19/10/2020

Μάθημα 5ο:

Μικρή επανάληψη των Εισαγωγικών για τη Διαφόριση

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (I = ανοικτό διάστημα), $x_0 \in I$

Υπάρχει $f'(x_0) \iff \exists \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

$\iff \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot h}{|h|} = 0$

$\iff \exists\, T_{x_0}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-T_{x_0}(h)}{|h|} = 0$

($T_{x_0}(x) = f'(x_0)x$, $x \in \mathbb{R}$)

$f(x_0+h)-f(x_0) = T_{x_0}(h) + |h|q(h)$, $\quad q(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0 = q(0)$

εφαπτομένη ευθεία : $y(x) = f(x_0) + T_{x_0}(x - x_0)$

→ εκτίμηση της διαφοράς $f(x_0+h) - f(x_0)$

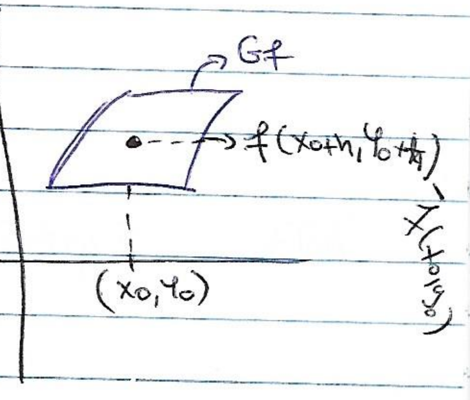
T_{x_0} = Διαφορ. της f στο x_0.

Πώς θα γενικεύσουμε την εκτίμηση της διαφοράς και να βρούμε εφ. επίπεδο;

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (x_0, y_0)

$\iff \exists\, T_{(x_0,y_0)}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ γραμμική

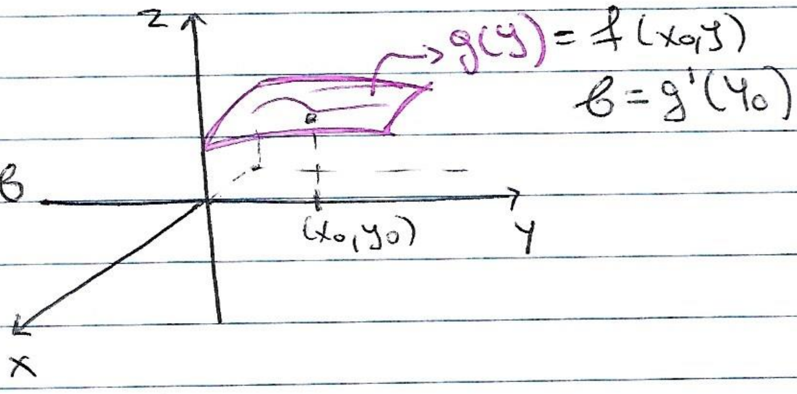
$$\lim_{(h,t)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+t) - f(x_0,y_0) - T_{(x_0,y_0)}(h,t)}{\sqrt{h^2+t^2}} = 0$$



$$T(x_0,y_0)(x,y) = ax + by = (a,b)\cdot(x,y)$$

$T(x_0,y_0)(1,0) = a$

$T(x_0,y_0)(0,1) = b$



$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0,y_0)}{t} = b$$

$$\frac{f(x_0,y_0)+t(0,1) - f(x_0,y_0)}{b} \xrightarrow{t} b$$

A $f: A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $\vec{x_0} \in A$

ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

$\vec{x_0} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Αν υπάρχει $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x_0}+h\vec{e_i}) - f(x_0)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,x_2,\dots x_i + t, \dots x_n) - f(x_1,\dots,x_n)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0})$$

$g(t) = f(x_1+t, x_2, \dots, x_n)$

$g'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x_0}) \rightsquigarrow$ i-Μερική Παράγωγος της f στο $\vec{x_0}$

Άλλοι Συμβολισμοί: f_{x_i}

ΑΝΑΔΕΛΤΑΙΚΛΗΣΗ ΤΗΣ f ΣΤΟ $\vec{x_0}$

$$\nabla f(\vec{x_0}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_{x_0}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) $f(x,y,z) = x^2 y + \eta\mu(xz+1) + z^3 \cdot e^{xy}$

(x_0, y_0, z_0)

- $f(x, y_0, z_0) = x^2 y_0 + \eta\mu(x z_0 + 1) + z_0^3 \cdot e^{x y_0}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 2x_0 y_0 + z_0 \cdot \sigma\upsilon\nu(x_0 z_0 + 1) + y_0 \cdot z_0^3 e^{x_0 y_0}$

- $f(x_0, y, z_0) = x_0^2 y + \eta\mu(x_0 \cdot z_0 + 1) + z_0^3 \cdot e^{x_0 y}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = x_0^2 + x_0 z_0^3 e^{x_0 y_0}$

- $f(x_0, y_0, z) = x_0^2 y_0 + \eta\mu(x_0 \cdot z + 1) + z^3 \cdot e^{x_0 y_0}$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = x_0 \cdot \sigma\upsilon\nu(x_0 z_0 + 1) + 3 z_0^2 \cdot e^{x_0 y_0}$

$(1,0,1)$, $\nabla f(1,0,1)$

~~(1,2,3) ∇f(1,2,3)~~ $= (\sigma\upsilon\nu(2), 2, \cancel{\eta\mu}\ \sigma\upsilon\nu(2) + 3)$

2) $f(x,y) = x^y, \quad x > 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cdot x^{y-1}$

Να υπολ. οι μερικοί παράγωγοι

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (\ln x)\, x^y$

Ερωτήματα

i) Εάν η $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ έχει μερικές παραγώγους στο (x_0, y_0) είναι συνεχής στο (x_0, y_0);

<u>όχι</u>

π.χ. $f(x,y) = |x| + |y|$

$g(x,0) = |x|$ $\nexists$ η παράγωγος $g'(0)$, δηλ.

δεν $\exists$ η μερική παρ. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

$\varphi(0,y) = |y|$, $\nexists$ $\varphi(0)$ δηλ. $\nexists$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

<u>Σχόλιο</u>

i) Εάν $\exists$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

και $g(x) = f(x, y_0)$, $g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

Αν $\exists$ $g'(x_0) \Rightarrow g$ είναι συνεχής στο x_0.

δηλ. ο περιορισμός της f στην ευθεία $y = y_0$ είναι συνεχής στο x_0 $(f(x, y_0))$

ii) Εάν $\exists$ οι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ στο (x_0, y_0), δεν έπεται ότι η f είναι συνεχής στο (x_0, y_0)

π.χ. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Ασυνεχής στο $(0,0)$

$y_0 = 0$, $f(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

όμοια $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

(B) **

$f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in A$

Η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}_0 \Leftrightarrow$

$\exists\ T_{\vec{x}_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ΓΡΑΜΜΙΚΗ με

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{f(\vec{x}_0+\vec{h}) - f(\vec{x}_0) - T_{\vec{x}_0}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

$\Leftrightarrow \exists\ T_{\vec{x}_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ΓΡΑΜΜΙΚΗ και $q: B(\vec{0}, \varepsilon) \to \mathbb{R}$

ώστε $f(\vec{x}_0+\vec{h}) = f(\vec{x}_0) + T_{\vec{x}_0}(\vec{h}) + \|\vec{h}\|\, q(\vec{h})$ και

$q(\vec{h}) \to 0 = q(\vec{0})$

Αν υπάρχει η $T_{\vec{x}_0}$, $T_{\vec{x}_0} = df(\vec{x}_0)$ (ή $D_1 f(\vec{x}_0)$)

διαφορικό της f στο $\vec{x}_0$.

Πρόταση

$f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ διαφ. στο $\vec{x}_0$

$df(\vec{x}_0)(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$. Τότε ισχύει ότι

$|f(\vec{x}_0+\vec{h}) - f(\vec{x}_0)| \leq \|\vec{h}\|\,(1+\|\vec{a}\|)$ για $\|\vec{h}\| < \vec{0}$

Άρα η f είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$

Πρόταση

$f: A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $\vec{x_0} \in A$.

Τότε:

i) $df(\vec{x_0})(\vec{e_i}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0}),\ i = 1, 2, \dots, n$

ii) $df(\vec{x_0})(\vec{h}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(\vec{x_0}) \cdot (h_1, h_2, \dots, h_n)$

$$= \nabla f(\vec{x_0}) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial x_i} \cdot h_i$$

Αποδ. i) $\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{f(\vec{x_0} + \vec{h}) - f(\vec{x_0}) - df(\vec{x_0}) \cdot (\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$

$\vec{h} = t \cdot \vec{e_i}$

$$df(\vec{x_0})(t\vec{e_i}) = t \cdot df(\vec{x_0}) \cdot (\vec{e_i})$$

$$\lim_{t \to 0} \left[\frac{f(\vec{x_0} + t\vec{e_i}) - f(\vec{x})}{t} - d \cdot f(\vec{x_0}) \cdot (\vec{e_i}) \right] \frac{t}{|t|} = 0$$

$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0}) = df(\vec{x_0}) \cdot (\vec{e_i})$

ii) $df(\vec{x_0})(b_1 \vec{e_1} + b_2 \cdot \vec{e_2} + \dots + b_n \cdot \vec{e_n}) =$

$= \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{x}$

- Ασυνεχής στο $(x_0, y_0) \Longrightarrow$ όχι διαφορίσιμη

- Εάν $\nexists$ κάποια από τις $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) \Longrightarrow$ όχι διαφορίσιμη

? Πώς θα ? εξετάσουμε την ύπαρξη ? του διαφορικού της f ?
στο $\vec{x_0}$, αν η f ΣΥΝΕΧΗΣ, με ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ;

ΚΡΙΤΗΡΙΑ

(Ι) <u>Πρόταση:</u> $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $\vec{x_0} \in A$ και $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0})$, $i=1,..n$

Εάν $$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{x_0}+\vec{h})-f(\vec{x_0})-\nabla f(\vec{x_0})\cdot\vec{h}}{\|\vec{h}\|}=0 \quad (*)$$

Τότε $\exists$ $df(\vec{x_0})$ $\quad (df(\vec{x_0})(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x_0})\cdot\vec{h})$

Αποδ. $T_{\vec{x}}(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x_0})\cdot\vec{x}$ είναι <u>γραμμική</u>

και ικανοποιεί τη σχέση $(*)$

Από μοναδικότητα ορίου $\Rightarrow df(\vec{x_0})(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x_0})\cdot\vec{x}$
$\vec{x}\in\mathbb{R}^n$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1) $$f_\lambda(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{(x^2+y^2)^\lambda}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

i) Για ποιές τιμές του λ η f_λ είναι συνεχής;
ii) Για ποιές τιμές του λ είναι διαφορίσιμη;

<u>Λύση</u>

i) $$|f_\lambda(x,y)| = \frac{|x||y|}{\|(x,y)\|^{2\lambda}} \leq \frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|^{2\lambda}} = \|(x,y)\|^{2(1-\lambda)} \quad (*)$$

- $\lambda < 1$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, Συνεχής
- $\lambda \geq 1$ η $(*)$ δεν βοηθά!

• $\lambda=1$, $$f_1(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ ασυνεχής

π.χ. $y=x\to 0$, $f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$

$y = x > 0$

• $\lambda \geq 1$, ~~$f(x,x) = \frac{x^2}{(2x^2)^\lambda} = \frac{x^2}{2^\lambda x^{2\lambda}} = \frac{1}{2^\lambda}$~~

$$f(x,x) = \frac{x^2}{(2x^2)^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda} \cdot \frac{1}{x^{\lambda-1}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty \ (!)$$

Συνεχής $\Leftrightarrow$ $\lambda < 1$

ii) $\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial F_\lambda}{\partial y}(0,0)$

Αν $\exists$ $df(0,0)(h,t) = \nabla f(0,0) \cdot (h,t) = 0$

και

$$\lim_{(h,t)} \frac{1}{\sqrt{h^2+t^2}} \left[\frac{h \cdot t - 0 - 0}{(h^2+t^2)^\lambda} \right] = 0$$

δηλ. $\lim\limits_{(h,t)\to(0,0)} \frac{ht}{(h^2+t^2)^{\lambda+1/2}} = 0$

όμως από (i) $\lim\limits_{(h,t)} \frac{ht}{(h^2+t^2)^{\lambda+1/2}} = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1/2) < 1 \Rightarrow \lambda < \frac{1}{2}$

Διαφορίσιμη $\Leftrightarrow$ $\lambda < \frac{1}{2}$