Μάθημα 10ο: (2/11/2020)

Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης/Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

1) Καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$

Περιγράφεται → $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^2$, I=διάστ.

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

(παραμετρημένη τη "διανύουμε" σε χρονικές στιγμές)

→ $G_f = \{(x,y): y = f(x)\}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Γράφημα (έστω και τοπικά)

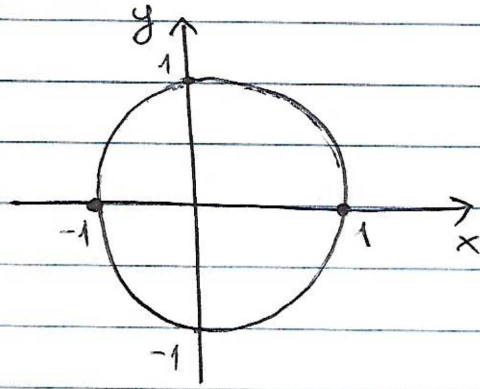
$\vec{r}(x) = (x, f(x))$

→ $\Sigma_0 = \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$, $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Παραδείγματα

α) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1

1) $\Sigma_0 = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1\}$, $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

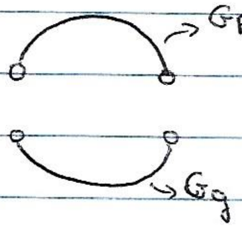


$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0$

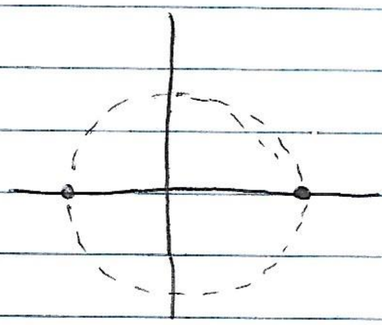
• $x_0 \neq \pm 1$, $y_0 \neq 0$

$y_0 > 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1, +1)$

$y_0 < 0 \Rightarrow g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1, +1)$



• $x_0 = \pm 1$, $y_0 = 0$



$\frac{\partial F}{\partial x}(\pm 1, 0) = 2(\pm 1) \neq 0$

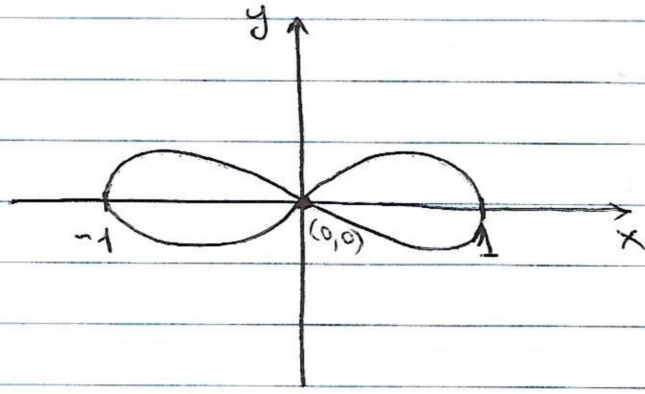
$x = \sqrt{1-y^2}$, $x > 0$ $\quad y \in (-1, +1)$

$x = \sqrt{1-y^2}$, $x < 0$

β) $\Sigma_0 = \{(x,y) : x^4 = x^2 - y^2\}$

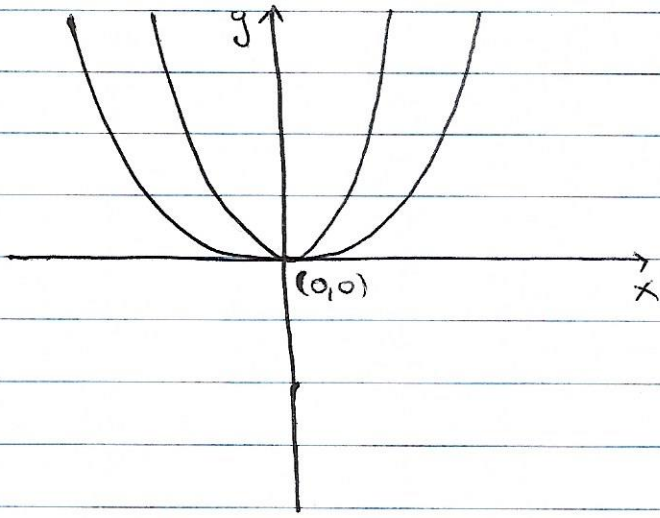
• $F(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$

$$\begin{cases} F(0,0) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) \end{cases}$$



• $F(x,y) = (y - 2x^2)(y - x^2) = 0$

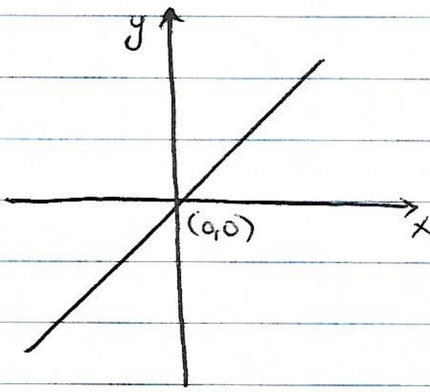
$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$$



γ) $\Sigma_0 = \{(x,y) : x^3 - y^3 = 0\}$

$F(x,y) = x^3 - y^3$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$$



<u>Όμως</u> $\Sigma_0 = \{(x,y) : y = x\}$

• Από τα α), β), γ) παρατηρούμε ότι αν η καμπύλη $\{(x,y) : F(x,y) = 0\}$ $(F = C^1)$ η οποία διέρχεται από κάποιο σημείο (x_0, y_0), $F(x_0,y_0) = 0$ ικανοποιεί την $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$, τότε αυτή είναι το γράφημα κατάλληλης $f : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$, $f(x_0) = y_0$. (C^1-τρόπο)

Αν $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$, <u>δεν</u> έχουμε συμπέρασμα (β, γ)

2) Επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$

→ $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$,
$\vec{r} : I \times J \to \mathbb{R}^3$
$I, J \subseteq \mathbb{R}$ αν. διασ.

→ $G_f = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in A\}$
$f : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$

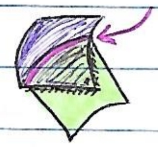
→ $\Sigma_0 = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\}$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

- Ισχύουν ακριβώς ανάλογα αποτελέσματα αν πάρουμε κατάλληλα παραδείγματα (α,β,γ)

3) Καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$

→ $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
$t \in I$

→ Τομή 2 επιφανειών του $\mathbb{R}^3$



ΘΕΩΡΗΜΑ. ΠΕΠΛ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (I+II)/ΠΕΠΛ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (III)

I) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$

i) $F(x_0, y_0) = 0$

ii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Τότε $\exists$ $g : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$, C^1, μοναδική με $g(x_0) = y_0$, $F(x, g(x)) = 0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

δηλ. το σύνολο στάθμης $\Sigma_0 = \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$ είναι τοπικά στο (x_0, y_0) το γράφημα μιας (μοναδικής) g

II) $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, C^1 , $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$

i) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$

ii) $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Τότε $\exists$ $f: B((x_0, y_0), \delta)\ (\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$, C^1
μοναδική με $f(x_0, y_0) = z_0$, $F(x, y, f(x,y)) = 0$
$(x,y) \in B((x_0, y_0), \delta)$

δηλ. το σύνολο Στάθμης $\Sigma_0 = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\}$
είναι τοπικά στο (x_0, y_0, z_0) το γράφημα μιας
μοναδικής f.

III) $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, C^1

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n ; y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n ; y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \\ \quad \vdots \\ F_m(x_1, y_2, \dots, x_n ; y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

$\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{F}(\vec{a} ; \vec{b}) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}_{(\vec{a} ; \vec{b})} \neq 0$$

Τότε $\exists$ $\vec{\varphi}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, C^1 , σε περ. του $\vec{a}$
$\vec{\varphi}(\vec{a}) = \vec{b}$, $\vec{F}(\vec{x}, \vec{\varphi}(\vec{x})) = 0$ σε περ. του $\vec{a}$

Σχόλιο: $m=1$, $n=1$ (I)
$m=1$, $n=2$ (II)
$n=m$ έχουμε ως πόρισμα το Θ. Αντιστρόφου

• Πώς υπολογίζουμε τις παραγώγους των λύσεων στο (I), (II) ;

(I) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x_0, y_0) = 0$, F C^1

$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

$g: (x_0-\delta, x_0+\delta) \to \mathbb{R}$, $g(x_0) = y_0$, C^1

$F(x, g(x)) = 0$, $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ ⊛

Ζητάμε την $g'(x)$, $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$\vec{r}(x) = (x, g(x))$

$\vec{r}'(x) = (1, g'(x))$

$F \circ \vec{r}(x) \overset{⊛}{=} 0$

$(F \circ \vec{r})(x) = 0$

|| καν. Αλυσίδας

$\nabla F(x, g(x)) \cdot (1, g'(x)) = 0$ → $\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) + g'(x)\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) = 0$

$g'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}$, x κοντά στο x_0

άρα $g'(x_0) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$

(II)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = -\dfrac{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}} \\[2em] \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να αποδειχθεί ότι $\exists\, z = f(x, y)$ για (x, y) σε περιοχή του $(1,1)$ με $f(1,1) = 1$, $z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0$. Να υπολογισθεί η $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$

Λύση $F(x,y,z)=z^3+yz-xy^2-x^3$, C^1

i) $F(1,1,1)=0$

ii) $\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)=3+1=4\neq 0$

Άρα $\exists\ f: B((1,1),\delta)\to\mathbb{R}$ με $f(1,1)=1$

$f^3(x,y)+yf(x,y)-xy^2-x^3=0 \qquad (x,y)\in B((1,1),\delta)$

$$3f^2(1,1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)+1\cdot\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}-1^2-\overset{3\cdot 1^2}{3\cdot 1^2}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1.$$

2) $z-x-y-ye^z=0$ ⊛

Να δειχθεί ότι $\exists!\ z=f(x,y)$ σε περιοχή του $(0,0)$ που ικανοποιεί την ⊛ (τοπικά), $f(0,0)=0$.

Να υπολογισθούν: $\nabla f(0,0)$ και η κατεύθυνση $\vec{a}$ ($\|\vec{a}\|=1$) όπου η f έχει την μεγαλύτερη αύξηση στο $(0,0)$.

Λύση

($\nabla f(0,0)=(1,1)$)

3) $z^3+x^2+y^2-z^2-2x+2y+3z=1$ ⊛

Να δειχθεί ότι η ⊛ ορίζει $z=f(x,y)$ σε περιοχή του $(1,-1)$ με $f(1,-1)=1$. Να βρεθεί το $\nabla f(1,-1)$

($\nabla f(1,-1)=(-1,-\frac{1}{2})$)

Κορυφή (II)

μορφή (I)

4**) Να αποδειχθεί ότι $\exists\ y=f(x)$ για $x\in(-\varepsilon,+\varepsilon)$, $f(0)=$
ώστε $x^2\cdot e^{f(x)}+f(x)=2$

Να μελετηθεί η $f:(-\varepsilon,+\varepsilon)\to\mathbb{R}$ ως πρός τα τοπικά Ακρότατα.

Λύση

$F(x,y)=x^2e^y+y-2$

$$\begin{cases} F(0,2)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(0,2)=1\neq 0 \end{cases}$$

Άρα $\exists\ f:(-\varepsilon,+\varepsilon)\to\mathbb{R}$ C^1
$x^2\cdot e^{f(x)}+f(x)=2,\quad x\in(-\varepsilon,+\varepsilon)$

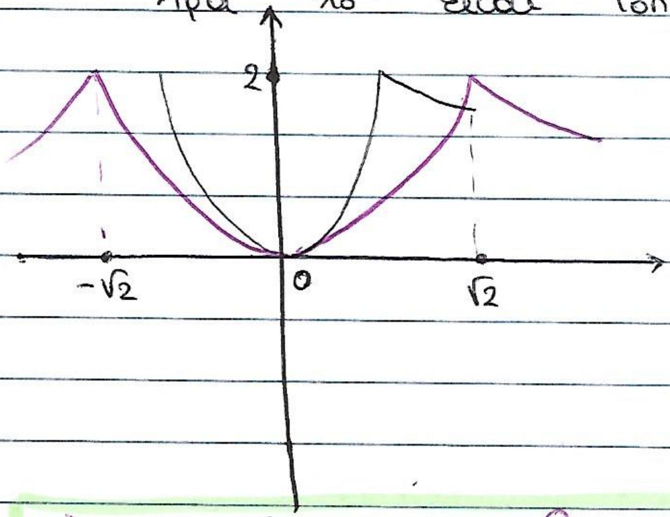
παρ. ως πρός x $\quad f'(x)=-\dfrac{2x\cdot e^{f(x)}}{3-f(x)},\quad x\in(-\varepsilon,+\varepsilon)$
$(f(0)=2,\ 3-f(x)\geq 0)$

κρίσιμο σημείο στο $(-\varepsilon,+\varepsilon)$, $x_0=0$

- $x>0$, η f στο $(0,\varepsilon)$ είναι φθίνουσα
- $x<0$, η f στο $(-\varepsilon,0)$ είναι αύξουσα

(ή υπολογίζουμε $f''(0)=-2e^2<0$)
β' τρόπος

Άρα x_0 είναι Τοπικό Μέγιστο.



Συνάρτηση Lawren

5) $x^2+f^3(x)+e^{f(x)}=0$ (*) Να δειχθεί ότι υπάρχει $f:(-\varepsilon,+\varepsilon)\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί την (*).
Να μελετηθεί η f ως πρός τα τοπικά ακρότατα στο $x\in(-\varepsilon,+\varepsilon)$.
($y^3+e^y=0$ έχει ακριβώς 1 ρίζα y_0 / ψάχνουμε το $(0,y_0)$)

6) $y=f(x),\ f(1)=1$

$x^y+y^x=2$ σε περιοχή του $x_0=1$

Να βρεθεί η εφαπτομένη ευθεία της f.

Λύση

$F(x,y)=x^y+y^x-2$, C^1 , $(x,y>0)$

$\left.\begin{array}{l} F(1,1)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(1,1)=1 \end{array}\right\}$ $\exists$ $x^{f(x)}+f^x(x)=2,\ x\in(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$

$f'(1)=-1$

Επομένως η εφαπτομένη ευθεία της f στο $x_0=1$,

$1+(-1)(x-1)=y$

$\boxed{x+y=2}$

μορφή (III)

7) $\begin{cases} S_1: x^2+\eta\mu y+e^z-e=0 \\ S_2: e^x-y+z-2=0 \end{cases}$ Να δειχθεί ότι η τομή των επιφανειών S_1, S_2, ορίζει καμπύλη $\vec{r}(x)=(x,y(x),z(x))$ που περνά από το $(0,0,1)$.

Να υπολ. το $\vec{r}\,'(0)$

$\vec{F}=(F_1,F_2)$, C^1

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}=1+e\neq 0.$$

Άρα $\exists!$ $f,g:(-\varepsilon,+\varepsilon)\to\mathbb{R}$

με $f(0)=0$, $g(0)=1$,

$F_1(x,f(x),g(x))=0$ / $\vec{r}(x)=(x,f(x),g(x))$

$F_2(x,f(x),g(x))=0$

$$f'(0)=\frac{e}{1+e} \qquad g'(0)=-\frac{1}{1+e}$$

Άρα $\vec{r}\,'(0)=\left(1,\frac{e}{1+e},-\frac{1}{e+1}\right)$