ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3:

1. Έστω $f(x,y),(x,y)\in(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$ συνάρτηση για την οποία υπάρχουν οι $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ και είναι φραγμένες σε μία περιοχή του σημείου (x_0,y_0). Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο (x_0,y_0).

2. Δείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $xyz=1$ σε ένα σημείο της επιφάνειας δεν είναι ποτέ οριζόντιο (δηλαδή κάθετο στον κατακόρυφο άξονα των z).

3. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x,y)=x^2-y^2$. Σχεδιάστε το γράφημα της $z=f(x,y)$ και τις καμπύλες στάθμης $f(x,y)=c$ για $c=0,-1,1$. Επίσης βρείτε το σημείο της επιφάνειας $z=f(x,y)$ όπου το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στο $z=2x-y$.

4. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $\sin(x+y)+\tan(y+z)=1$ στο σημείο $P=(\pi/4,\pi/4,-\pi/4)$ καθώς και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα αυτής στο P.

5. Έστω η συνάρτηση $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με $F(x,y,z)=x^2y+ye^x-z$. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $F(x,y,z)=0$ στο σημείο της $P(0,1,1)$.

6. Έστω $f(x,y,z)=z(\sin x)^{\cos y}$. Βρείτε αριθμούς Α,Β,Γ,Δ τέτοιους ώστε
$$\lim_{(x,y,z)\to(\pi/6,\pi/3,1)}\frac{|f(x,y,z)-Ax-By-\Gamma z-\Delta|}{\sqrt{(x-\pi/6)^2+(y-\pi/3)^2+(z-1)^2}}=0.$$
Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο $(\pi/6,\pi/3,1)$.

7. Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\to(u,v)=T(x,y)=(x^3-3xy^2,3x^2y-y^3)$ του επιπέδου, και εξετάστε κοντά σε ποιά σημεία αυτός αντιστρέφεται τοπικά.

8. Δείξτε ότι υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $f,g:U\to\mathbb{R}$, ορισμένες σε ένα ανοικτό σύνολο $U\subset\mathbb{R}$ 2 που περιέχει το σημείο $(1,1)$, τέτοιες ώστε $f(1,1)=g(1,1)=1$ και $[f(x,y)]^{g(x,y)}=x$ και $[g(x,y)]^{f(x,y)}=y$ για κάθε $(x,y)\in U$. Να βρεθούν επιπλέον οι μερικές παράγωγοι $f_x(1,1),f_y(1,1),g_x(1,1),g_y(1,1)$.

9. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon>0$ και γνησίως φθίνουσα C^∞-συνάρτηση $\phi:I_\varepsilon\to\mathbb{R}$, ορισμένη σε ανοικτό διάσημα $I_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}:4-\varepsilon<x<4+\varepsilon\}$, έτσι ώστε $\phi(4)=2$ και $[\phi(x)]^x=x^{\phi(x)}$ για $x\in I_\varepsilon$.

10. Εξετάστε αν υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $f=f(x,y)$ και $g=g(x,y)$, ορισμένες (x,y) σε ανοιχτή περιοχή του (0,0), με $f(0,0)=0,g(0,0)=0$ και οι οποίες ικανοποιούν το σύστημα των εξισώσεων $fg^2+\sin g=x$ και $e^{fg}-\sin f=y+1$.

11. Αποδείξτε ότι υπάρχει C^∞ συνάρτηση $z=\phi(x,y)$ ορισμένη για (x,y) σε ανοικτή περιοχή U του $(3,-2)\in\mathbb{R}^2$, με $\phi(3,-2)=1$ έτσι ώστε $\phi^6(x,y)+x\phi^2(x,y)+5y\phi(x,y)+y^2+2=0,(x,y)\in U$, εν συνεχεία βρείτε τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{u}$ στην κατεύθυνση των οποίων η κατευθυνόμενη παράγωγος $\partial_{\vec{u}}\phi(-3,2)=0$.

12. Έστω η επιφάνεια S, $F(x,y,z)=xy+z+3xz^5-4=0$. Αποδείξτε οτι η S είναι πλησίον του $(1,0,1)$ το γράφημα μιας C^1 συνάρτησης $z=\phi(x,y)$. Υπολογίστε τις παραγώγους $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ στο σημείο (1,0).

13. Θεωρούμε την καμπύλη $\sin(x+y)+\cos(x-y)-x=1$. Δείξτε ότι τοπικά στο (0,0) η καμπύλη είναι το γράφημα μιας C^1 συνάρτησης $y=f(x)$ και υπολογίστε την $f'(0)$.

14. Προσδιορίστε τα σημεία (a,b) της καμπύλης $F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0$, πλησίον των οποίων η καμπύλη είναι το γράφημα μιας C^1 συνάρτησης $y=f(x)$. Υπολογίστε σε αυτά τα σημεία την παράγωγο της f και αποδείξτε ότι ένα απο αυτά τα σημεία είναι και το $(3/2,3/2)$.

15. Εξετάστε αν το σύστημα $xv + yu + z + u^2 = 0, xyz + u + v + 1 = 0$ περιέχει υπό πεπλεγμένη μορφή συναρτήσεις $u = f(x, y, z), v = g(x, y, z)$ σε περιοχή του $(2, 1, 0, -1, 0)$ και υπολογίστε τις μερικές παραγώγους των f και g στο σημείο $(2, 1, 0)$.

16. Έστω $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \Omega$ ανοικτό και $\Gamma = \{(x(t), y(t)) : a \leq t \leq b\} \subset \Omega$ με $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \forall t \in [a, b]$. Έστω $\max f(x_0, y_0), (x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0)), t_0 \in (a, b)$, και έστω $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$. Δείξτε ότι το σύνολο στάθμης $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$ τοπικά περί το (x_0, y_0) είναι γράφημα συνάρτησης ως προς κάποιον από τους άξονες, και δείξτε ότι η Γ εφάπτεται στην C στο (x_0, y_0).

17. Να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x, y) = \frac{9x}{x^2+y^2+1}$.

18. Έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, C^2 συνάρτηση και $\vec{a} \in \Omega$ ένα κρίσιμο σημείο αυτής, αν λ μια ιδιοτιμή του πίνακα $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a})\right)$ και $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα με $||\vec{u}|| = 1$, θεωρήστε τη συνάρτηση $g(t) = f(\vec{a} + t\vec{u})$ σε περιοχή του 0 και αποδείξτε ότι $\frac{dg}{dt}(0) = 0, \frac{d^2g}{dt^2}(0) = \lambda$.

19. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο $a \in \mathbb{R}^3$ να αποδείξετε ότι $\nabla f(a) = 0$. Επιπλέον να μελετήσετε τα κρίσιμα σημεία της $f(x, y) = 12xy - 2x^2 - y^4$.

20. Μελετήστε ως προς τα ακρότατα την $f(x, y) = x^2 + y^2 - x^4$ για $x^2 + y^2 \leq 1$.

21. Έστω $a > b > 0$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$ έχει ολικό μέγιστο στο σημείο (1,0), δηλαδή $\max f(x, y) = a/e$.

22. Μελετήστε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2$.