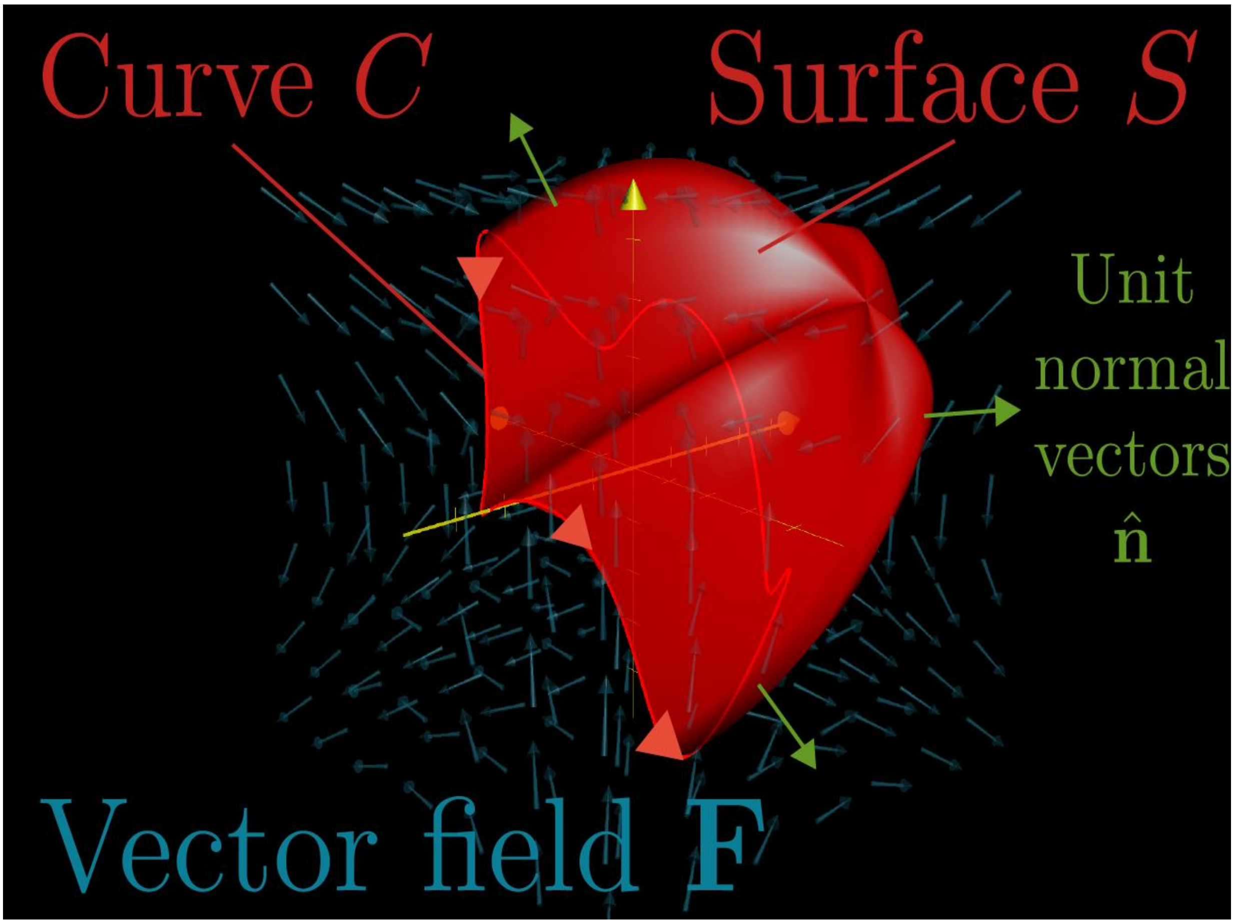
ΘΕΩΡΗΜΑ του STOKES



ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ (2020-21 Χ)

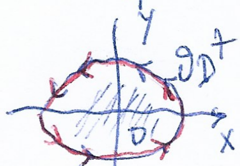
ΜΑΘΗΜΑ 27 (11-12-20)

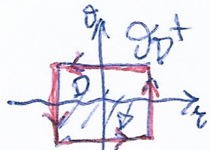
ΚΕΦ 12: Θεώρημα Stokes (~1850) στον $\mathbb{R}^3$

Το θεώρημα Stokes αναφέρεται σε επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$ και αποτελεί γενίκευση του Θ. Green.

Το Θ. Green αναφέρεται σε ΔΠ $\vec{F}: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ και επιφάνειες του $\mathbb{R}^2$, με συγκεκριμένη μορφή:

α) Σύνολα Green πχ

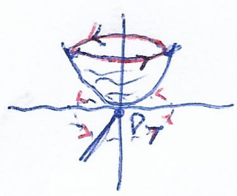




..., ∂D^+ είναι απλή, κλειστή, C^1, λεία κατά τμήματα, θετικά προσανατολισμένη (ως προς D)

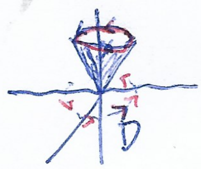
$D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$ $\quad \iint_D (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{k} = \oint_{\partial D^+} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Παραμορφώνοντας (μέσω $\vec{r}: D\to\mathbb{R}^3$) ένα σύνολο Green, σε επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$, θα έχουμε πχ



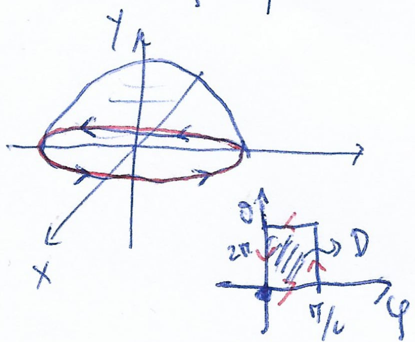
$\vec{r}(x,y)=(x,y,x^2+y^2)$, $(x^2+y^2\le 1)$ θα πάρουμε την επιφάνεια ενός παραβολοειδούς

ή $\vec{r}(x,y)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$ $(x^2+y^2\le 1)$ θα πάρουμε την επιφάνεια ενός κώνου



Για $D=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]$, μέσω της $\vec{r}(\varphi,\theta)=(\text{ημ}\varphi\,\text{συν}\theta, \text{ημ}\varphi\,\text{ημ}\theta, \text{συν}\varphi)$

θα πάρουμε την επιφάνεια ημισφαιρίου $(\rho=1)$



ή μέσω της $\vec{r}(x,y)=(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$
$D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$

κ.ο.κ. ......

Ο τύπος Green λέει: $\iint_D (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{k}\,dxdy = \oint_{\partial D^+} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου $\vec{k} \perp$ επιφάνεια $D\ (\subseteq \mathbb{R}^2)$ δηλ. η εξερχόμενη Ροή του Στροβιλισμού, μέσω της επιφανείας D, ισούται με την Ροή του Δ.π $\vec{F}$ | $\nabla\times\vec{F}$ κατά μήκος του συνόρου ∂D^+ (θετικά προσανατολισμένου)

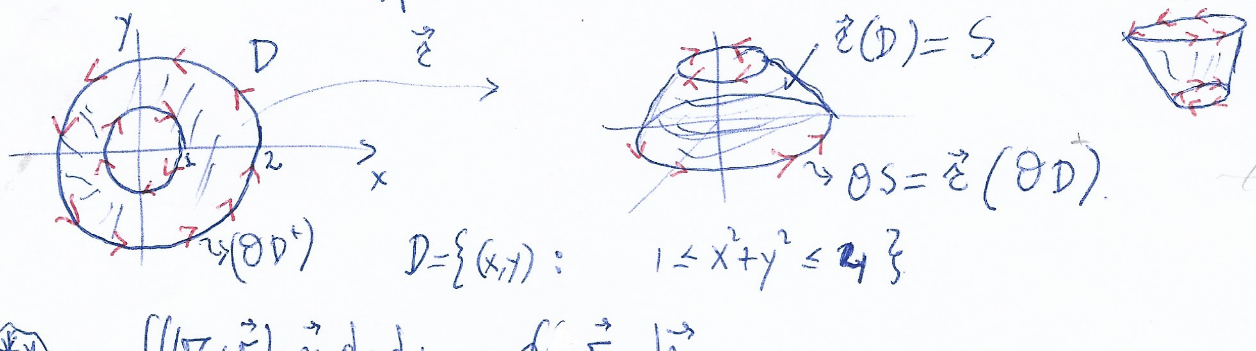
Τι περιμένουμε για την επιφάνεια $\vec{r}(D) = S$;;

$\vec{F} = (P, Q, R)$

(*) $\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}(x,y)\,dx\,dy = \oint_{\partial S^+} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου

$\vec{n}(x,y) \perp S$ στο $\vec{r}(x,y)$, δηλ. η εξερχόμενη Ροή του Στροβιλισμού $(\nabla\times\vec{F})$ μέσω της επιφανείας S, ισούται με τη Ροή του Δ.π $\vec{F}$, κατά μήκος του "συνόρου" "∂S^+" της επιφανείας. Εδώ $\partial S = \vec{r}(\partial D)$,

β) Στοιχειώδη σύνολα Green πχ



$D = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$

(**) $\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dx\,dy = \oint_{\partial S^+} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Μα, αυτό είναι το Θ. Stokes!!

αφού βέβαια γράφουμε κατάλληλες υποθέσεις συνέχειας, ομαλότητος κ.λ.π, για τις $\vec{F}$ και $\vec{r}$.

Στις παραπάνω επιφάνειες εμφανίζεται ένα νέο Δ.Π, του Καθέτου
Αν $\vec{r}(u,v)$ είναι παραμέτρηση της S τότε
$\vec{n}(u_0,v_0) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v (u_0,v_0)$ και το $\vec{n}: D \to \mathbb{R}^3$ είναι μια συνεχής συνάρτηση.
Αν πάρουμε την ίδια επιφάνεια S, αλλά με παραμέτρηση $\vec{r}(v,u)$ το $\vec{n}(v_0,u_0) = -\vec{n}(u_0,v_0)$, οπότε το $\int_S (\nabla \times \vec{F}) . \vec{n}$ εξαρτάται (+,−) από την παραμέτρηση.
Ταυτόχρονα, θα αλλάξει και ο προσανατολισμός του $\vec{r}(\partial D)$, οπότε και το $\int_{\partial S} \vec{F} \circ d\vec{r}$. (+,−)

→ Πρέπει να προσανατολίσουμε την S και το σύνορό της (ταυτόχρονα) ώστε να ισχύει $\iint_S \nabla \times \vec{F} \circ \vec{n}\, dx dy = \oint_{\partial S+} \vec{F} \circ d\vec{r}$.

Έστω $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in D (\subseteq \mathbb{R}^2)$, C^1, λεία και το ∂D είναι λεία/ες C^1 καμπύλη/ες (D = "καλό" σύνολο)
Το $\vec{N}(u,v) = \dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}(u,v)$ ορίζει Δ.Π.

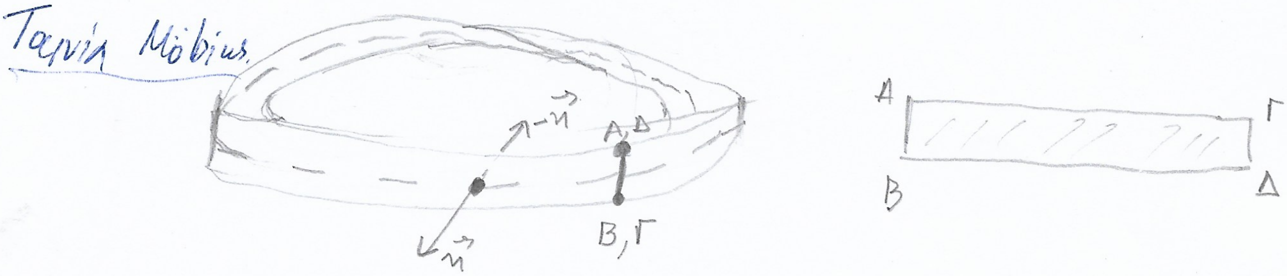
Θα λέμε ότι η λεία επιφάνεια είναι Προσανατολισμένη ⟺ το Δ.Π $\vec{N}: D \to \mathbb{R}^3$ είναι Συνεχές Δ.Π
Τότε, το $\vec{N}(u,v)$ ορίζει τον Θετικό Προσανατολισμό της S
Εάν το περίγραμμα/"σύνορο" της S εφοδιαστεί με την παραμέτριση $\vec{g}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, τότε το περίγραμμα θα λέμε, ότι έχει Θετικό προσανατολισμό

Στην περίπτωση που η S είναι ΑΠΛΗ, λεία, C^1 επιφάνεια με παραμέτρηση $\vec{r}$, η S είναι πάντα προσανατολισμένη.
Άρα, αν η S είναι γράφημα $z=f(x,y)$, ($f=C^1$) είναι προσανατολισμένη.

Σχόλιο 1) Υπάρχουν λείες επιφάνειες που δεν προσανατολίζονται π.χ η Ταινία Möbius (1858)

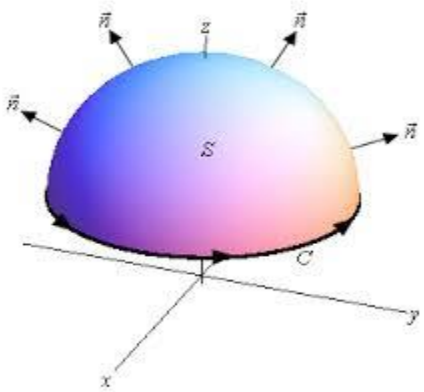
$$\begin{cases} \vec{r}(u,v)=\left(\left(1+\frac{v}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{u}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\, u,\ \left(1+\frac{v}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{u}{2}\right)\eta\mu\, u,\ \frac{v}{2}\eta\mu\frac{u}{2}\right) \\ (u,v)\in[-\pi,+\pi]\times[-1,+1]=D \end{cases}$$

Η $\vec{r}$ δεν είναι 1-1, $\vec{r}(-\pi,0)=\vec{r}(\pi,0)=(-1,0,0)$
$\vec{N}(-\pi,0)=-\vec{k}$, $\vec{N}(\pi,0)=\vec{k}$ δηλ. στο $(-1,0,0)$ της επιφάνειας έχουμε $-\vec{k}$, $\vec{k}$ κάθετα (!) (στο $(-1,0,0)\in S$ δεν ορίζεται κάθετο)

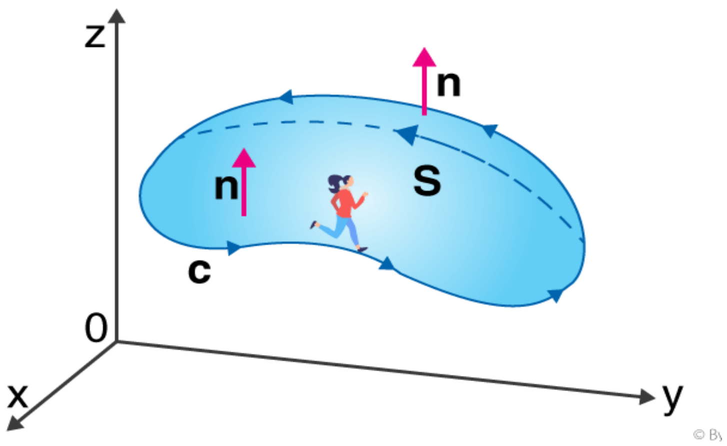


2) Γεωμετρικά, ο θετικός προσανατολισμός του Γ περιγράμματος/"συνόρου" μιας S είναι τέτοιος, ώστε αν περπατάμε πάνω στην S κατά μήκος της Γ, είναι εκείνος που το κεφάλι μας είναι στην κατεύθυνση του $\vec{N}$, και αφήνουμε την S αριστερά μας.
Αλλιώς, με άλλα λόγια, η Γ^+ και το $\vec{N}$ ορίζουν δεξιόστροφο κοχλία.

ΔΠ των Καθέτων Διανυσμάτων στην Επιφάνεια



ΘΕΤΙΚΟΣ Προσανατολισμός



MOBIUS (Κεραμικό Ι.Κ., 2019)

*** Θεώρημα Stokes

Έστω S λεία, C^2 προσανατολισμένη επιφάνεια, η οποία έχει "σύνορο" (περίγραμμα) απλή, κλειστή, λεία καμπύλη $\gamma(S)$ (ή ένωση τέτοιων καμπυλών), συμβατά προσανατολισμένο με την S.

Έστω $\vec{F} : A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$, C^1, $S \subseteq \vec{F}(A)$ ($A =$ ανοικτό)

Τότε

$$\boxed{\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\gamma(S)} \vec{F} \cdot d\vec{\rho}}$$

Αναλυτικά: αν $S : \vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ και $\gamma(S) : \vec{\rho}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ $t \in [\alpha, \beta]$, τότε

$$\iint_D [(\nabla \times \vec{F})(\vec{r}(u,v))] \cdot [\vec{r}_u \times \vec{r}_v (u,v)]\, du\, dv = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{\rho}(t)) \cdot \vec{\rho}\,'(t)\, dt.$$

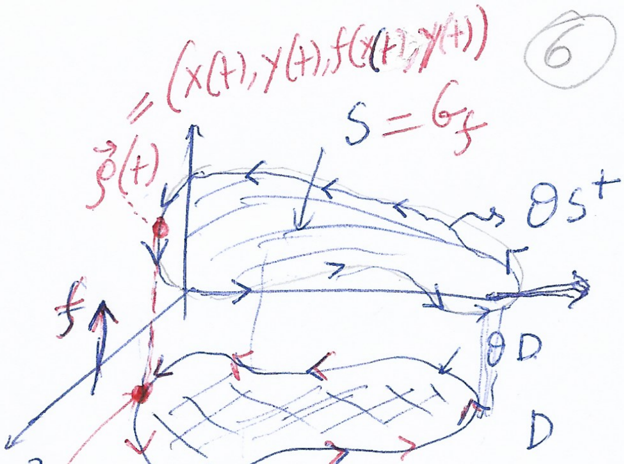
Αποδ. Θα αποδείξουμε το Θ. Stokes, αν $S = G_f$ όπου $f : D \to \mathbb{R}$, C^2, D σύνολο που εφαρμόζεται το Θ. Green.
$\vec{F} = (P, Q, R)$, $\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$ όπου $(x,y) \in D$, παραμέτρηση του γραφήματος $G_f = S$.

- $$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_D (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \cdot (-f_x, -f_y, 1)\, dx\, dy$$
$$= \iint_D [-f_x (R_y - Q_z) - f_y (P_z - R_x) + (Q_x - P_y)]\, dx\, dy \quad (1)$$

- $\gamma(S)$, $\vec{\rho}(t) \overset{\circledast}{=} (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$, $t \in [\alpha, \beta]$,

$$\int_{\gamma(S)} \vec{F} \cdot d\vec{\rho} = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{\rho}(t)) \cdot \vec{\rho}\,'(t)\, dt \underset{\substack{(\text{κανόνας}\\ \text{αλυσίδας})}}{\overset{\circledast}{=}} \int_\alpha^\beta \vec{F}(x(t), y(t), f(x(t), y(t))) \cdot (x'(t), y'(t), f_x x'(t) + f_y y'(t))$$

$$= \int_\alpha^\beta (P x' + Q y' + R f_x x' + R f_y y')\, dt = \int_\alpha^\beta [(P + R f_x) x' + (Q + R f_y) y']\, dt$$



Θέτουμε

$$(3)\begin{cases} P_1(x,y) = P(x,y,f(x,y)) + R(x,y,f(x,y))\, f_x(x,y) \\ Q_1(x,y) = Q(x,y,f(x,y)) + R(x,y,f(x,y))\, f_y(x,y) \end{cases}$$

Τότε η $\vec{F}_1 = (P_1, Q_1) : D \to \mathbb{R}^2$, C^1 $(f = C^2)$. Το σύνορο $\partial D = \{(x(t),y(t)),\ t\in[\alpha,\beta]\}$

Από το Θ. Green για την $\vec{F}_1$ στο D έχουμε

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\alpha^\beta \vec{F}_1(x(t),y(t)) \cdot (x'(t), y'(t))\, dt$$

$$\Rightarrow \iint_D \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial x}\right) dx\,dy \overset{(3)}{\underset{(2)}{=}} \int_{\gamma(S)} \vec{F} \cdot d\vec{\rho} \qquad (4)$$

Υπολογίζουμε το $\dfrac{\partial Q_1}{\partial x} = (Q_x \cdot 1 + Q_y \cdot 0 + Q_z f_x) + \left[(R_x \cdot 1 + R_y \cdot 0 + R_z f_x) f_y + R \cdot f_{yx}\right] =$

(Κανόνας Αλυσίδας)

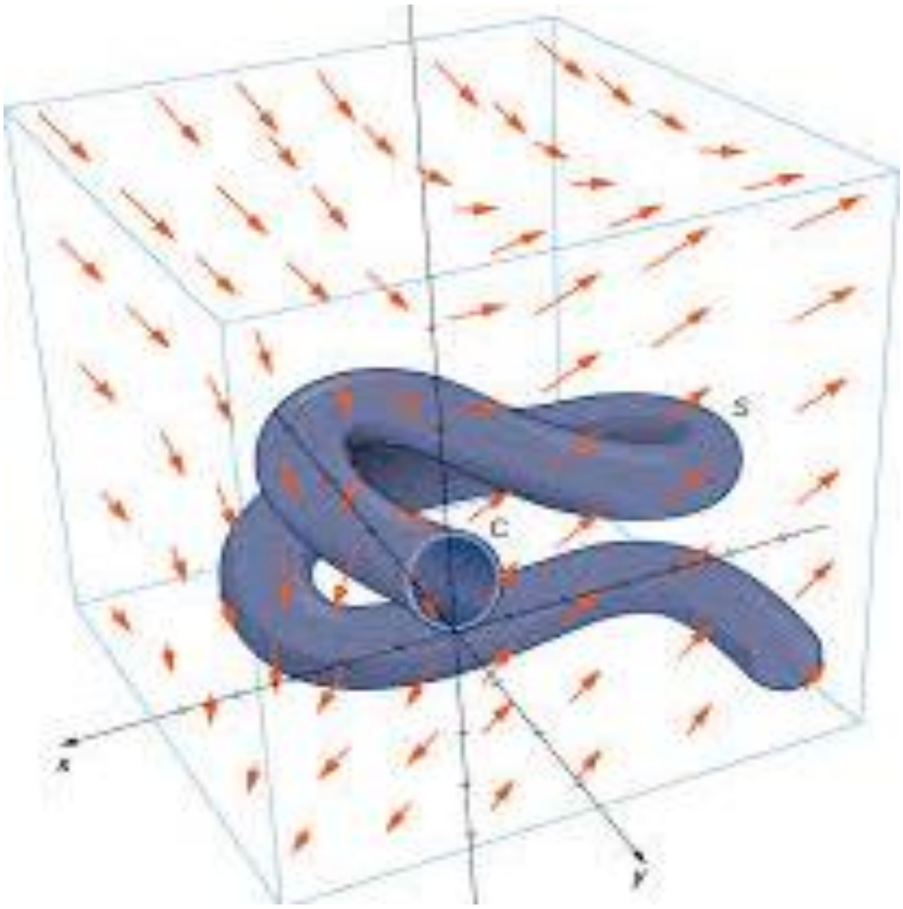
$$= Q_x + Q_z f_x + (R_x + R_z f_x) f_y + R \cdot f_{yx}$$

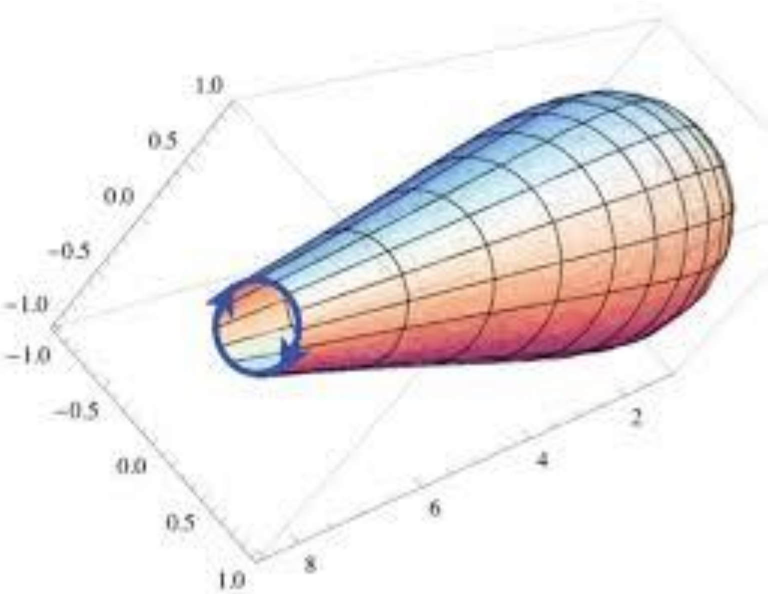
$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = P_y + P_z f_y + (R_y + R_z f_y) f_x + R f_{xy}$$

$f = C^2$, $f_{xy} = f_{yx}$ (Θ. Μεικτών Παραγώγων)

Άρα (4) γίνεται $\displaystyle\int_{\gamma(S)} \vec{F} \cdot d\vec{\rho} = \iint_D \left[(Q_x - P_y) - f_y(P_z - R_x) - f_x(R_y - Q_z)\right] dx\,dy$ (5)

Από (1) και (5) $\displaystyle\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\gamma(S)} \vec{F} \cdot d\vec{\rho}$





<u>ΘΕΩΡΗΜΑ STOKES</u>

Εφαρμογές Θ. Stokes

1) Υπολογισμός Επιφανειακού Ολοκληρώματος $\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$ με την βοήθεια επικαμπυλίου ολοκληρώματος $\int_{\gamma(S)} \vec{F}\cdot d\vec{s}$, όταν το $\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$ είναι δυσκολότερο από το $\int_{\gamma(S)} \vec{F}\cdot d\vec{s}$ ($\gamma(S)$ η κλειστή καμπύλη του περιγράμματος της επιφάνειας S) και Αντίστροφα. —

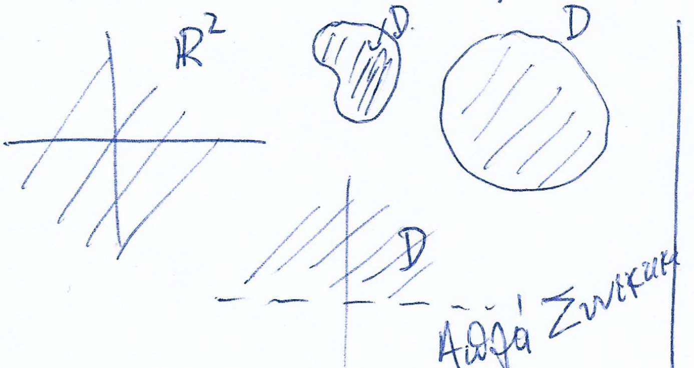
2) Μελέτη Αστροβίλων Δ.Π. στον $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

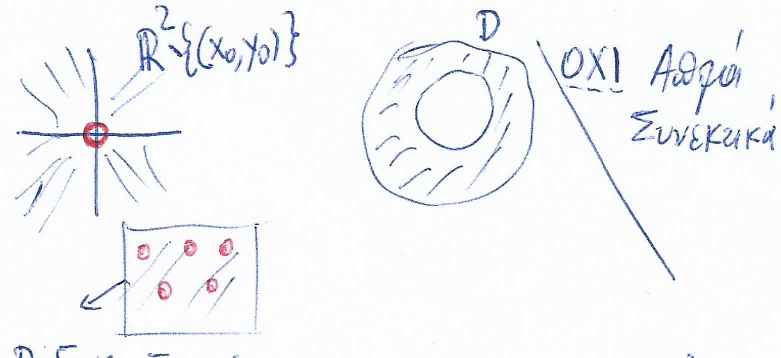
$\mathbb{R}^2$: Είδαμε ότι, αν το $\vec{F}=(P,Q) : D(\subseteq\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}^2$ είναι Αστρόβιλο σε Κυρτό σύνολο ή σε σύνολο D με σύνορο ΜΙΑ καμπύλη (κλειστή, C^1, λεία), τότε το $\vec{F}$ είναι Συντηρητικό.

Δεν ισχύει (γενικά) το αντίστροφο πχ. $\vec{F}(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ (C^∞) $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}=D$. Για την $\Gamma: \vec{r}(t)=(\cos t, \sin t)$, $t\in[0,2\pi]$ το εσωτερικό της δεν είναι υποσύνολο του D.

Ορισμός $A=$ ΤΟΠΟΣ του $\mathbb{R}^2$

$A\subseteq\mathbb{R}^2$ καλείται Απλά Συνεκτικό $\Leftrightarrow$ για κάθε απλή, κλειστή καμπύλη του A το εσωτερικό της καμπύλης είναι υποσύνολο του A.



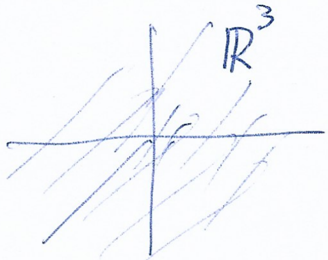


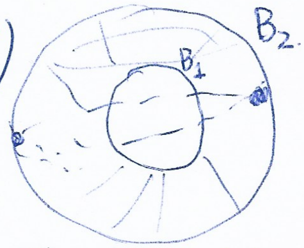
$D=[0,1]\times[0,1]\setminus\{(x_k,y_k)\dots$

$\mathbb{R}^3$: Μελετώντας το Θ. Stokes και προσπαθώντας να βρούμε σύνολα που το Αστρόβιλο ΔΠ, να είναι Συντηρητικό καταλήγουμε στον ορισμό:

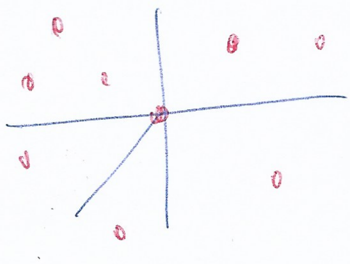
<u>Ορισμός</u> $B =$ ΤΟΠΟΣ του $\mathbb{R}^3$

$B \subseteq \mathbb{R}^3$ καλείται Απλά Συνεκτικό $\Leftrightarrow$ για κάθε λεία, απλή, κλειστή καμπύλη του B υπάρχει επιφάνεια του B, ώστε η καμπύλη αυτή, να είναι το "σύνορό" της.



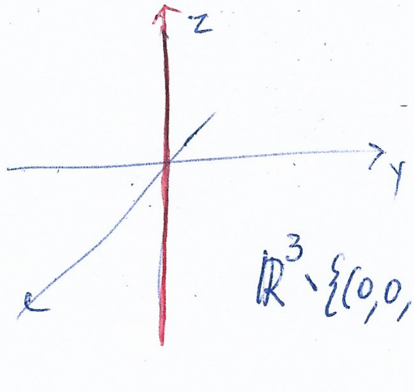


Το σύνολο μεταξύ των Σφαιρών

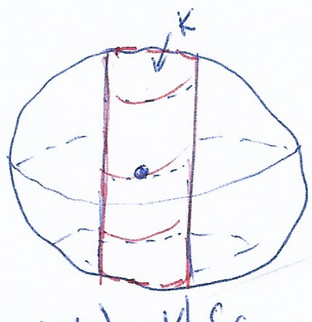


$\mathbb{R}^3 \setminus \{(x_i, y_i, z_i) : i = 1, 2, \ldots, k\}$

Απλά Συνεκτικά



$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$



$\left(B((0,0,0),1) \setminus K\right) = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1$ και $x^2+y^2 \geq \frac{1}{4}\}$

<u>ΟΧΙ</u> Απλά Συνεκτικά

Torus

* * *

Θεώρημα

α) Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ απλά συνεκτικό σύνολο (πχ Κυρτό, Σύνολο Green)

και $\vec{F} = (P,Q): D \to \mathbb{R}^2$, C^1

Εαν το $\vec{F}$ είναι Αστρόβιλο ($\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ στο D), τότε

είναι Συντηρητικό.

β) Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^3$ απλά συνεκτικό σύνολο και $\vec{F} = (P,Q,R): D \to \mathbb{R}^3$, ($C^1$)

Εαν το $\vec{F}$ είναι Αστρόβιλο ($\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$)

τότε είναι Συντηρητικό.

($\vec{F}$ = συντηρητικό $\Rightarrow \vec{F}$ = αστρόβιλο, ισχύει σε τόπο. ($\vec{F} = C^2$))

Αποδ. α) Από τον ορισμό και το Θ. Green.

β) Έστω Γ απλή, κλειστή καμπύλη του D. Το D

είναι απλά συνεκτικό, άρα υπάρχει επιφάνεια S του B

ώστε $\Gamma = \gamma(S)$. Από το Θ. Stokes

$$0 = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\Gamma = \gamma(S)} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$. Άρα, το $\vec{F}$ είναι Συντηρητικό.

Πόρισμα

α) Έστω $\vec{F} = (P,Q)$, C^1, $\vec{F}: B \to \mathbb{R}^2$, $B = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$

όπου $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, $-\infty \leq \gamma < \delta \leq +\infty$. Έστω $\vec{\alpha} = (x_0, y_0) \in B$

Αν το $\vec{F}$ είναι Αστρόβιλο, τότε είναι Συντηρητικό

και για την $f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt$ ισχύει

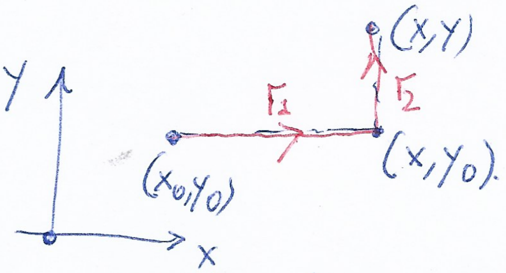
$\nabla f = \vec{F}$

β) Έστω $\vec{F}=(P,Q)$, C^1, $\vec{F}: B \to \mathbb{R}^2$, $B=(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)\times(\varepsilon,\zeta)$
$(x_0,y_0,z_0)\in B$
όπου $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$, $-\infty \le \gamma < \delta \le +\infty$, $-\infty \le \varepsilon < \zeta \le +\infty$.
Αν το $\vec{F}$ είναι Αστρόβιλο, τότε είναι Συντηρητικό

και για την $f(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)\,dt+\int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)\,dy+\int_{z_0}^{z} R(x,y,t)\,dt$

ισχύει $\nabla f=\vec{F}$.

Απόδ. α) Το B είναι Απλά Συνεκτικό $\overset{\text{Θεώρ}}{\Longrightarrow}$ $\vec{F}$ είναι Συντηρητικό.



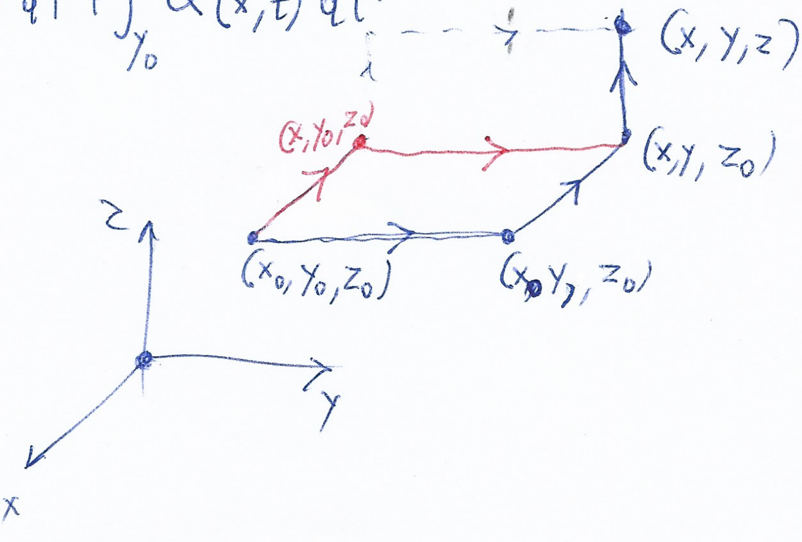
Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ είναι ανεξάρτητο της καμπύλης Γ που ενώνει το (x_0,y_0) με το $(x,y)\in B$.
Θεωρούμε $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ την καμπύλη που ενώνει τα (x_0,y_0), (x,y)

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma_1 \quad \vec{r}_1(t)=(t,y_0),\ t\in[x_0,x],\ \vec{r}_1'(t)=(1,0),\ \vec{F}(\vec{r}_1(t))\cdot\vec{r}_1'(t)=P(t,y_0)\\ \Gamma_2 \quad \vec{r}_2(t)=(x,t),\ t\in[y_0,y],\ \vec{r}_2'(t)=(0,1),\ \vec{F}(\vec{r}_2(t))\cdot\vec{r}_2'(t)=Q(x,t)\end{array}\right\}(*)$$

$$f(x,y)=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{x_0}^{x}\vec{F}(\vec{r}_1(t))\cdot\vec{r}_1'(t)+\int_{y_0}^{y}\vec{F}(\vec{r}_2(t))\cdot\vec{r}_2'(t)\Rightarrow$$

$$f(x,y)\overset{(*)}{=}\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)\,dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)\,dt$$

β) Ανάλογα



G.Green (1793-1841)

Sir G.Stokes (1819-1903)