Ασκησεις 6

(1) Εστω η καμπυλη $x^{2/3}+y^{2/3}=1$. Να υπολογιστει το μηκος της.

$x^{2/3}+y^{2/3}=1 \Leftrightarrow (x^{1/3})^2+(y^{1/3})^2=1$

Θετουμε $\vec{r}(t)=(\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t\in[0,2\pi)$

τοτε $(\cos^3 t)^{2/3}+(\sin^3 t)^{2/3}=$

$\cos^2 t+\sin^2 t=1$

$\vec{r}'(t)=(-3\cos^2 t\sin t, 3\sin^2 t\cos t)$, $t\in[0,2\pi)$

$\|\vec{r}'(t)\|^2=9\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)$

$=\dfrac{9\sin^2 2t}{4}$

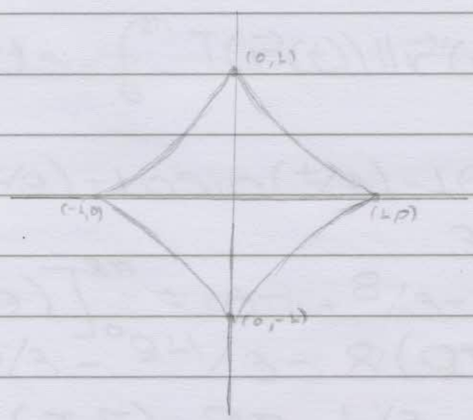
$\|\vec{r}'(t)\|=\dfrac{3}{2}|\sin 2t|$

Τοτε $\ell(\Gamma)=\int_0^{2\pi}\|\vec{r}'(t)\|dt=$

$4\int_0^{\pi/2}\|\vec{r}'(t)\|dt=4\int_0^{\pi/2}\dfrac{3}{2}|\sin 2t|dt$

$=6\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt=6\left[-\dfrac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\pi/2}=$

$6(1/2+1/2)=6.$



(2) Έστω Γ το γράφημα της $f(x)=(e^x+e^{-x})/2$, $x\in[0,2]$. Να υπολογιστεί το μήκος της Γ.

Θέτουμε $\vec{r}(t)=\left(t,(e^t+e^{-t})/2\right)$, $t\in[0,2]$

$\vec{r}\,'(t)=\left(1,(e^t-e^{-t})/2\right)$, $t\in[0,2]$

$$\|\vec{r}\,'(t)\|=\sqrt{1+\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}}=$$

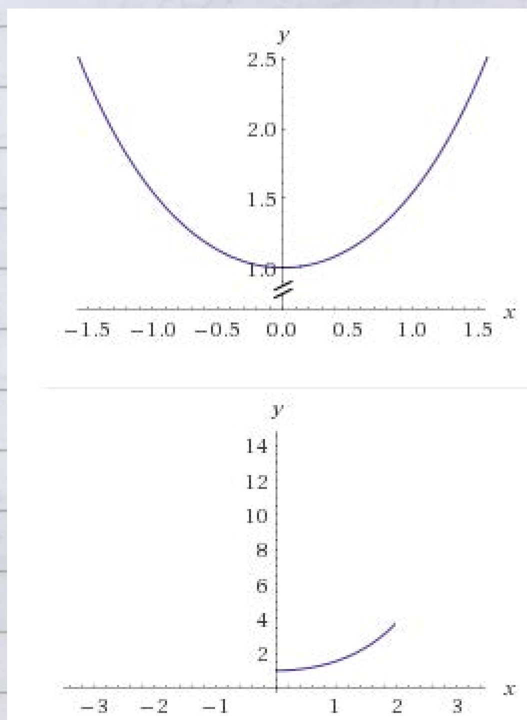
$$\sqrt{\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}}=\sqrt{\frac{(e^t+e^{-t})^2}{2^2}}=$$

$(e^t+e^{-t})/2$

Τότε $\ell(\Gamma)=\int_0^2\|\vec{r}\,'(t)\|dt=$

$$\int_0^2(e^t+e^{-t})/2\,dt=\frac{1}{2}\left[e^t-e^{-t}\right]_0^2=$$

$\frac{1}{2}(e^2-e^{-2})$.



(3) Έστω η καμπύλη Γ, $\vec{r}(t)=(t-\sin t, 2, \cos t)$ $t\in[0,2\pi]$ που είναι αγωγός θερμότητας, με θερμοκρασία $T(x,y,z)=xy+z$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Να υπολογισθεί η μέση θερμοκρασία του Γ, $\mu(T,\Gamma)=: \frac{1}{\ell(\Gamma)}\int_\Gamma T\,ds$.

$\vec{r}'(t)=(1-\cos t, 0, -\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$

$\|\vec{r}'(t)\|=\sqrt{2-2\cos t}=$

$\sqrt{4\frac{(1-\cos t)}{2}}=\sqrt{4\sin^2(t/2)}=2\sin(t/2)$, $t\in[0,2\pi]$

Τότε $\ell(\Gamma)=\int_0^{2\pi}\|\vec{r}'(t)\|\,dt=\int_0^{2\pi}2\sin(t/2)\,dt=$

$\left[-4\cos(t/2)\right]_0^{2\pi}=4+4=8.$

$T(\vec{r}(t))=2t-2\sin t+\cos t=2t-4\sin(t/2)\cdot\cos(t/2)+$
$2\cos^2(t/2)-1$

Τότε $T(\vec{r}(t))\cdot\|\vec{r}'(t)\|=4t\sin(t/2)-8\sin^2(t/2)\cdot\cos(t/2)$
$+4\cos^2(t/2)\cdot\sin(t/2)-\sin(t/2)=$
$-8\left(-\frac{t}{2}\sin(t/2)+\cos(t/2)\right)+8\cos(t/2)$

$-8\sin^2(t/2)\cos(t/2)+4\cos^2(t/2)\cdot\sin(t/2)-2\sin(t/2)$

Άρα $\int_\Gamma T\,ds=\int_0^{2\pi}T(\vec{r}(t))\cdot\|\vec{r}'(t)\|\,dt=$

$\Big[-8t\cos(t/2)+16\sin(t/2)-\frac{16}{3}\sin^3(t/2)-\frac{8}{3}\cos^3(t/2)$
$+4\cos(t/2)\Big]_0^{2\pi}=16\pi+8/3-4-(-8/3+4)=$
$16\pi+16/3-24/3=8(2\pi-1/3).$

Άρα $\mu(T,\Gamma)=2\pi-1/3.$

(4) Να υπολογίσετε το $W=\int_{\Gamma} xy\,dx + (x+y)\,dy + \cos z\,dz$, όπου $\Gamma: \vec{r}(t)=(e^t, \sin t, t^3)$, $t\in[0,\pi]$

Θεωρούμε $\vec{F}(x,y,z)=(xy,\ x+y,\ \cos z)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

Τότε $W=\int_{\Gamma}\vec{F}\,d\vec{r}=\int_0^{\pi}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt=$

$$\int_0^{\pi}(e^t\sin t,\ e^t+\sin t,\ \cos t^3)\cdot(e^t,\ \cos t,\ 3t^2)\,dt=$$

$$\int_0^{\pi} e^{2t}\sin t + e^t\cos t + \frac{1}{2}\sin 2t + 3t^2\cos t^3\,dt=$$

$$\left[e^{2t}\,\frac{2\sin t-\cos t}{5} + e^t\,\frac{\cos t+\sin t}{2} - \frac{1}{4}\cos 2t + \sin t^3\right]_0^{\pi}=$$

$$\frac{e^{2\pi}}{5}-\frac{e^{\pi}}{2}-\frac{1}{4}+\sin\pi^3+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{e^{2\pi}+1}{5}-\frac{e^{\pi}+1}{2}+\sin\pi^3$$

(5) Να υπολογισθεί το $W=\int_\Gamma x^2dx+(x+y^2)dy+e^z dz$
$\vec{r}(t)=(\sin|t|, \sin|t-\pi/2|, t^2)$, $t\in[-\pi/2,\pi]$.

Θέτουμε $\vec{F}(x,y,z)=(x^2, x+y^2, e^z)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$\vec{r}(t)=(-\sin t, -\sin(t-\pi/2), t^2)$

$=(-\sin t, \cos t, t^2)$, $t\in[-\pi/2,0]$

$\vec{r}(t)=(\sin t,\cos t,t^2)$, $t\in[0,\pi/2]$

$\vec{r}(t)=(\sin t,-\cos t,t^2)$, $t\in[\pi/2,\pi]$

Τότε η $\vec{r}(t)$ είναι C^1 στα $[-\pi/2,0]$, $[0,\pi/2]$, $[\pi/2,\pi]$ και έχουμε

$W_{[-\pi/2,0]}=\int_{-\pi/2}^{0} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)dt=$

$\int_{-\pi/2}^{0}(\sin^2t, -\sin t+\cos^2t, e^{t^2})\cdot(-\cos t,-\sin t,2t)dt=$

$\int_{-\pi/2}^{0} -\sin^2t\cos t+\sin^2t-\cos^2t\sin t+2te^{t^2}dt$

$\int_{-\pi/2}^{0} -\sin^2 t\cos t+\frac{1-\cos(2t)}{2}-\cos^2t\sin t+2te^{t^2}dt=$

$\left[-\frac{\sin^3t}{3}+\frac{t}{2}-\frac{\sin(2t)}{4}+\frac{\cos^3t}{3}+e^{t^2}\right]_{-\pi/2}^{0}=$

$-\left(\frac{1}{3}-\frac{\pi}{4}+e^{\pi^2/4}\right)+\frac{1}{3}+1=\frac{\pi}{4}+1-e^{\pi^2/4}$

$W_{[0,\pi/2]}=\int_0^{\pi/2}(\sin^2t, \sin t+\cos^2t, e^{t^2})\cdot(\cos t,-\sin t,2t)dt=$

$\int_0^{\pi/2}\sin^2t\cos t-\sin^2t-\cos^2t\sin t+2te^{t^2}dt=$

$\int_0^{\pi/2}\sin^2t\cos t-\frac{1-\cos(2t)}{2}-\cos^2t\sin t+2te^{t^2}dt=$

$\left[\frac{\sin^3t}{3}-\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}+\frac{\cos^3t}{3}+e^{t^2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{4}+e^{\pi^2/4}-\frac{1}{3}-1=e^{\pi^2/4}-\frac{\pi}{4}-1$

$$W[\pi/2,\pi] = \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin^2 t, \sin t + \cos^2 t, e^{t^2}) \cdot (\cos t, \sin t, 2t)\, dt =$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 t \cos t + \frac{1 - \cos(2t)}{2} + \cos^2 t \sin t + 2t e^{t^2} \, dt =$$

$$\left[\frac{\sin^3 t}{3} + \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} - \frac{\cos^3 t}{3} + e^{t^2} \right]_{\pi/2}^{\pi} = e^{\pi^2} - e^{\pi^2/4} - \pi/4.$$

Άρα $W = \cancel{-e^{\pi^2/4}} + \cancel{\frac{\pi}{4}} + \cancel{1} + \cancel{e^{\pi^2/4}} - \cancel{\frac{\pi}{4}} - \cancel{1} + e^{\pi^2} - e^{\pi^2/4} - \pi/4 =$

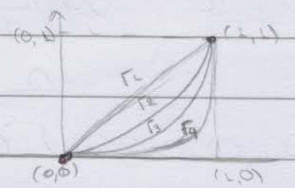
$$e^{\pi^2} - e^{\pi^2/4} - \pi/4.$$

(6) Έστω $\vec{F}(x,y) = xy\vec{j} = (0, xy)$ και $\Gamma_n : \vec{r}_n(t) = (t, t^n)$ $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Να υπολογίσετε το $\int_{\Gamma_n} \vec{F} d\vec{r}$. Τι παρατηρείτε;

Για $n \geq 1$ $W_n = \int_{\Gamma_n} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 (0, t^{n+1}) \cdot (1, nt^{n-1}) dt =$

$$\int_0^1 n t^{2n} dt = \left[\frac{n}{2n+1} t^{2n+1} \right]_0^1 = \frac{n}{2n+1}$$

Παρατηρούμε ότι οι Γ_n έχουν κοινή αρχή και κοινό τέλος $\vec{r}_n(0) = (0,0)\ \forall n$ και $\vec{r}_n(1) = (1,1)$ $\forall n$. και $W_n \neq W_{n'}$ για $n \neq n'$



(7) Να υπολογισθεί το $W = \int_\Gamma y dx + x dy$ όπου $\Gamma : \vec{r}(t) = (t^4/4, \sin|\ln t|)$, $t \in [1, e]$.

Θέτουμε $F(x,y) = (y, x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Παρατηρούμε ότι $F(x,y) = \nabla f(x,y)$ όπου $f(x,y) = xy$

Τότε $W = \int_\Gamma \vec{F} d\vec{r} = \int_\Gamma \nabla f d\vec{r} = f(r(e)) - f(r(1)) =$

$$\frac{e^4}{4} \sin 1 - \frac{1}{4} \sin 0 = \frac{e^4}{4} \sin 1$$

(8) $F(x,y,z)=(3x^2yz+y+5,\ x^3z+x-z,\ x^3y-y+z)$
Να υπολογισθουν τα $W_i=\int_{\Gamma_i}\vec{F}d\vec{r}$ οπου
$\Gamma_1:\ x^{2/3}+y^{2/3}=1,\ z=0$
Γ_2: Τομη της $x^2+y^2+z^2=1$ με το επιπεδο $z=x$.

Απο ασκησεις 3 (2) εχουμε $\vec{F}=\vec{F}_3=\nabla f$
οπου $f(x,y,z)=x^3yz+xy+5x-yz+z^2/2+c$.
και Γ_1, Γ_2 ειναι κλειστες καμπυλες
αρα $W_i=\int_{\Gamma_i}\nabla f\, d\vec{r}=0$.