Μάθημα 11

3/4/2015

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

I) Μήκος καμπύλης (παραμετρημένης)

Γ $\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha, \beta]$

$\Delta \in \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]},\ \ell(\Pi_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \| \vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}) \|$

$\Delta = \{ \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta \}$

$\ell(\Gamma) = \sup \{ \ell(\Pi_\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]} \} \in (0, +\infty]$

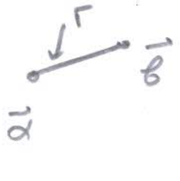
$\vec{r} = C^1,\ \ell(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \| r'(t) \| \, dt \ /\ s(t) = \int_\alpha^t \| r'(\tau) \| \, d\tau$

II) Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα Βαθμωτής / Αριθμητικής Συνάρτησης Πεδίου.

$f : A \, (\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ (πχ. θερμοκρασία, Πίεση, Πυκν. Μάζας)

$\Gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha, \beta],\ \Gamma \subseteq A$.

• $\Gamma,\ [\vec{\alpha}, \vec{\beta}],\ \vec{r}(t) = \vec{\alpha} + t(\vec{\beta} - \vec{\alpha})\quad t \in [0, 1]$

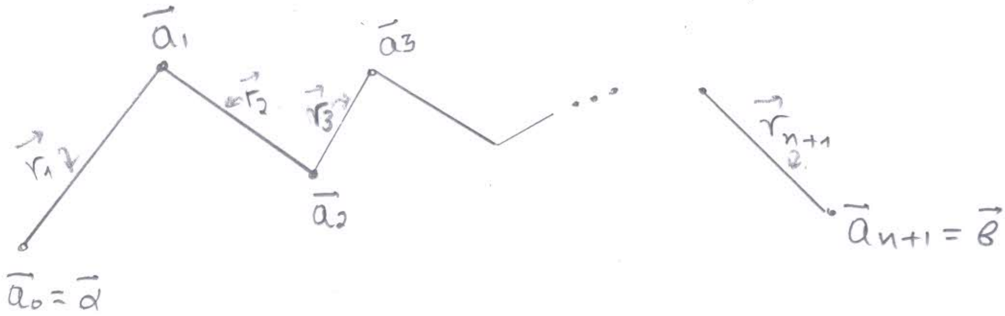


η μάζα της Γ

$\delta(\vec{x}) = c,\ \vec{x} \in \Gamma$ / $m = c \| \vec{\beta} - \vec{\alpha} \|$ (Συνολική μάζα)

$= c \| \vec{r}'(t) \|$

• Π, $[\vec{\alpha}_0 = \vec{\alpha}, \vec{\alpha}_1] \cup [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2] \cup \dots \cup [\vec{\alpha}_n, \vec{\alpha}_{n+1} = \vec{\beta}]$



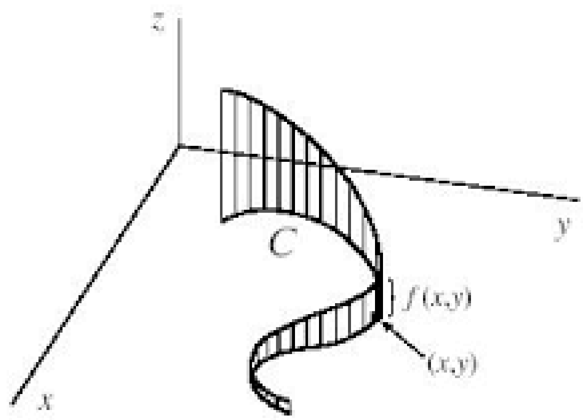
$$m = \sum_{i=1}^{n+1} \delta(\vec{r}_i(t)) \cdot \|\vec{r}_i{}'(t)\| \quad (\text{Συνολική μάζα})$$

$\vec{r}_i$ περ. $[\vec{a}_{i-1}, \vec{a}_i]$

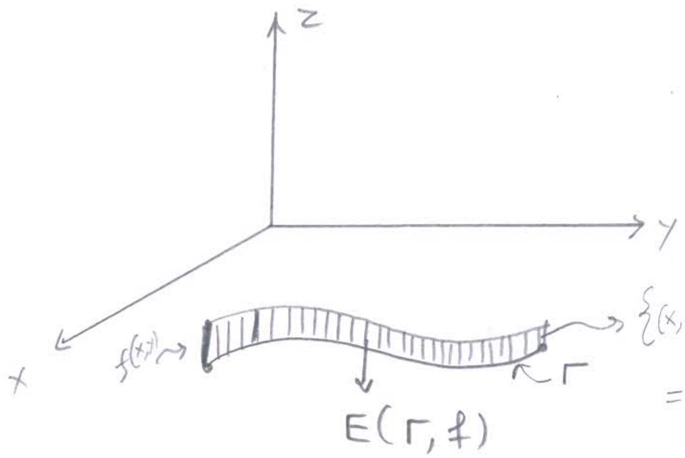
Γ, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, $\vec{r} = C^1$

$$m = \int_\Gamma f\, ds = \int_\alpha^\beta f(\vec{r}(t))\, \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt$$

f = συνεχής



d = 2



$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in\Gamma,\ 0\le z\le f(x,y)\} =$
= Κυλινδρική επιφάνεια.

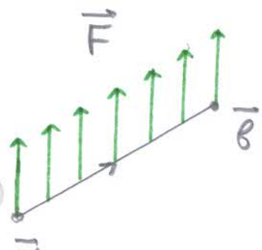
$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2,\ f\ge 0$

$E(\Gamma, f) = \int_\Gamma f\, ds$.

(III) Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα Διανυσματικού Πεδίου.

- $\Gamma,\ [\vec{\alpha},\vec{\beta}]\ ,\ \vec{r}(t) = \vec{\alpha} + t(\vec{\beta}-\vec{\alpha}),\ t\in[0,1]$

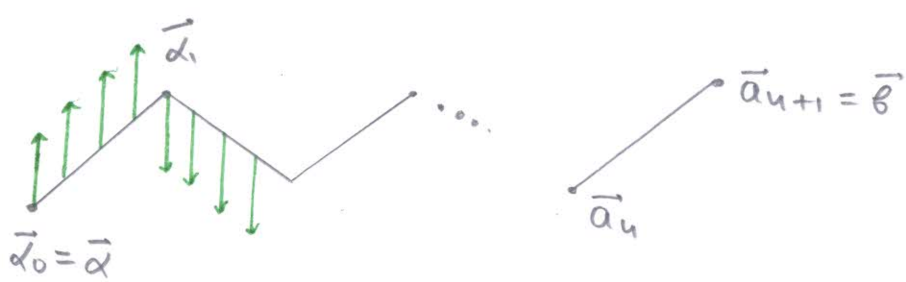
$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{V},\ \vec{x}\in\Gamma$



$W =: \vec{V}\cdot(\vec{\beta}-\vec{\alpha}) = \vec{V}\cdot\vec{r}\,'(t)$

(Είναι το Έργο που παράγεται όταν η δύναμη $\vec{F}$ μετακινεί το σημείο εφαρμογής της στο ευθ. τμήμα $[\vec{\alpha},\vec{\beta}]$)

- Π



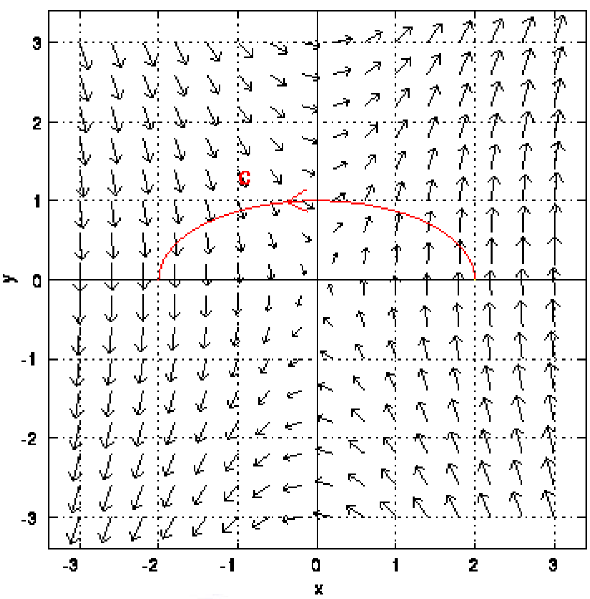
$W = \sum_{i=1}^{n+1} \vec{F}(\vec{r}_i(t))\cdot\vec{r}_i\,'(t)\ ,\quad \vec{r}_i \longleftrightarrow [\vec{\alpha}_{i-1},\vec{\alpha}_i]$

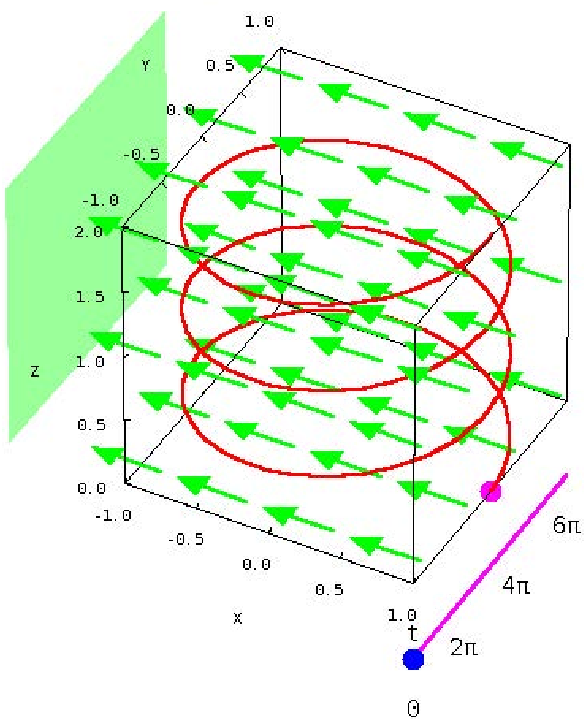
$\vec F$ συνεχής συνάρτηση

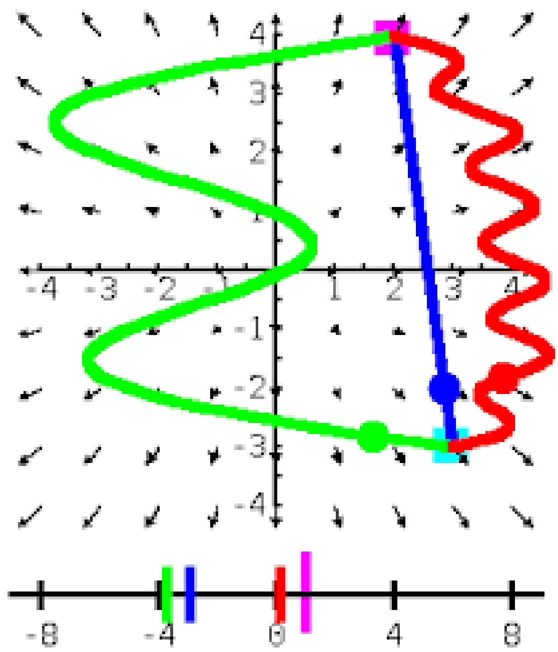
Γ $\vec r = \vec r(t)$, $t \in [a, b]$ $\underline{C^1}$

$$W = \int_\Gamma \vec F \cdot d\vec r = \int_a^b \vec F(\vec r(t)) \cdot \vec r\,'(t)\, dt$$

(Είναι το έργο που παράγεται όταν η δύναμη $\vec F$ μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος της καμπύλης Γ)







Βλέπε Συμπληρωματικό Υλικό

Συμβολισμοί

$d=2 \quad \vec{r}(t)=(x(t),y(t))$ | $\vec{F}=(P,Q,R)$

$\vec{F}=(P,Q)$

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy$$

$d=3$ Ανάλογα $\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz$

Σημειώσεις Για $f=1$, $\int_\Gamma 1\,ds=\ell(\Gamma)$

Παρατηρήσεις - Ασκήσεις

$\vec{F}: A(\subseteq \mathbb{R}^d)\longrightarrow \mathbb{R}^d$ συνεχής

$\Gamma\subseteq A$, $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, $\vec{r}=C^1$

1) Αν $\vec{F}(\vec{r}(t))\perp r'(t)$ $\forall t\in[\alpha,\beta]$, $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$

2) $\Gamma=$λεία, $\vec{r}'(t)\neq\vec{0}$, $t\in[\alpha,\beta]$

$\vec{F}(\vec{r}(t))=\lambda(t)\,\vec{r}'(t)$, $\lambda(t)\geq 0$

Τότε $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt=$

$=\int_\alpha^\beta (\lambda(t))\cdot(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt=$

$=\int_\alpha^\beta (\lambda(t)\cdot\|\vec{r}'(t)\|)\cdot dt=\int_\Gamma \|\vec{F}(\vec{r}(t))\|\,ds$

Ιδιαιτέρως $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{\|r'(t)\|}$

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Άρα: ∃M τ.ω:

3) $\vec{F}$ συνεχής $\|\vec{F}(\vec{r}(t))\| \le M$, $t\in[\alpha,\beta]$

Τότε $\left|\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}\right| \le M\,\ell(\Gamma)$

$$\left|\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}\right| = \left|\int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |\vec{F}(\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)|\,dt$$

$$\overset{C-S}{\le} \int_\alpha^\beta \|\vec{F}(\vec{r}(t)\|\cdot\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt \le M\int_\alpha^\beta \|r'(t)\|\,dt = M\,\ell(\Gamma)$$

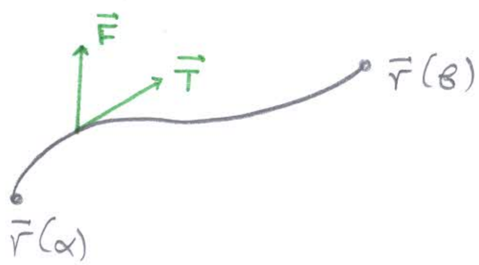
Σχέση Επικ. Ολοκληρωμάτων για Λείες Καμπύλες.

Γ, $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, $\vec{r}=C^1$

$\vec{r}(t)\ne\vec{0}$, $\vec{F}: A(\subseteq\mathbb{R}^d)\longrightarrow\mathbb{R}^d$, $\Gamma\subseteq A$

$$\int\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta\left(\vec{F}(\vec{r}(t))\,\frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}\right)\|\vec{r}(t)\|\,dt$$

$$= \int_\Gamma(\vec{F}\cdot\vec{T})\,ds,\quad \vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$



Ανεξαρτησία Επ. Ολοκληρωμάτων από την παραμέτρηση της καμπύλης ολοκλήρωσης

Γ, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{r} = C^1$, $t \in [\alpha, \beta]$

$\varphi : [\gamma, \delta] \to [\alpha, \beta]$, $\varphi = C^1$, γν. μονότονη και επί

$\vec{\sigma} = \vec{r} \circ \varphi$, Αναπαραμέτρηση της Γ

Πρόταση

1) $f : \Gamma (\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f =$ συνεχής

Γ, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{\sigma} =$ αναπαραμέτρηση ($r = C^1$)

Τότε $\displaystyle\int_{\Gamma(\vec{r})} f\, ds = \int_{\Gamma(\vec{\sigma})} f\, d\sigma$, $\dfrac{d\sigma}{du} = \| \sigma'(u) \|$

Ιδιαιτέρως, $\ell(\Gamma(\vec{r})) = \ell(\Gamma(\vec{\sigma}))$

Δηλαδή, το μήκος της καμπύλης είναι ανεξάρτητο της παραμέτρησης

2) $\vec{F} : A (\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\vec{F} =$ συνεχής

Γ: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{\sigma}$ αναπαρ. της Γ

$$\int_{\Gamma(\vec{r})} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma(\vec{\sigma})} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}, & \varphi \uparrow \\ \displaystyle -\int_{\Gamma(\vec{\sigma})} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}, & \varphi \downarrow \end{cases}$$

Απόδειξη

1) $\int_{\Gamma(\vec{\sigma})} f(\vec{\sigma}(u))\,\|\vec{\sigma}'(u)\|\,du = \int_{\gamma}^{\delta} f(\vec{r}(\varphi(u))\,\|\vec{r}'(\varphi(u))\|\,|\varphi'(u)|\,du$

$I = \int_{\gamma}^{\delta} (f\circ\vec{r})(\varphi(u))\,\|\vec{r}'(\varphi(u))\|\,\varphi'(u)\,du \overset{t=\varphi(u)}{=\!=} \int_{\alpha}^{\beta} f(\vec{r}(t))\,\|r'(t)\|\,dt$

$\varphi \uparrow \ (\varphi' \geq 0)$

$\varphi \downarrow \ (\varphi' \leq 0)$

$I = \int_{\gamma}^{\delta} (f\circ\vec{r})(\varphi(u))\cdot\|\vec{r}'(\varphi(u))\|\,(-\varphi'(u))\,du \overset{t=\varphi(u)}{=\!=} -\int_{\beta}^{\alpha} f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}'(t)\|\,dt$

$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}'(t)\|\,dt$

$\int_{\Gamma(\vec{\sigma})} f\,d\sigma = \int_{\Gamma(\vec{r})} f\,ds$

---

2) $\int_{\Gamma(\vec{\sigma})} \vec{F}\cdot d\vec{\sigma} = \int_{\gamma}^{\delta} \left[\vec{F}(\vec{r}(\varphi(u))\cdot\vec{r}'(\varphi(u))\right]\varphi'(u)\,du \overset{t=\varphi(u)}{=\!=}$

$\varphi \uparrow \quad J = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot r'(t)\,dt$

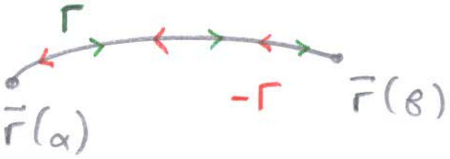
$\varphi \downarrow \quad J = -\int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt$

Πόρισμα (Αντίθετη Καμπύλη)

$\vec{F}, \vec{r} \,/\, \Gamma$

$\vec{\sigma}(u) = \vec{r}(\alpha + \beta - u), \; u \in [\alpha, \beta]$

$-\Gamma$ αντίθετη της Γ



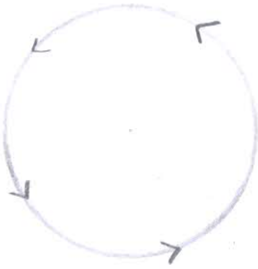
$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{-\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ορισμοί

$\Gamma, \; \vec{r} = \vec{r}(t), \; t \in [\alpha, \beta]$

1) Κλειστή Καμπύλη $\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$

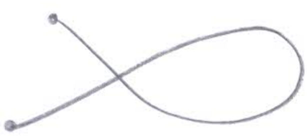
πχ



$\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$

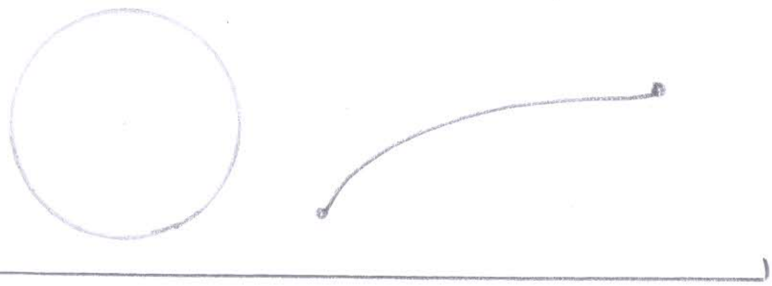
κλειστές καμπύλες

$\vec{r}(\alpha) \neq \vec{r}(\beta)$

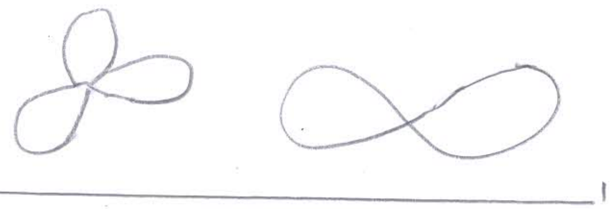


όχι κλειστές καμπύλες

2) Γ απλή $\Longleftrightarrow$ $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$ $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$



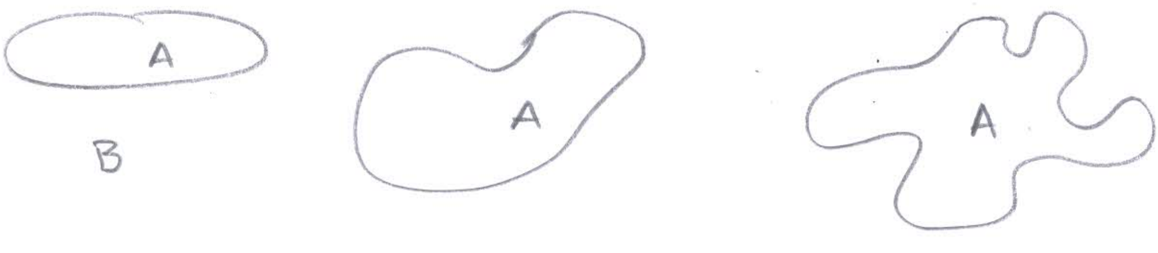
απλές καμπύλες



όχι απλές καμπύλες

3) $\mathbb{R}^2$

Γ κλειστή + απλή , Καμπύλη του Jordan



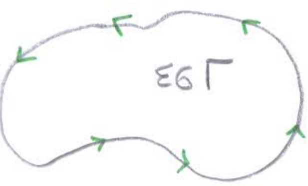
Θεώρημα Jordan

$\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma = A \cup B$

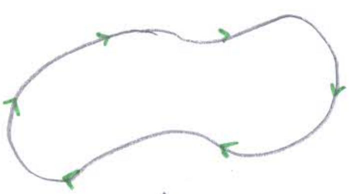
A = φραγμένο , B = μη φραγμ.

A καλείται εσΓ

B » εξΓ



Γ^+



Γ^- $\int_{\Gamma^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\Gamma^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

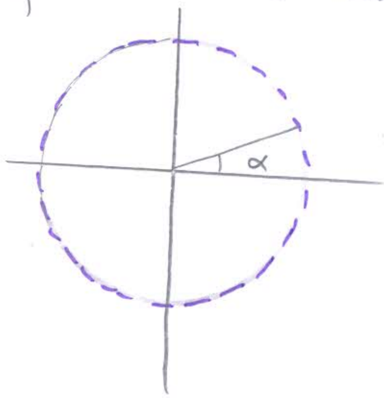
$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ασκήσεις

(I) Μήκος καμπύλης (C^1)

1) Να ευρεθεί το μήκος της καμπύλης Γ, $x^2+y^2=a^2$
$\vec{r}(t)=(a\,\text{συν}\,t, a\,\text{ημ}\,t)$, $t\in[0,2\pi]$

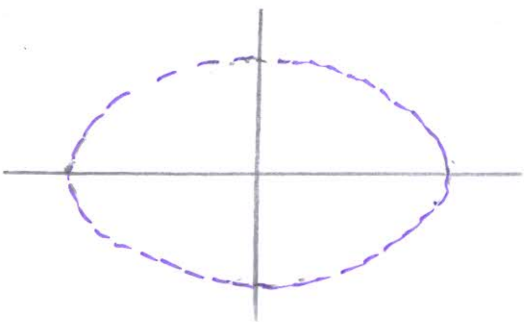
Λύση $\vec{r}'(t)=(-a\,\text{ημ}\,t, a\,\text{συν}\,t)$, $t\in[0,2\pi]$



$$\ell(\Gamma)=\int_0^{2\pi}\|\vec{r}'(t)\|\,dt=2\pi a$$

2) Γ $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$

$(a>b>0)$, $\vec{r}(t)=(a\,\text{συν}\,t, b\,\text{ημ}\,t)$, $t\in[0,2\pi]$



$$\|\vec{r}'(t)\|=\sqrt{a^2\text{ημ}^2t+b^2\text{συν}^2t}$$

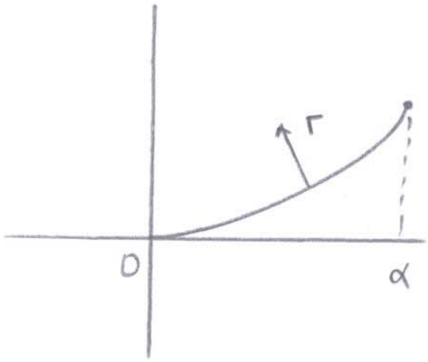
$\int_0^{2\pi}\|r'(t)\|\,dt$ ανάγεται σε πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα

$\int\sqrt{1-k^2\text{συν}^2t}\,dt$, $(0<k<1)$

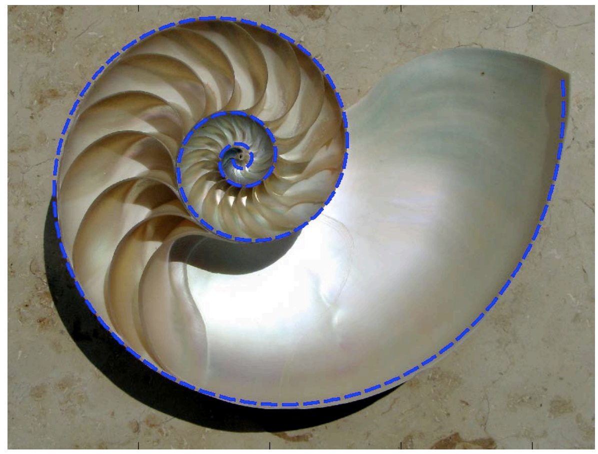
$$\ell(\Gamma)=\pi(a+b)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2n}$$

3) $\ell(\Gamma)$ Γ γράφημα της $y=\frac{x^2}{2}$, $x\in[0,\alpha]$, $\alpha>0$

Λύση $\vec{r}(x)=\left(x,\frac{x^2}{2}\right)$, $\vec{r}\,'(x)=(1,x)$ $\|\vec{r}\,'(x)\|=\sqrt{1+x^2}$



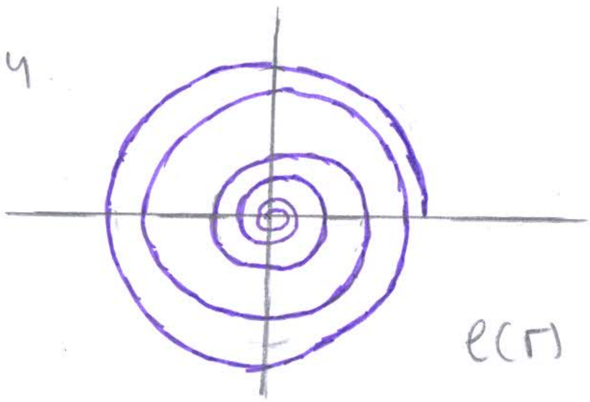
$$\ell(\Gamma)=\int_0^\alpha \sqrt{1+x^2}\,dx \overset{\text{Απ II}}{=} \frac{1}{2}\left(\alpha\sqrt{\alpha^2+1}+\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right.$$



4) Γ, $r=e^{-\theta}$ $\theta\in[\gamma,+\infty)$

$\vec{r}(\theta)=(e^{-\theta}\text{συν}\theta,\ e^{-\theta}\text{ημ}\theta)$

Λύση



$(\theta=-\log r,\ r>0)$

$\|\vec{r}\,'(\theta)\|=\sqrt{2}\,e^{-\theta}$

$$\ell(\Gamma)=\int_\gamma^{+\infty}\sqrt{2}\,e^{-\theta}d\theta=\sqrt{2}\left(-e^{-\theta}\right)\Big|_{\theta=\gamma}^{+\infty}$$

$$=\sqrt{2}\,e^{-\gamma}$$

Σημείωση: Γενικότερα, $r=ac^\theta$ $(ac>0,\ c\neq 1)$ είναι η γενική εξίσωση λογαριθμικής έλικας

Τότε, $\theta=\dfrac{\ln\left(\frac{r}{a}\right)}{\ln c}$

Εάν θ_0 είναι η γωνία μεταξύ $\vec{r}(\theta)$ και $\vec{r}\,'(\theta)$, τότε $\text{εφ}\theta_0=\dfrac{1}{\ln c}$ δηλαδή είναι σταθερή $\forall\theta$.

Στην Ασκ. 4 $c=e^{-1}$, άρα $\theta_0=\frac{3\pi}{4}$

Χρυσή Σπείρα: Για $c=\varphi^{\frac{1}{\pi/2}}$ όπου φ ο λόγος της χρυσής τομής, τότε $r=a\,e^{\left(\frac{\ln\varphi}{\pi/2}\right)\theta}$ και καλείται Χρυσή Σπείρα. Προσεγγίζεται «καλά» με τη Σπείρα Fibonacci.

(II) Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα Βαθμωτού Πεδίου.

1) Γ σύρμα, $\vec{r}(t) = (\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t, t)$, $t \in [0, \pi]$

$\delta(x,y,z) = e^{z}$, $(x,y,z) \in \Gamma$

$m = \int_\Gamma \delta\, ds$, οι ροπές $M_{yz} = \int_\Gamma x\delta\, ds$

$M_{xy} = \int_\Gamma z\delta\, ds$, $M_{xz} = \int_\Gamma y\delta\, ds$

Κέντρο Βάρους $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) := \frac{1}{m}(M_{yz}, M_{xz}, M_{xy})$

Λύση $m = \int_0^\pi e^t \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}(e^\pi - 1)$

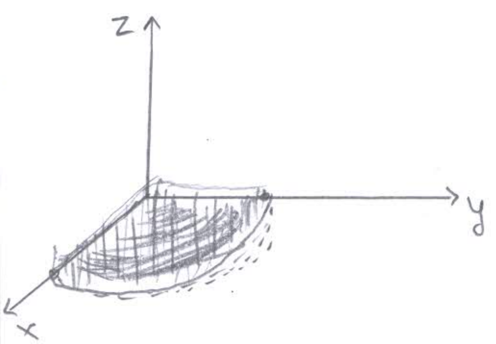
$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{2}$

$M_{yz} = \int_0^\pi \eta\mu t \cdot e^t \sqrt{2}\, dt = \frac{e^\pi + 1}{\sqrt{2}}$

$M_{xy} = (e^\pi(\pi - 1) + 1)\sqrt{2}$

$M_{xz} = -\frac{e^\pi + 1}{\sqrt{2}}$

2) Κυλινδρική Επιφάνεια με βάση $x^2 + y^2 = 1$, $x, y \geq 0$ και ύψος $f(x,y) = xy$ / Εμβαδόν?



Λύση $E = \int_\Gamma f\, ds$

$\vec{r}(t) = (\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t)$

$t \in [0, \pi/2]$

$= \int_0^{\pi/2} (\eta\mu t \cdot \sigma\upsilon\nu t)\, \|\vec{r}'(t)\|\, dt = \int_0^{\pi/2} \eta\mu t\, \sigma\upsilon\nu t\, dt$

$= \frac{1}{2}$

III Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα Διανυσματικού Πεδίου

1) $W=\int_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$\vec{F}(x,y,z)=(\text{ημ}z,\ \text{συν}z,\ \sqrt[3]{xy})$

$\Gamma,\ \vec{r}(t)=(\text{συν}^3t,\ \text{ημ}^3t,\ t)\ ,\ t\in[0,\frac{3\pi}{2}]$

Λύση $W=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt=$

$=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(\text{ημ}t,\ \text{συν}t,\ \text{ημ}t\cdot\text{συν}t)\cdot(3\text{συν}^2t\,\text{ημ}t,\ 3\text{ημ}^2t\,\text{συν}t,\ 1)\,dt$

$=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\text{ημ}t\,\text{συν}t\,dt=\frac{1}{2}$.

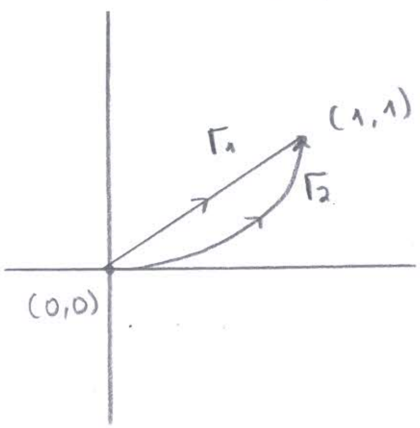
2) $W_i=\int_{\Gamma_i}\vec{F}\cdot d\vec{r}\ ,\ \vec{F}(x,y)=(y,-x)$

$\Gamma_1:\ [(0,0),(1,1)]$

$\Gamma_2:\ \vec{r}_2(t)=(t,t^2)\ ;\ t\in[0,1]$

$\Gamma_3:\ \vec{r}(t)=(\text{συν}t,\ \text{ημ}t)\ ,\ t\in[0,2\pi]$

Τι Παρατηρείτε;



$\Gamma_1,\ \vec{r}(t)=(t,t),\ t\in[0,1]$

$W_1=\int_0^1(t,-t)\cdot(1,1)\,dt=\int_0^1(t-t)\,dt=0$

$W_2=\int_0^1(t^2,-t)\cdot(1,2t)\,dt=\int_0^1(t^2-2t^2)\,dt=-\frac{1}{3}$

$W_3=\int_0^{2\pi}(\text{ημ}t,-\text{συν}t)\cdot(-\text{ημ}t,\text{συν}t)\,dt=-2\pi$ //

3) $\vec{F}(x,y) = (2xy,\ x^2+3y^2)$. Να υπολογιστούν τα W_i της $\vec{F}$ για τις καμπύλες της άσκ. 2.
W_i
Τι Παρατηρείτε;

Λύση $\vec{r}(t) = (t,t)$

$$W_1 = \int_0^1 (2t^2,\ t^2+3t^2)\cdot(1,1)\,dt = \int_0^1 6t^2\,dt = 2$$

$$W_2 = \int_0^1 (2t\cdot t^2,\ t^2+3t^4)\cdot(1,2t)\,dt = \int_0^1 (2t^3+2t^3+6t^5)\,dt$$

$$= \int_0^1 (4t^3+6t^5)\,dt = t^4\Big|_0^1 + t^6\Big|_0^1 = 2$$

$W_3 = 0$

$\vec{F}_2 = (y, -x)$

$\vec{F}_3 = (2yx,\ x^2+3y^2)$

$f(x,y) = x^2y + y^3$
$\nabla f = \vec{F}_3$ /
Άρα το $\vec{F}_3$ είναι Πεδίο Κλίσεων / Συντηρητικό

$\vec{F}_2$: $P = y$, $Q = -x$ | $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1 \neq 1 = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ Άρα $\vec{F}_2$ έχει στροβιλισμό $\neq \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{F}_2$ δεν είναι συντηρητικό.

Θεώρημα

Έστω $\vec{F} : A\ (\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$\vec{F} = C^2$ / $\vec{F} = \nabla f$ (Πεδίο Κλίσεων / Συντηρητικό)

Γ, $\vec{r} : [\alpha, \beta] \to A$, $\vec{r} = C^1$

Τότε $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(\beta)) - f(\vec{r}(\alpha))$

Ιδιαιτέρως Εάν Γ = κλειστή, $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

Απόδειξη

$$g = f \circ \vec{r} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} \;,\; g = C^1$$

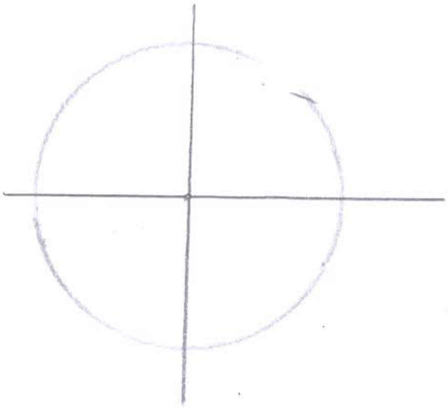
$$g' = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) \;,\; t \in [\alpha, \beta]$$

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta g'(t)\,dt \overset{\Theta.\Theta.\mathrm{A}.\Pi}{=\!=} g(\beta) - g(\alpha)$$

$$= f(\vec{r}(\beta)) - f(\vec{r}(\alpha))$$

Πόρισμα Το αστρόβιλο, C^∞ Δ.Π $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{-x}{x^2+y^2} \right)$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ δεν είναι συντηρητικό / π. κλίσεων.

Απόδειξη $\vec{r}(t) = (\alpha\text{συν}t, \alpha\text{ημ}t)$, $t \in [0, 2\pi]$



Εάν $\exists f: \vec{F} = \nabla f$, θα πρέπει $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\alpha\text{ημ}t}{\alpha^2}, \frac{-\alpha\text{συν}t}{\alpha^2} \right) \cdot (-\alpha\text{ημ}t, \alpha\text{συν}t)\,dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} 1\,dt = -2\pi \neq 0$$ Άρα δεν είναι συντηρητικό από το προηγούμενο θεώρημα

Ασκήσεις

1) $\vec{F}(x,y) = (y - x^2, x + y^2)$ $W = \int_\Gamma \vec{F} \cdot dr$, $\Gamma: \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = 1$

$(\alpha, \beta > 0)$.

Λύση $f(x,y) = xy - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3$

(Ασκ $\underline{5}$) $\vec{F} = \nabla f$ Άρα $W = 0$

2) Να υπολογιστεί το $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + (x + e^z)\vec{j} + y e^z \vec{k}$

Γ, $\vec{r}(t) = (t, \text{τοξεφ}t, \text{ημ}(t^3 + \frac{\pi}{2}))$, $t \in [0, 1]$

Λύση $f(x,y,z) = xy + ye^z$, $\nabla f = \vec{F}$

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} e^{\text{ημ}(1 + \frac{\pi}{2})}$$

<u>Ευχαριστίες</u>

Στις χειρόγραφες Σημειώσεις, στις Ενδεικτικές Λύσεις, στα Σχήματα και στην Ηλεκτρονική Επεξεργασία του <u>Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ</u> (*μαθήματα 01-11*) συνεργάστηκαν

1) Η *Π.Ζ.,* με τις προσωπικές σημειώσεις και την βοήθεια στην ενσωμάτωση των σχημάτων στις παραδόσεις του μαθήματος,
2) Η *Ε.Λ.* με τις Ενδεικτικές Λύσεις των φυλλαδίων των ασκήσεων, ανά ενότητα της ύλης,
3) Οι πρώην φοιτητές
   Ναβίτ Κωνσταντίνου (2004, α΄έτος τμ. Φυσικής, 2015 διδάκτωρ ΕΚΠΑ) με παροχή της εργασίας του (2004) και την δημιουργία σχημάτων (2015) των Ασκ.4 (Διαφόριση),
   Γ.Παπαγεωργίου (ΠΜΣ τμ.Μαθηματικών, υποψήφιος διδάκτωρ τμ. Πληροφορικής) με την δημιουργία σχημάτων (2015) των Ασκ.3 (Όρια-Συνέχεια),
   Β.Αγγελόπουλος και Α.Μακρής (τμ. Πληροφορικής) για την παροχή εργασιών παρελθόντων ετών.

4) Η επεξεργασία, η επιμέλεια και η δημοσιοποίηση του υλικού έγινε από τους εθελοντές του Εργαστηρίου μας, *Ν.Χ.,Ν.Κ, Σ.Κ.* που πρόθυμοι και υπομονετικοί έχουν αναλάβει μαζί με άλλους, την ηλ.τάξη <u>Σημειώσεις μαθημάτων από φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών. Πανεπιστημιακό έτος 2014-15</u> (MATH432)

Οι ευχαριστίες όλων μας και η αναγνώριση του έργου τους είναι μια απλή ηθική ανταμοιβή.

Λ.Ε-Δ.