ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1:

1. Αν $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ τότε:

   (α′) $||\vec{a} \times \vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2 \cdot ||\vec{b}||^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

   (β′) $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \sin\theta$, όπου θ η γωνία μεταξύ των $\vec{a}, \vec{b}$

2. Να ελέγξετε τους παρακάτω ισχυρισμούς για $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. (αν δεν ισχύει να δοθεί παράδειγμα και αν ισχύει να δοθεί απόδειξη)

   (α′) Αν η f έχει μερικές παραγώγους στο (x_0, y_0), τότε η f είναι συνεχής στο (x_0, y_0).

   (β′) Αν η f έχει παράγωγο κατα κατύθυνση $\vec{a} \in \mathbb{R}^2, ||\vec{a}|| = 1$ για κάθε κατεύθυνση, τότε η f είναι συνεχής.

   (γ′) Ισχύει $D_{\vec{a}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{a}$.

   (δ′) Αν η f είναι διαφορίσιμη στο (x_0, y_0), τότε είναι και συνεχής.

   (ε′) Αν η f έχει μερικές παραγώγους στον $\mathbb{R}^2$, τότε η f είναι διαφορίσιμη στον $\mathbb{R}^2$.

   (ϛ′) Αν η f έχει μερικές παραγώγους συνεχείς στον $\mathbb{R}^2$, τότε η f είναι διαφορίσιμη στον $\mathbb{R}^2$.

   (ζ′) Αν η f είναι διαφορίσιμη στον $\mathbb{R}^2$, τότε οι μερικές παράγωγοί της είναι συνεχείς.

3. Να υπολογισθεί το διαφορικό και το εφαπτόμενο επίπεδο της

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   στα σημεία $(1, 0)$ και $(0, 0)$.

4. Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} \sin(\frac{y}{x}) + x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   Εξετάστε αν η f

   (α′) έχει συνεχείς μερικές παραγώγους

   (β′) είναι διαφορίσιμη και να υπολογισθεί το $df(x_0, y_0)$ στα (x_0, y_0) που υπάρχει

   (γ′) έχει εφαπτόμενο επίπεδο στα $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

5. Για ποιούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(\alpha)\ \lim_{(0,0)} \frac{\sin(x+5y) - \alpha - \beta x - \gamma y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad (\beta)\ \lim_{(0,0)} \frac{\sin(x+5y) - \alpha - \beta x - \gamma y}{\sqrt[4]{x^4+y^4}} = 0$$

6. Υπάρχει το

$$\lim_{(0,0)} \frac{e^{x^4+y^4} - x^4 - y^4 - 1}{\sin\sqrt{x^2+y^2}};$$

   Στην περίπτωση που υπάρχει υπολογίστε το.