Θεώρημα του Green στο επίπεδο (1828)

(1793– 1841)

Το Πρόβλημα.

· Έχουμε διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$

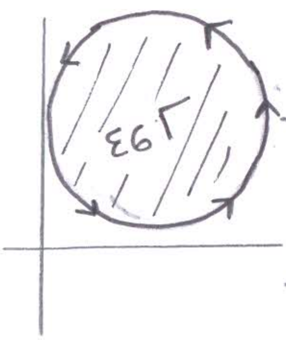
$A(\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, A ανοιχτό.

→ $\vec{F}$ δπ δυνάμεων (Ηλ./Μαγνητ.) ****

$/\vec{F} = C^1$

→ $\vec{F}$ δπ. ταχυτήτων (Ρευστό) ####

Γ, $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[a,b]$, $\vec{r}(t)\in A$

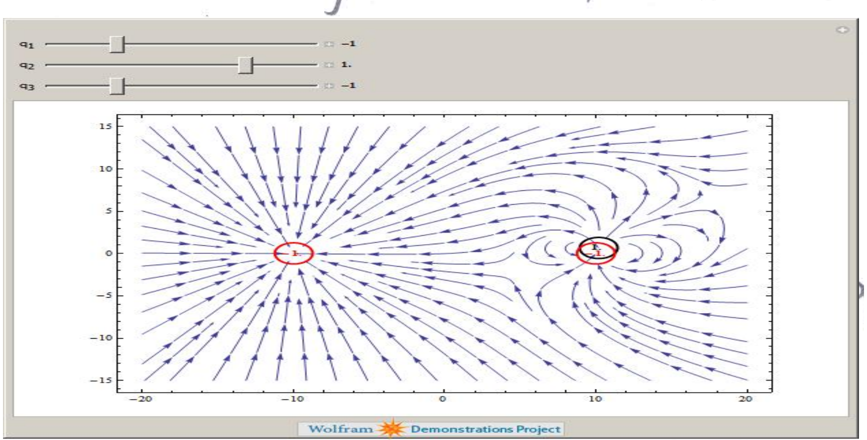


- Κλειστή $\vec{r}(a)=\vec{r}(b)$
- Απλή $\vec{r}(t)\neq\vec{r}(t')$ $t,t'\in(a,b)$, $t\neq t'$
- C^1
- Λεία $\vec{r}\,'(t)\neq\vec{0}$, $t\in[a,b]$

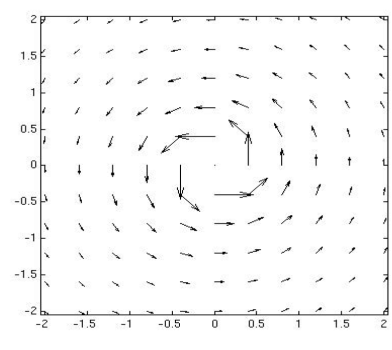
→ $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ έργο της $\vec{F}$ κατά μήκος της Γ (θετικά προσανατολισμένη)

→ $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ροή (ή κυκλοφορία / Flux-Flow-Circulation)

****



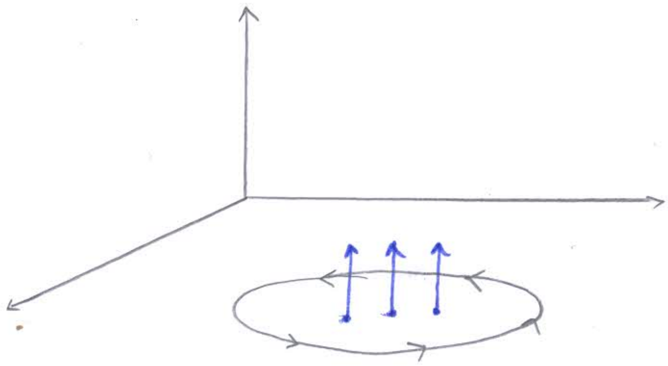
####

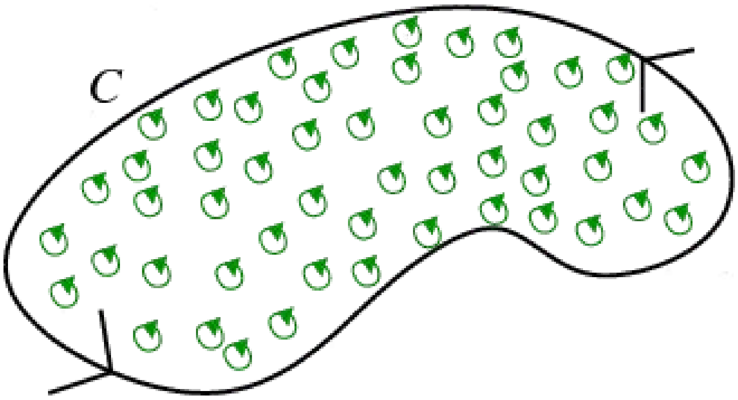


Θέλουμε να υπολογίσουμε $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}$

συναρτήσει του στροβιλισμού της $\vec{F}$, $\operatorname{curl}\vec{F}(x,y) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x,y)} \cdot \vec{k}$

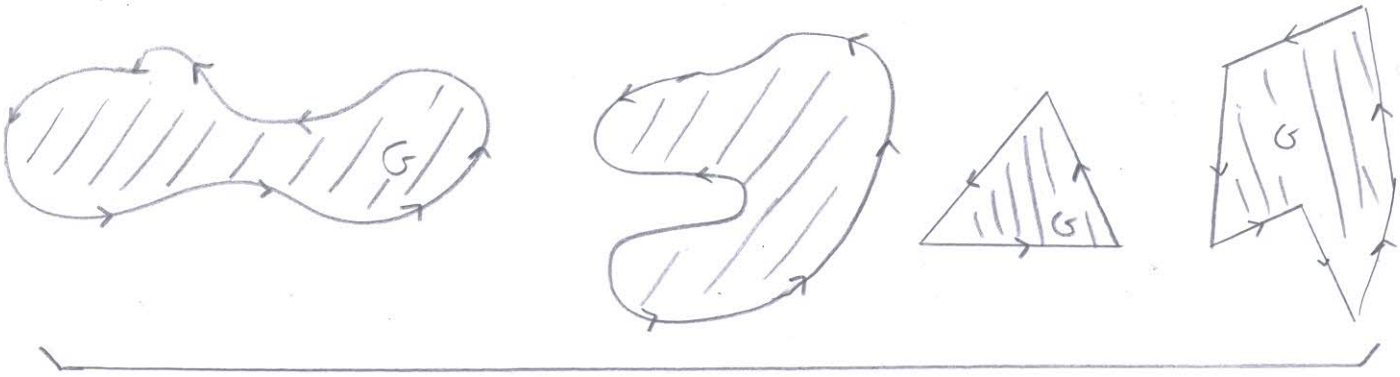
$(\vec{k} = (0,0,1))$





Σύνολο Green

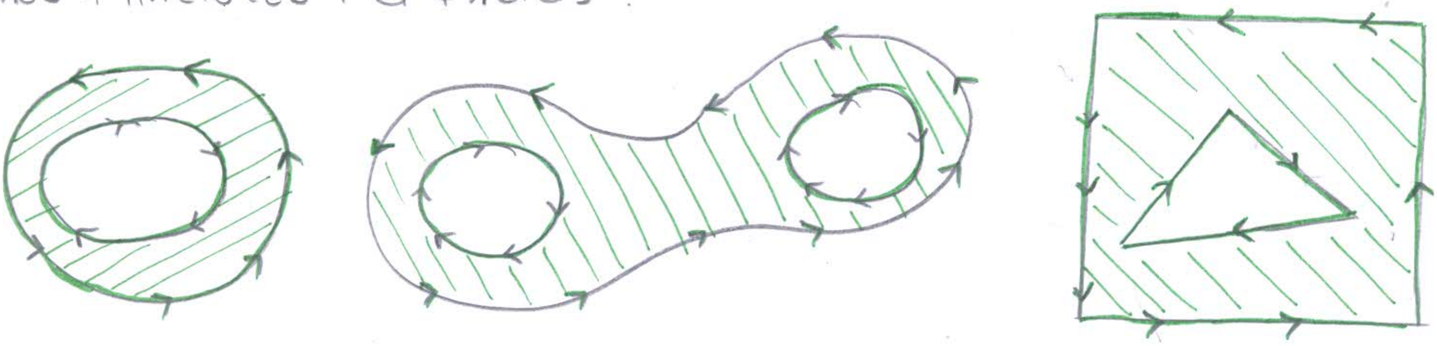
$G \subseteq \mathbb{R}^2$, ∂G = καμπύλη απλή + κλειστή + C^1 + λεία



σύνολα Green

Στοιχειώδη Σύνολα Green

$G \subseteq \mathbb{R}^2$, ∂G 2- ή περισσότερες καμπύλες, όπου όλες είναι απλές + κλειστές + C^1 + λείες.



Ορίζουμε $(\partial G)^+$ όταν κινούμενοι στο σύνορο, το σύνολο είναι στ' αριστερά μας.