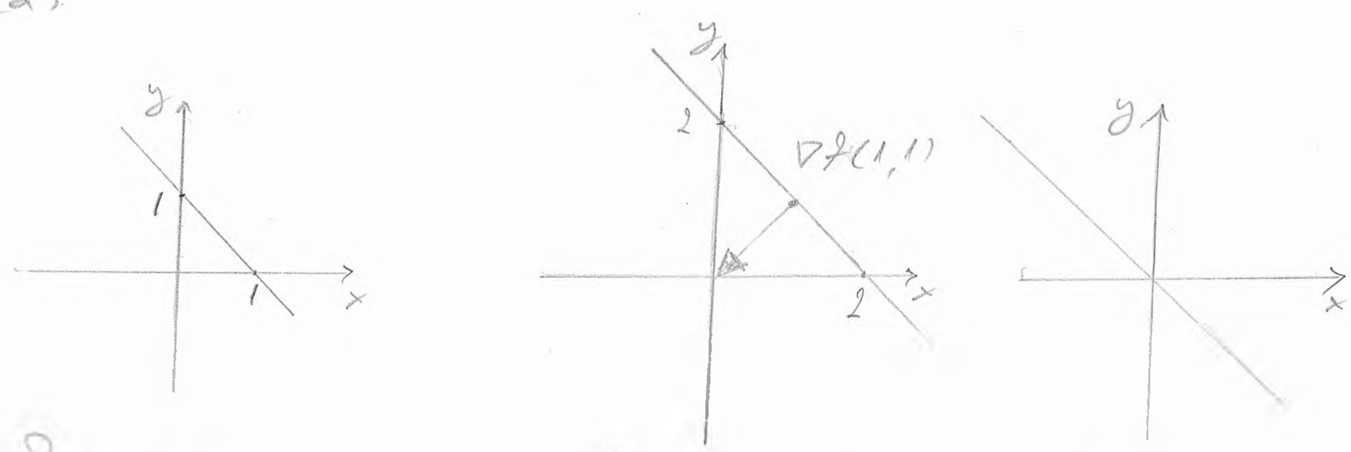
(α) $f(x,y)=1-(x+y)$

(β) $f(x,y)=x^2+y^2$

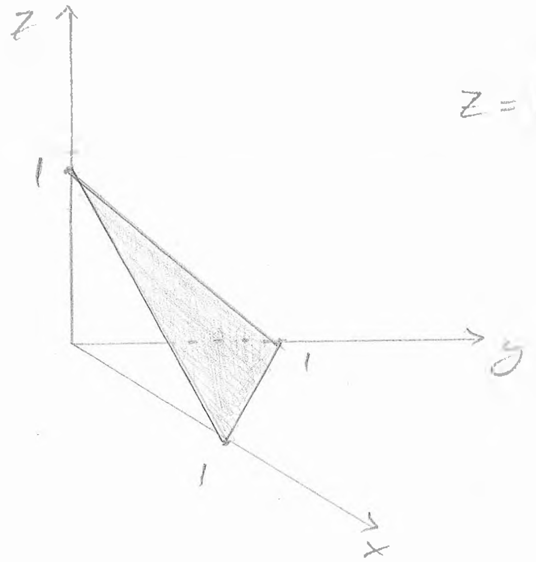
(γ) $f(x,y)=x^2-y^2$

Να γίνει επίσης το γράφημα της κάθε συνάρτησης και να σχεδιαστεί το $\nabla f(1,1)$ (στο (x,y)-επίπεδο).

(α)

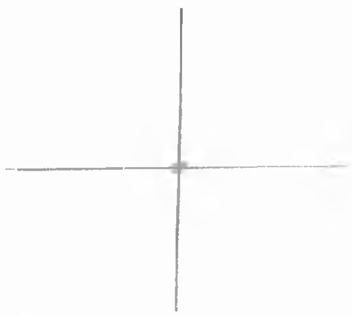


$f(x,y)=0$ $\qquad$ $f(x,y)=-1$ $\qquad$ $f(x,y)=1$

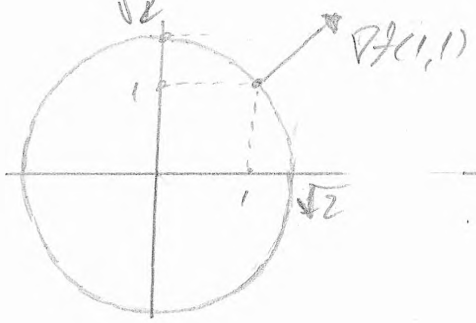


$z = 1 - x - y$

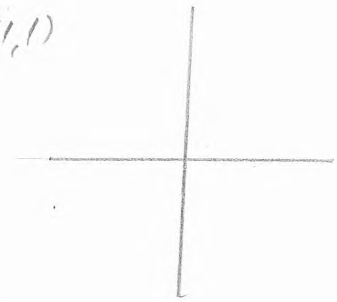
(6)



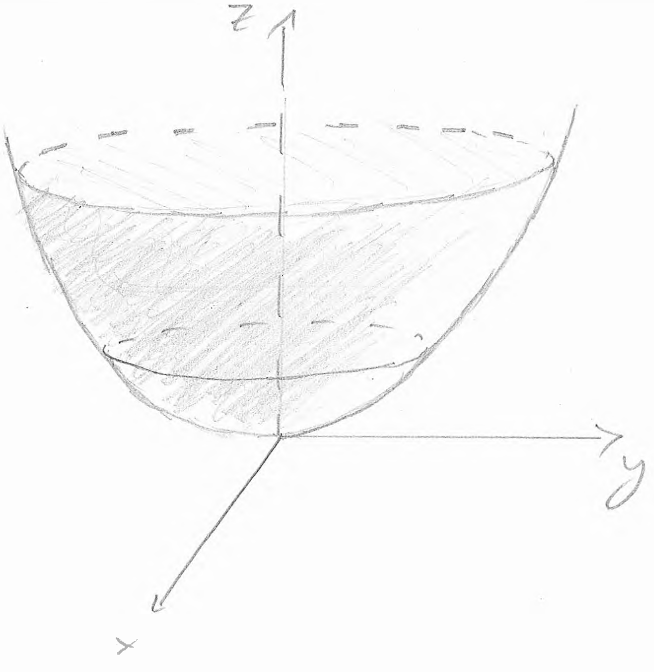
$x^2 + y^2 = 0$



$x^2 + y^2 = 2$

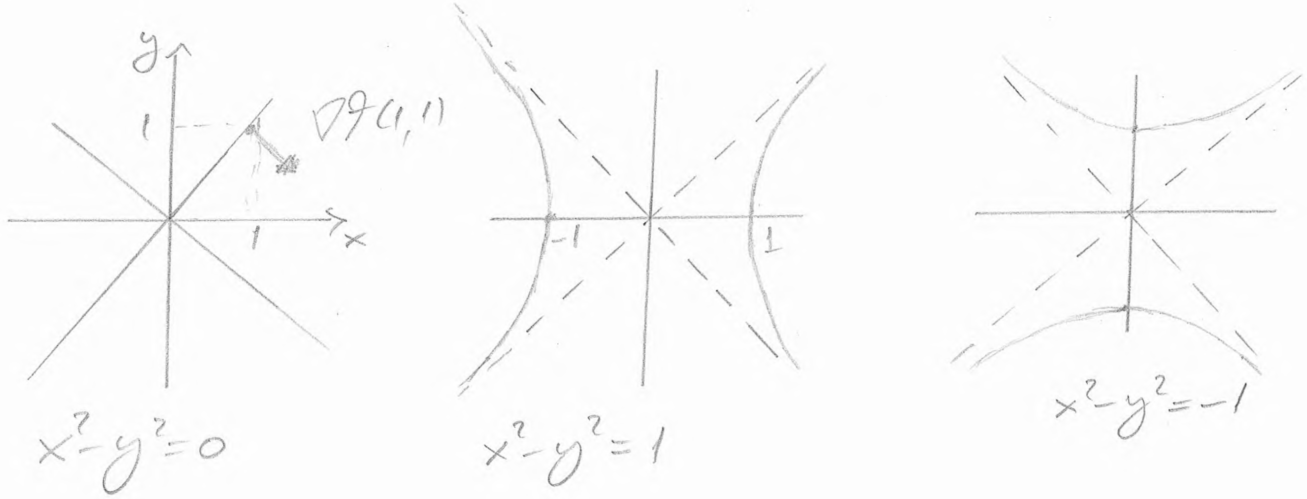


$x^2 + y^2 = -1$



$z = x^2 + y^2$

(γ)



$z = x^2 - y^2 \longrightarrow$ θίντεο/διχδίκτυο

6. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης $f(x,y)$ ώστε οι f_{xy}, f_{yx} να υπάρχουν και να είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$ ενώ οι f_{xx}, f_{yy} να μην υπάρχουν στο $(0,0)$.

<u>Λύση.</u> Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

(i) η φ' υπάρχει και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

(ii) η φ'' δεν υπάρχει στο $(0,0)$

(iii) $\varphi(0) \neq 0$.

$$\left(\text{π.χ. } \varphi(t) = \begin{cases} 1+t^2, & t \geq 0 \\ 1-t^2, & t<0 \end{cases} \rightsquigarrow \varphi'(t) = 2|t| \right)$$

Η συνάρτηση

$$f(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)$$

είναι τότε C^1 και μάλιστα

$$f_x(x,y)=\varphi'(x)\varphi(y), \quad f_y(x,y)=\varphi(x)\varphi'(y)$$

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=\varphi'(x)\varphi'(y)$$

Όμως η $f_{xx}(0,0)$ δεν υπάρχει:

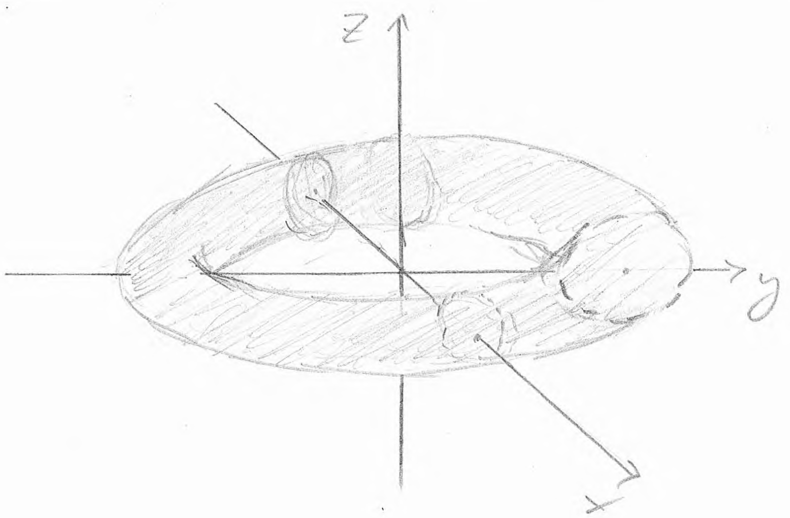
$$\frac{f_x(x,0)-f_x(0,0)}{x}=\frac{\varphi'(x)\varphi(0)-\varphi'(0)\varphi(0)}{x}$$

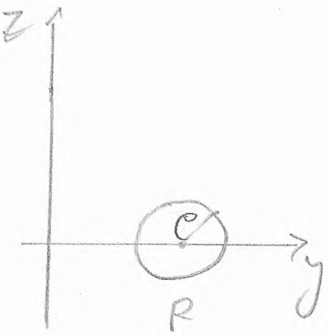
$$=\varphi(0)\,\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x},$$

το οποίο δεν έχει όριο καθώς $x\to 0$.
Όμοια δεν υπάρχει το $f_{yy}(0,0)$.

7. Έστω $R > \rho > 0$. Να υπολογιστεί ο όγκος του τόρου που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον z-άξονα του δίσκου

$$\{(y,z):\ (y-R)^2 + z^2 \le \rho^2\}$$





Άρα

$$T = \{(x,y,z):\ (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \le \rho^2\}$$

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$T = \{(r,\theta,z):\ (r-R)^2 + z^2 \le \rho^2\}$$

$$= \{(r,z):\ (r-R)^2 + z^2 \le \rho^2\} \times [0,2\pi]$$

$$= E_{R,\rho} \times [0,2\pi]$$

Άρα

$$vol(T) = \iiint_T r \, dr\, dz\, d\theta$$

$$\overset{(\text{σελ } 42 \text{ σημειώσεων})}{=} \iint_{E_{R,\rho}} \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dr\, dz$$

$$= 2\pi \iint_{E_{R,\rho}} r \, dr\, dz$$

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες στο (r,z)-επίπεδο με κέντρο το $(R,0)$:

$$r = R + t\cos\omega$$
$$z = t\sin\omega.$$

Τότε

$$(r,z) \in E_{R,\rho} \iff \begin{cases} 0 \le t \le \rho \\ 0 \le \omega \le 2\pi \end{cases}$$

Άρα

$$\iint_{E_{R,\rho}} r\, dr\, dz = \int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} (R + t\cos\omega) \left| \frac{\partial(r,z)}{\partial(t,\omega)} \right| d\omega\, dt$$

$$= \int_0^{\varrho}\int_0^{2\pi} (R + t\cos\omega)\, t \, d\omega\, dt$$

$$= R \int_0^{\varrho}\int_0^{2\pi} t \, d\omega\, dt$$

$$= 2\pi R \frac{\varrho^2}{2}$$

Άρα τελικά

$$vol(T) = 2\pi \cdot 2\pi R \frac{\varrho^2}{2}$$

$$= 2\pi^2 \varrho^2 R$$

8. Θεωρείστε το διανυσματικό πεδίο

$\vec{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z\right)$ το οποίο

ορίζεται στο $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$.

(α) Υπολογίστε το $\operatorname{curl} \vec{F}$.

(β) Υπολογίστε το $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ όπου γ ο κύκλος $z=1$, $x^2+y^2=1$, με θετική φορά

(γ) Εξετάστε αν το διανυσματικό πεδίο είναι συντηρητικό

<u>Λύση</u> (α) Με απλές πράξεις βρίσκουμε ότι $\mathrm{curl}\,\vec{F} = \vec{0}$.

(β). Μία παραμέτρηση της γ είναι

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Ισχύει $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, και άρα

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{0}^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt$$

$$= 2\pi$$

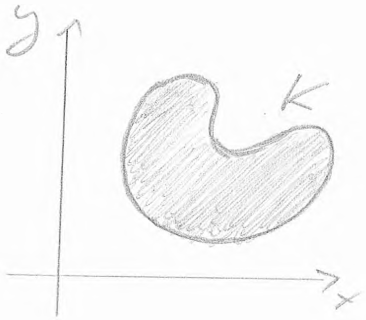
(γ). Έπεται από το (β) ότι το διανυσματικό πεδίο δεν είναι συντηρητικό.

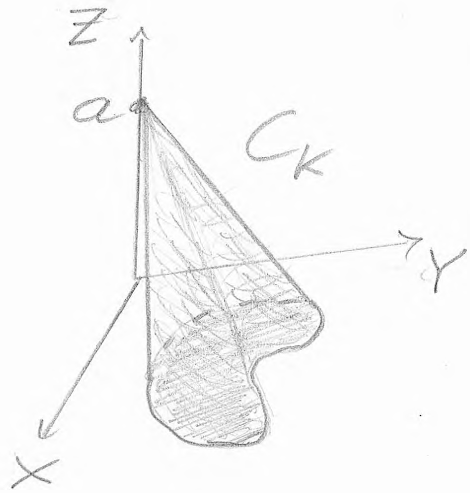
9. Έστω $K \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό και φραγμένο, με τμηματικά ομαλό σύνορο, και $a > 0$. Έστω

$$C_K = \{(tx, ty, a(1-t)) : (x,y) \in K,\ 0 \le t \le 1\}.$$

Να εκφραστεί ο όγκος του C_K συναρτήσει του εμβαδού του K και του a.

Γεωμετρική ερμηνεία: για κάθε $(x,y)\in K$ το σύνολο $\{(tx, ty, a(1-t)) : 0\le t\le 1\}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα το $(0,0,a)$ και το $(x,y,0)$.





Θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$T : K\times[0,1] \longrightarrow C_K$$

όπου

$$T(x,y,t) = (tx,\ ty,\ a(1-t)) = (X,Y,Z) \qquad (x,y)\in K,\ 0\le t\le 1$$

Ο T είναι C^1, 1-1 και επί.

Επίσης

$$\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(x,y,t)} = \begin{vmatrix} X_x & X_y & X_t \\ Y_x & Y_y & Y_t \\ Z_x & Z_y & Z_t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} t & 0 & x \\ 0 & t & y \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = -at^2$$

Άρα

$$vol(C_K) = \iiint_{C_K} dX\,dY\,dZ$$

$$= \iiint_{K\times[0,1]} \left| \frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(x,y,t)} \right| dx\,dy\,dt$$

$$= \iiint_{K\times[0,1]} at^2\,dx\,dy\,dt =$$

$$= a\left(\int_0^1 t^2 dt\right)\left(\iint_K dx\,dy\right)$$

$$= \frac{1}{3}\,a\,\varepsilon\mu(K).$$