• $1-\lambda>0, \rightsquigarrow \underline{\lambda<1}$ $\lim_{(0,0)} g_\lambda(x,y)=0$

άρα $\lambda<1$, g_λ συνεχής

• $\underline{\lambda=1}$, $g_\lambda(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}\\ 0\end{cases}$ Δεν $\nexists \lim_{(0,0)} g_\lambda$

• $\underline{\lambda>1}$, $(x^2+y^2)^\lambda < (x^2+y^2)^1$ ((x,y) περιοχή του $(0,0)$)

$|g_\lambda(x,y)| \geqslant |g_1(x,y)|$

Αν $g_\lambda(x,y)\longrightarrow 0 = g_\lambda(0,0)$

$\Rightarrow g_1(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\longrightarrow 0$ αδύνατον!

$\boxed{g_\lambda \text{ συνεχής} \Leftrightarrow \lambda<1}$

16/10/2020 Μάθημα 4ο

... ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

10) $f_\beta(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2}{(x^2+y^2)^\beta}\eta\mu y, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Να βρεθούν τα $\beta\in\mathbb{R}$: η f_β συνεχής (και) στο $(0,0)$

Λύση

Ξέρουμε ότι $\lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y}=1$

$|f_\beta(x,y)| = \frac{|x^2||y|}{\|(x,y)\|^{2\beta}}\cdot\left|\frac{\eta\mu y}{y}\right|$ Τότε $\longrightarrow$

Αν $b < 3/2$ $(3-2b>0)$

ΣΥΝΕΧΗΣ

i) $|f_b(x,y)| \leq \frac{\|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^{2b}} \cdot \frac{|\eta\mu y|}{|y|} = \|(x,y)\|^{3-2b} \left|\frac{\eta\mu y}{y}\right| \xrightarrow[(0,0)]{} 0$

ii) $b = 3/2$ ΑΣΥΝΕΧΗΣ

$$f_{3/2}(x,y) = \frac{x^2 \cdot y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \frac{\eta\mu y}{y}$$

Έστω $y = x > 0$, $x \to 0$

$$f(x,x) = \frac{x^3}{2^{3/2}x^3} \frac{\eta\mu x}{x} = \underbrace{\frac{\eta\mu x}{x}}_{\nearrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2^{3/2}}}_{\nearrow 1/2^{3/2}} \longrightarrow \frac{1}{2^{3/2}} \neq f(0,0) = 0$$

iii) $b > 3/2$ ΑΣΥΝΕΧΗΣ στο $(0,0)$

<u>1ος τρόπος</u> $0 < (x^2+y^2)^2 < 1$, $(x^2+y^2)^{3/2} > (x^2+y^2)^b$

$|f_b(x,y)| \geq |f_{3/2}(x,y)|$.

Αν $f_b(x,y) \xrightarrow[(0,0)]{} 0 = f_b(0,0) \Rightarrow$ και η $f_{3/2}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ Αδύνατον!

<u>2ος τρόπος</u> $f_b(x,x) \underset{x>0}{\longrightarrow} +\infty$

(*) 11 $f(x,y) = \frac{xy}{y-x}$, $x \neq y$ Ν.δ.ο.

i) $f(x, ax^\lambda) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ για κάθε $\lambda > 0$ και $(a,\lambda) \neq (1,1)$

ii) $f(r\cdot\sigma\upsilon\nu\theta, r\cdot\eta\mu\theta) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ για κάθε $\theta \neq \frac{\pi}{4}$

iii) Δεν υπάρχει το $\lim_{(0,0)}$

Λύση

i) $f(x, ax^\lambda) = \frac{ax^\lambda}{x - ax^\lambda} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ (Υποδ. διακρίνετε περιπτώσεις $\lambda>1$, $\lambda=1$, $0<\lambda<1$)

$x>0$, $\lambda>0$, $(a,\lambda) \neq (1,1)$

ii) $f(r\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta, r\,\eta\mu\vartheta) = \dfrac{r\cdot \eta\mu\vartheta\,\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\eta\mu\vartheta - \sigma\upsilon\nu\vartheta} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$

$(\vartheta \neq \frac{\pi}{4})$

iii) Χρειαζόμαστε συνάρτηση g στην περιοχή του 0,

$g: f(x, g(x)) \not\xrightarrow[x\to 0]{} 0$

ΚΑΙ $y = g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

δηλ. $\dfrac{x\cdot g(x)}{g(x)-x} \not\to 0$, $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Υπάρχει g με $\dfrac{x\,g(x)}{g(x)-x} = 1 \; (\neq 0)$

δηλ. $x\cdot g(x) = g(x) - x \Leftrightarrow$

$g(x)(x-1) = -x \Leftrightarrow$

$x = g(x)(1-x)$

Τότε $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ και $f(x, g(x)) = 1 \xrightarrow[x\to 0]{(*)} 1 \neq 0$

Από το (i) ή το (ii) και το (*) η f δεν έχει όριο στο $(0,0)$

12 $\varphi(x,y) = \dfrac{x^3 y^4}{(y-x)^2}$ Ν.δ.ο. $\nexists \lim\limits_{(0,0)}$

Υπόδ. $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x^2y^2}{y-x}\right)^2$, $\exists;\ \dfrac{x^2 g^2(x)}{g(x)-x} = 1$

$g(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

$(y > x > 0)$

$g(x)$

2) $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης χώρος με Νόρμα
δηλ. κάθε βασική ακολ. είναι συγκλίνουσα

3) $\vec{f}: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ $(A = \text{ανοικτό})$
Τα εξής είναι ισοδύναμα:
i) f συνεχής στο A
ii) $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $B = \text{ανοικτό}$
$\Rightarrow f^{-1}(B)$ ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$
iii) $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ και Γ κλειστό $\Rightarrow f^{-1}(\Gamma)$ κλειστό

4) $B \subseteq A$, $B = \text{συμπαγές}$, $\vec{f}: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ συνεχής
τότε $\vec{f}(B) = \text{συμπαγές}$

5) $g: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ συνεχής, $B \subseteq A$, $B = \text{συμπαγές}$
Τότε $\exists$ $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in B$: $g(\vec{x}_1) \leq g(\vec{x}) \leq g(\vec{x}_2)$, $\vec{x} \in B$
(Θ. Μ-Ε Τιμής)
μέγιστης-ελάχιστης

6) $\vec{f}: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ συνεχής στο $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$K \subseteq A$, $K = \text{συνεκτικό} \Rightarrow \vec{f}(K) = \text{συνεκτικό}$
(K = συνεκτικό, $\Leftrightarrow$ $\nexists$ B, Γ ανοικτά $\subseteq \mathbb{R}^n$
$B \cap \Gamma = \emptyset$
$K \subseteq B \cup \Gamma$
$K \cap B \neq \emptyset$, $K \cap \Gamma \neq \emptyset$)

7) $g: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ συνεχής και $A = \text{συνεκτικό}$
Αν $\vec{x}, \vec{y} \in A$ με $g(\vec{x}) < g(\vec{y})$ $(g(A) \subseteq \mathbb{R}, g(A) = \text{συνεκτ.})$
και $c \in \mathbb{R}$: $g(\vec{x}) < c < g(\vec{y})$, $g(A) = \text{διάστημα}$
τότε υπάρχει $\vec{\xi} \in A$ με $c = g(\vec{\xi})$ (ΘΕΤ)
θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

Κεφ.4 ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ $\vec{f}: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$
(A = ανοικτό)

Τι ζητάμε; Να επεκτείνουμε την έννοια της παραγώγου $f'(x_0)$ για $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $(x_0 \in (a,b))$

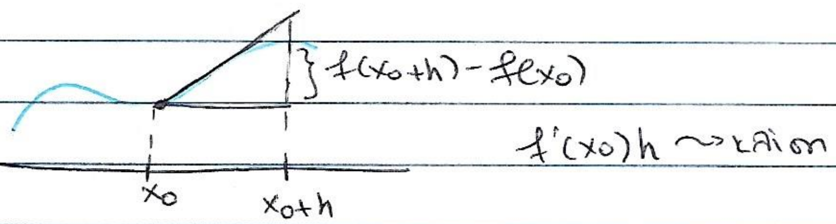
Γιατί; Σε τι βοηθά η $f'(x_0)$;

(*)

$\underbrace{f(x_0+h)-f(x_0)} \cong f'(x_0)h$, $\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \xrightarrow{h\to 0} f'(x_0)\right)$

↳ Μεταβολή της f για "μικρές" μεταβολές του h

Ορίζεται η εφ. ευθεία $y=f(x_0)+f'(x_0)h$, $h\in\mathbb{R}$ και προσέγγιση του $f(x_0)$ με αυτή.



Πώς θα διαλέγαμε ώστε να επιτύχαμε τα (*) για $f: A(\subseteq\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}$, $(x_0,y_0)\in A$, (A ανοικτό)

Πχ. Αν $g:(a,b)\to\mathbb{R}$, $g'(x_0)=\lim \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$

h → δεν ορίζεται πολ/σμός

Για $n=2,3$ δεν ορίζεται $\frac{1}{(s,t)}=(s,t)^{-1}$

όταν δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτα "τροποποιούμε" τον ορισμό

Γράφουμε με διαφορετικό τρόπο τον ορισμό της $g'(x_0)$

Η $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0\in(a,b) \iff$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} - g'(x_0)=0$$

$$\iff \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)-g'(x_0)h}{|h|}=0$$

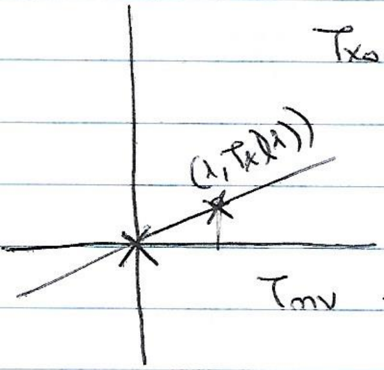
$\boxed{\text{ΓΡΑΜΜΙΚΗ!}}$

$\Leftrightarrow$ Υπάρχει $T_{x_0}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $q(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0 = q(0)$

ώστε ② $g(x_0+h, x_0) - g(x_0) = T_{x_0}(h) + |h|\, q(h)$, $h \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$

γραμμική προσέγγιση

Τότε $T_{x_0}(x) = g'(x_0)x$, $x \in \mathbb{R}$



$T_{x_0}(1) = g'(x_0)$

άμα ξέραμε και το $T_{x_0}(1)$, ξέραμε όλη την ευθεία

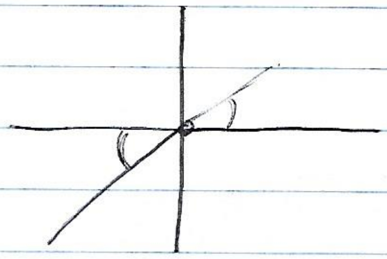
Την γραμμική $T_{x_0}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ την ονομάζαμε διαφορικό της g στο x_0

? Πώς θα είναι ο ορισμός του διαφορικού $T_{(x_0,y_0)}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

? ώστε για $f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$

$(x_0, y_0) \in A$;

$T_{(x_0,y_0)}(x,y) = ax+by$, $T_{(x_0,y_0)}(1,0) = a$, $T_{(x_0,y_0)}(0,1) = b$



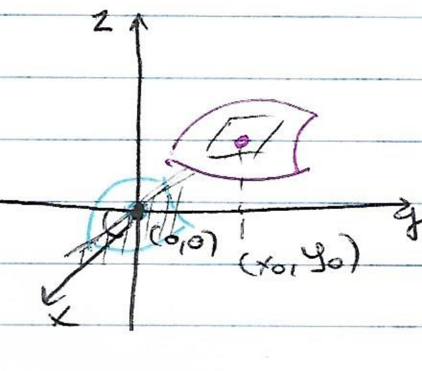
Η f είναι διαφορίσιμη στο $(x_0,y_0) \Leftrightarrow$
$\exists\, T_{(x_0,y_0)}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, γραμμική (& μοναδική)
με $\lim_{(h,s)\to(0,0)} \dfrac{f(x_0+h, y_0+s) - f(x_0,s) - (ah+bs)}{\sqrt{h^2+s^2}} = 0$

$T_{(x_0,y_0)}(x,y) = ax+by$

?

? Εάν υποθέσουμε ότι $\exists$ η $T_{(x_0,y_0)}$ ποιά είναι τα a, b;

$s=0$, $a = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$



(Αν $\exists$ η $T_{(x_0,y_0)}$ θα $\exists$ και οι κλίσεις a και b.)