ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2:

1. Η διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(t\vec{x}) = t^a f(\vec{x})$ για $t \geq 0, \vec{x} \in \mathbb{R}^d$ και κάποιο $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Να δειχθεί ότι $\vec{x} \cdot \nabla f(\vec{x}) = af(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^d$.

2. Έστω $w = f(u, v)$ και $u = x + y, v = x - y$. Να δειχθεί ότι $\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2$.

3. Έστω $f(x, y)$ διαφορίσιμη συνάρτηση των x και y. Θέτουμε $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ με $r > 0$ και $\theta \in [0, 2\pi]$. Αν $z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ να υπολογίστε τις $\frac{\partial z}{\partial r}$ και $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ και να αποδείξετε ότι $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$

4. Αν $f(x, y)$ είναι τάξης C^1-τάξης και θέσουμε $x = e^s \cos t$ και $y = e^s \sin t$ τότε για την $h(s, t) = f(e^s \cos t, e^s \sin t)$ ισχύει $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2\right]$.

5. α) Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι $E(x, y) = \frac{1}{2}xy\sin\omega$, όπου ω είναι η γωνία μεταξύ των πλευρών x και y. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial E}{\partial x}$, $\frac{\partial E}{\partial y}$ και $\frac{\partial E}{\partial \omega}$.
   β) Να υπολογισθεί η $\frac{\partial w}{\partial r}$ όπου $w = e^{2x-y+3z^2}$ και $x = r + s - t, y = 2r - 3s, z = \cos(rst)$.

6. α) Δίνεται η $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = x^2 + xy\sin z - yz$. Δείξτε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
   β) Δείξτε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$ για την
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
.

7. Έστω $V(x, y) = ln\left((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\right), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
   α) Να αποδειχθεί ότι $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x, y) = 0$
   β) Σχεδιάστε τις καμπύλες στάθμης $\Sigma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) = c\}$ για $c = 1, 2, 3$ δίνοντας προσοχή στις σχετικές αποστάσεις μεταξύ τους και σχεδιάστε το $\nabla V(x_0, y_0)$ σε $(x_0, y_0) \in \Sigma_2$.

8. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt), t \in \mathbb{R}$ όπου $x_0, y_0, a, b \in \mathbb{R}$ και $f(x, y), (x, y \in \mathbb{R}^2)$ τάξεως C^2. Αποδείξτε ότι $\phi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)a^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)ab + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}b^2$.

9. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία C^2 συνάρτηση και $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\phi(t) = f(t, 1 - t^2), t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η ϕ έχει δεύτερη παράγωγο ϕ'' στο $\mathbb{R}$ και υπολογίστε την συναρτήσει των μερικών παραγώγων της f.

10. Αν $f(t)$ πραγματική συνάρτηση C^2-τάξεως και θέσουμε $g(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ υπολογίστε την παράγωγο $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$. Αν υποθέσουμε ότι $\nabla^2 g = 0$ ποιά διαφορική εξίσωση ικανοποιεί η f;

11. Για ποιά τιμή του $\lambda > 0$ η συνάρτηση $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\lambda}$ ικανοποιεί τη διαφορική $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$;

12. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{\frac{-x^2}{4t}}$ ορισμένη για $x \in \mathbb{R}$ και $t > 0$, και υπολογίστε τη διαφορά $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t}$.

13. Έστω $\mu \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός λ (που εξαρτάται από το μ) ώστε η συνάρτηση $f(t, x_1, ..., x_n) = \frac{1}{t^{n/2}}e^{\lambda(x_1^2 + ... + x_n^2)/t}$, ορισμένη για $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $t > 0$, να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $\mu\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

14. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, C^1$-τάξεως με $3f_x + 2f_y = 0$. Δείξτε ότι $f(x, y) = g(2x - 3y)$ για κάποια παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.