Διαφορικός Λογισμός

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad (\text{αν υπάρχει})$$

$$\iff \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-h f'(x_0)}{h} = 0 \iff \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{|h|} = 0$$

$\iff \exists$ γραμμική συνάρτηση $T_{x_0}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$T_{x_0}(x) = f'(x_0)\cdot x$, $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-T_{x_0}(h)}{|h|} = 0$

$\iff \exists$ γραμμική συνάρτηση $T_{x_0}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

τ.ω. $f(x_0+h) = f(x_0) + T_{x_0}(h) + |h|\cdot q(h)$, $\lim_{h\to 0} q(h) = q(0) = 0$.

Η ύπαρξη της $f'(x_0)$ λύνει 2 προβλήματα:

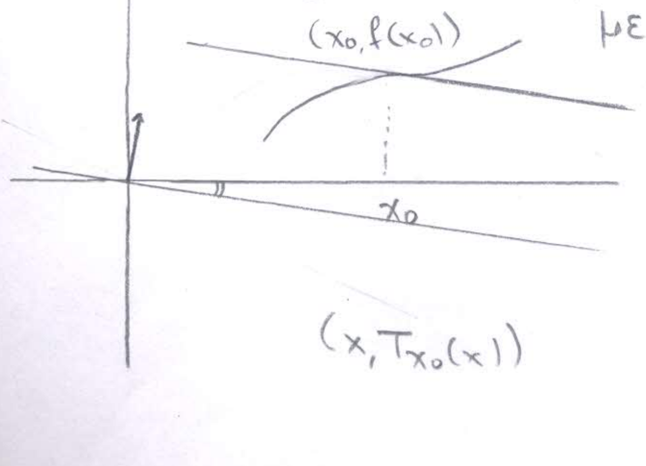
i) Γραμμική προσέγγιση της f στο x_0

$f(x_0+h) = f(x_0) + T_{x_0}(h) + |h|\cdot q(h)$, $q(h) \to 0 = q(0)$

$h \cong 0$, $f(x_0+h) = f(x_0) + T_{x_0}(h)$

Την $T_{x_0}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γραμμική την ονομάζουμε <u>διαφορικό της f στο x_0</u>. Πίνακας $(f'(x_0))$

Η T_{x_0} έχει γράφημα μια ευθεία με κλίση = κλίση της f στο x_0.



2) Ορισμός εφαπτομένης ευθείας

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι ευθεία που περιέχει $(x_0, f(x_0))$, κλίση $(f'(x_0))$ και κάθετο διάνυσμα $(f'(x_0), -1)$.

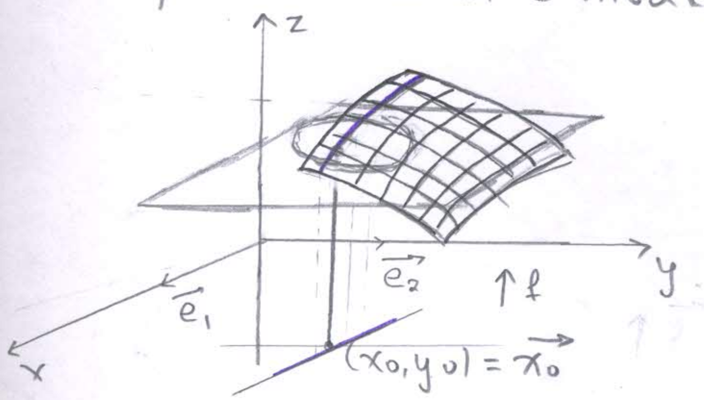
Τελικά, η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R} \iff$
$\exists\, T_{x_0}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γραμμική: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0) - T_{x_0}(h)}{|h|} = 0$

Η $T_{x_0}(x) = f'(x_0) \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$ καλείται το διαφορικό της f στο x_0.

Συμβ. $df(x_0) = T_{x_0}$, πίνακας $(f'(x_0))(1 \times 1)$.

Η $\vec{f}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^d \iff$
$\exists\, \vec{T}_{x_0}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ γραμμική: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\vec{f}(\vec{x_0}+\vec{h}) - \vec{f}(x_0) - \vec{T}_{x_0}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$.
$\vec{T}_{x_0} = d\vec{f}(x_0)$ διαφορικό της $\vec{f}$ στο x_0, πίνακα $(m \times d)$

Να δούμε ποιος είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο $T_{\vec{x_0}}$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ έστω ότι $\exists$ $T_{(x_0,y_0)}(x,y) = ax + by$, $a = a(\vec{x_0})$, $b = b(\vec{y_0})$

τ.ω. $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{f(x_0+x, y_0+y) - f(x_0,y_0) - (ax+by)}{\|(x,y)\|} = 0$

$(x,0) \to (0,0)$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x_0+x) - f(x_0,y_0) - ax}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x_0+x, y_0) - f(x_0,y_0)}{x} = a$

Δηλαδή, αν περιορίσουμε την f στην $(x_0,y_0)+t\cdot\vec{e_1}=(x_0+t,y_0)$, $t\in\mathbb{R}$

η παράγωγός της είναι η κλίση της $T(x_0,y_0)$ ως προς τον Ox.

$(T_{(x_0,y_0)}(\vec{e_1})=\alpha)$.

Ανάλογα, $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+y)-f(x_0,y_0)}{y}=\beta$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\alpha,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\beta$$

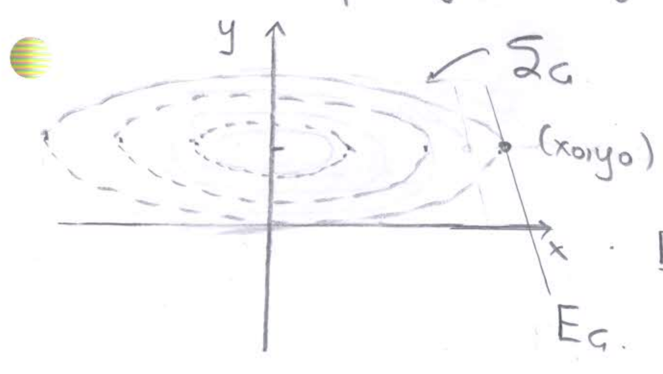
$$T_{(x_0,y_0)} \longleftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

Εφαπτόμενο επίπεδο.

$$z=f(x_0,y_0)+\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)\quad T_{(x_0,y_0)}(e_1)=\alpha$$

$$\perp\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\ -1\right)$$

Έστω $S_c=\{(x,y): f(x,y)=c\}$ είναι μια «καλή» καμπύλη.



Το σύνολο στάθμης του εφαπτομένου επιπέδου:

$E_c=\{(x,y): a(x-x_0)+\beta(y-y_0)=0\}$.

Μερική Παράγωγος

$f: A\ (\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 = (a_1, \dots, a_d) \in A$

A ανοιχτό σύνολο

Εάν $\exists \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_i) - f(x_0)}{t} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$

καλείται i-μερική παράγωγος της f στο $\vec{x}_0$.

Συμβολισμός. $f_{x_i}(\vec{x}_0)$, $D_{\vec{e_i}} f(\vec{x}_0)$, $D_i f(\vec{x}_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t, a_2, \dots, a_d) - f(a_1, \dots, a_d)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + t, \dots, a_d) - f(a_1, \dots, a_d)}{t}$$

κ.ο.κ.

Μερική Παράγωγος

Έστω $f: A\left(\subseteq \mathbb{R}^2\right) \to \mathbb{R}$, A ανοικτό σύνολο και $\left(x_0, y_0\right) \in A$.

Ορισμός: Μερική παράγωγος ως προς x (αντ. ως προς y) στο σημείο $\left(x_0, y_0\right)$ είναι η παράγωγος της f ως προς x στο x_0 (αντ. ως προς y στο y_0), όπου έχουμε κρατήσει το y σταθερό και ίσο με y_0 (αντ. το x σταθερό και ίσο με x_0). Δηλαδή:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0 + h, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0, y_0 + h\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{h}$$

Τι σημαίνει όμως αυτό γεωμετρικά;

Παράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και θέλουμε να

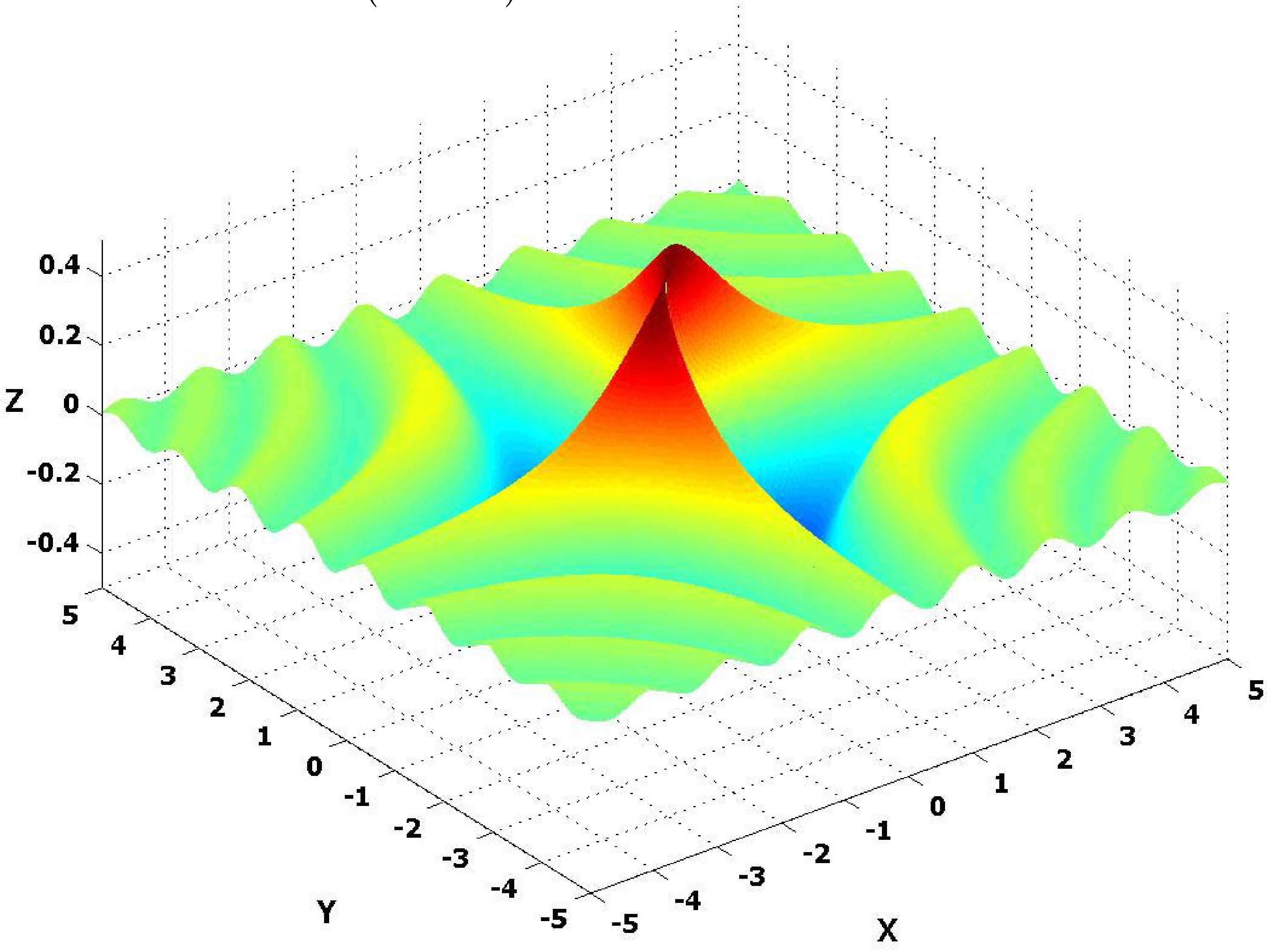
υπολογίσουμε τη μερική παράγωγό της ως προς x στο σημείο (1,-2).
Δηλαδή:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2) = ;$$

Ο ορισμός λέει ότι κρατάμε το y σταθερό (στην περίπτωση μας σταθερό και ίσο με -2) και παραγωγίζουμε την f στο σημείο x=1.

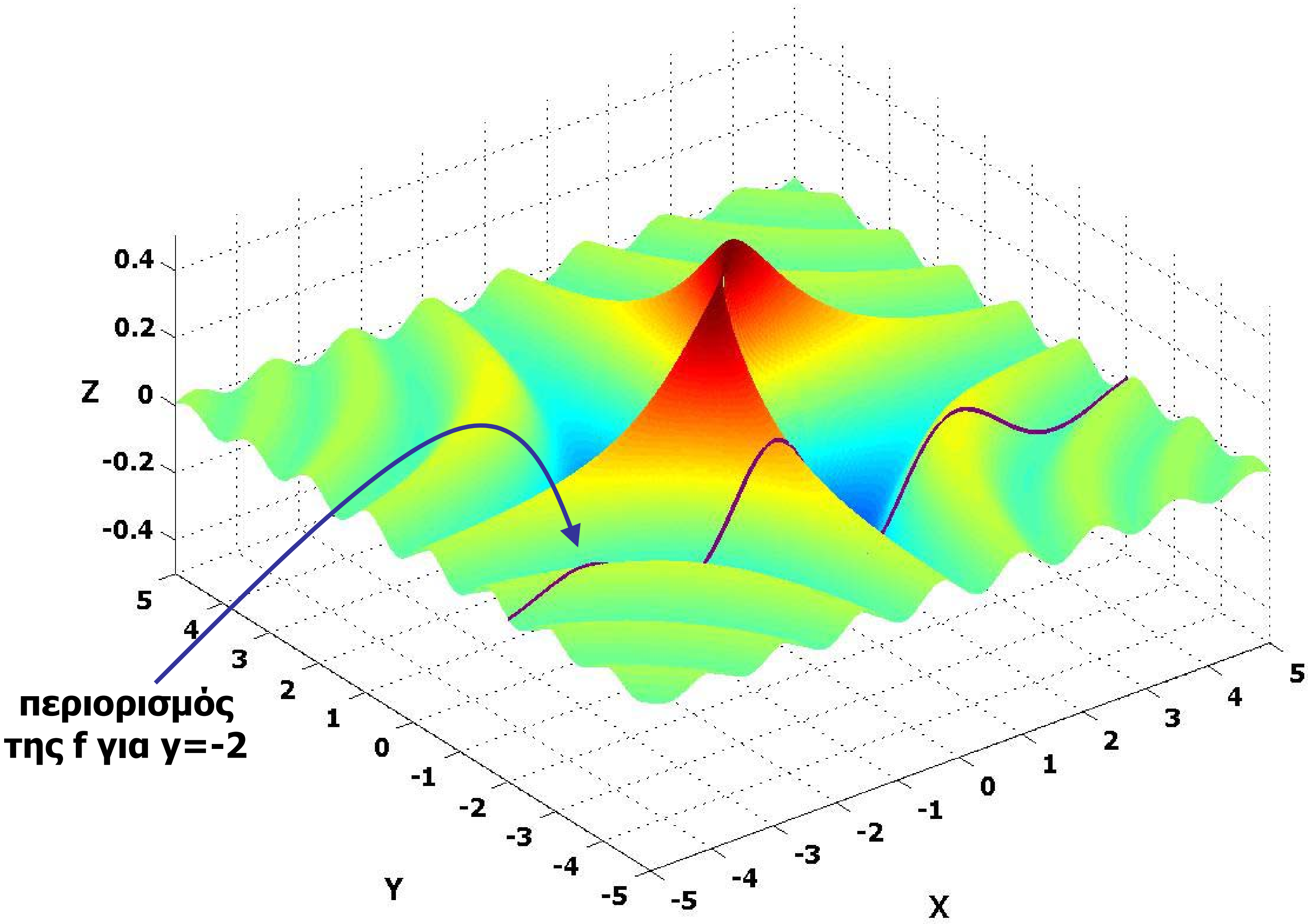
Έχουμε τη συνάρτησή μας...

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{(x^2 + y^2)},\ \ (x,y) \in [-5,5] \times [-5,5] \setminus \{(0,0)\}$$

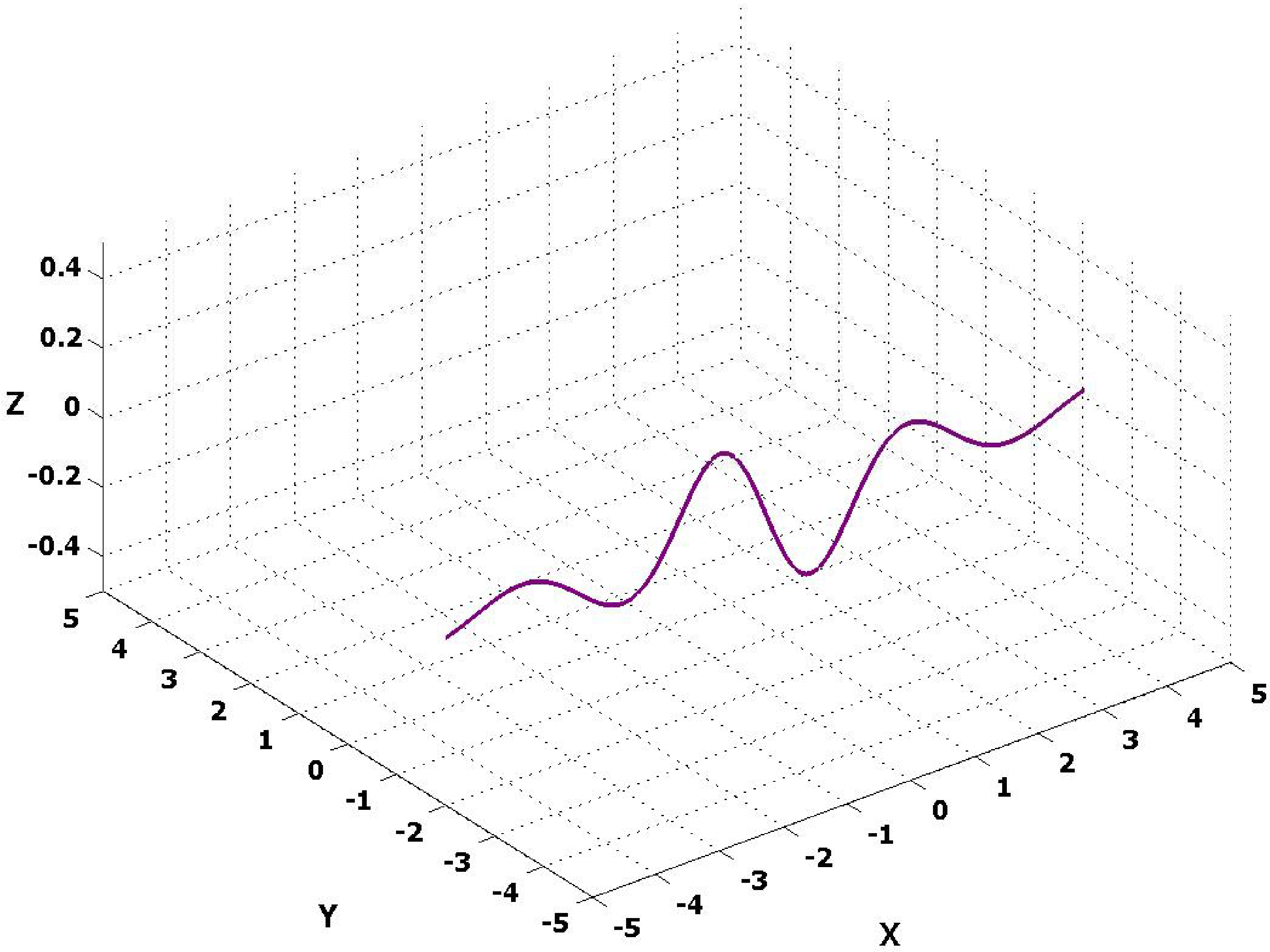


Παίρνουμε τον περιορισμό της για y=-2

(δηλαδή το μέρος της συνάρτησης που αντιστοιχεί για y=-2)



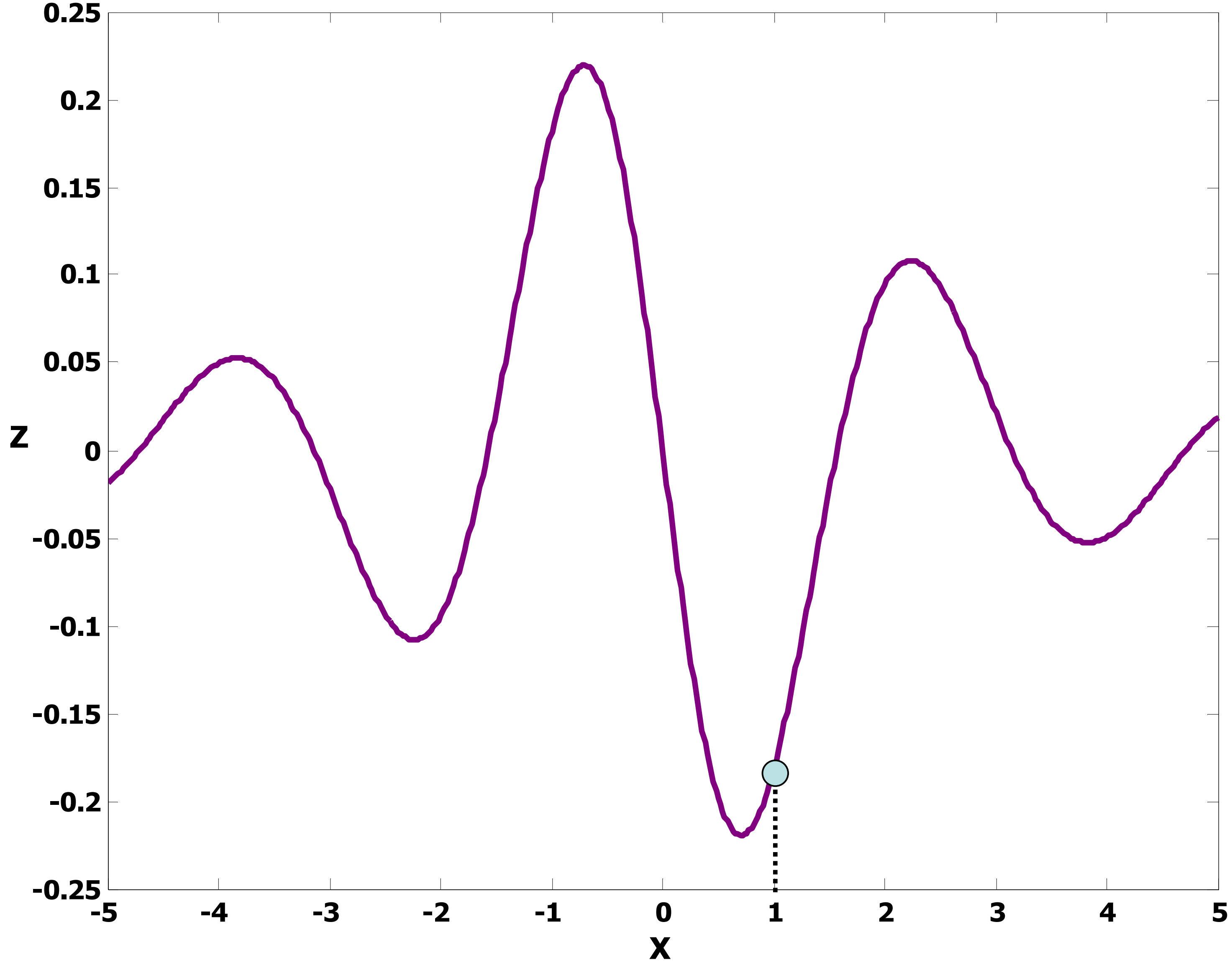
Απομονώνουμε τώρα αυτόν τον περιορισμό…



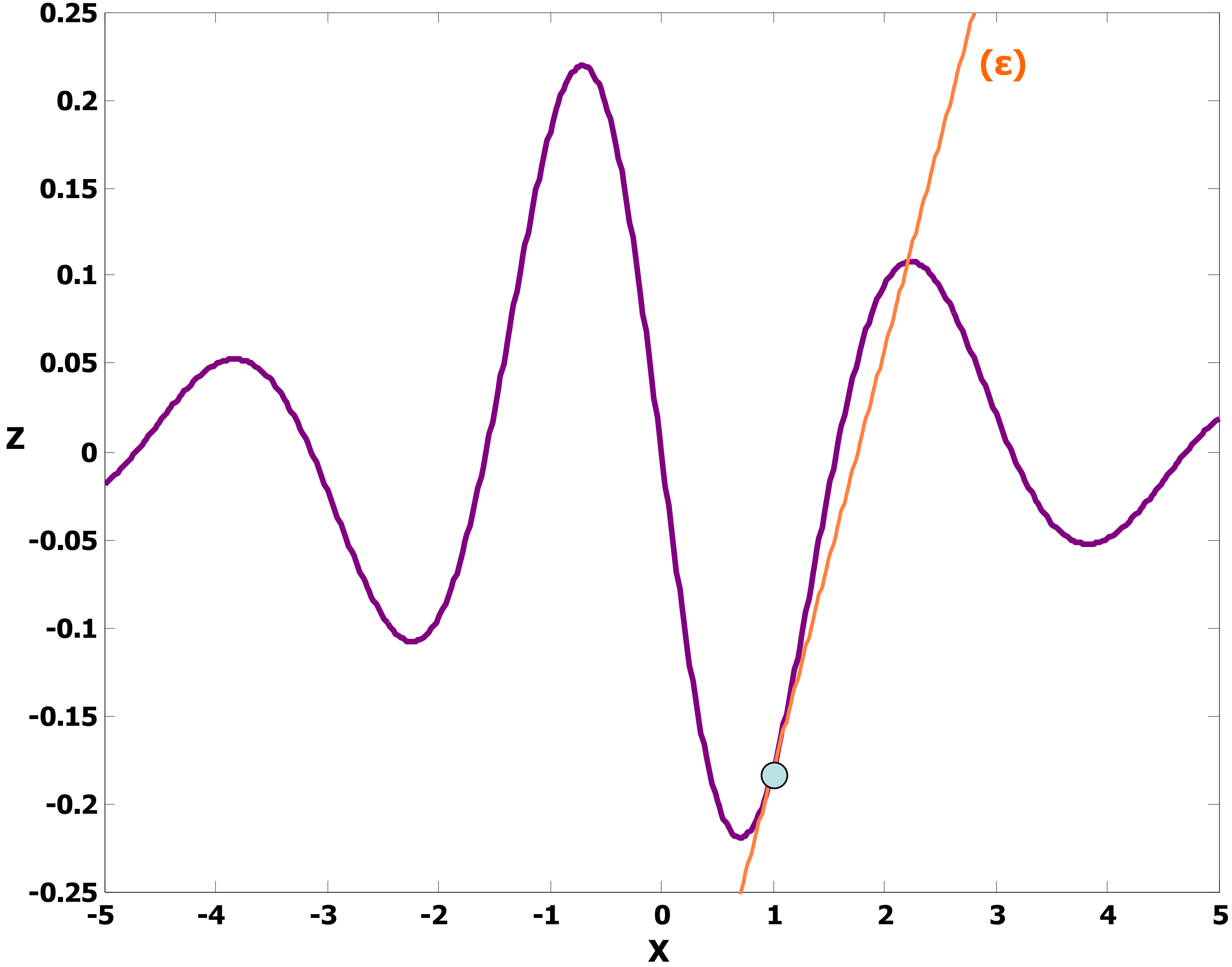
… και για να τον δούμε καλύτερα

τον παρουσιάζουμε στις 2 διαστάσεις

Η μερική παράγωγος που αναζητούμε είναι η <u>παράγωγος</u> αυτής της συνάρτησης ως προς x στο σημείο x=1.



Η κλίση της (ε) μας δίνει το ζητούμενο $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$



Παραδείγματα

1. Να ευρεθούν οι μερικές παράγωγοι στο σημείο $(1,2)$

$$f(x,y) = xy^2 + \text{τοξεφ}(x+1)$$

- $f(x,2) = 4x + \text{τοξεφ}(x+1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 4 + \frac{1}{2^2+1}$$

- $f(1,y) = y^2 + \text{τοξεφ}(2)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4$$

2) Να ευρεθούν οι μερικές παράγωγοι στο $(2,3,4)$

$$f(x,y,z) = x^4 z^2 + \log(x^4+z^2+1) + e^{x+y^2} + \eta\mu\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

Σχέση Μερικής Παραγώγισης - Συνέχειας

$f : A \to \mathbb{R}$, A = ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^d$, $\vec{x_0} \in A$.

f συνεχής στο $\vec{x_0} \not\Longrightarrow \exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0})$, $i=1,\dots,d$

πχ. $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$

$f(x,y) = |x| + |y|$ $(0,0)$.

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0}) \not\Longrightarrow f$ συνεχής στο $\vec{x_0}$ $d \geq 2$.

πχ. $f(x,y) = \begin{cases} 1 & xy = 0 \\ 0 & x\cdot y \neq 0 \end{cases}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Ασυνεχής στο $(0,0)$.

• $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Ορισμός Διαφορικού.

$\vec{f} : A\ (\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x_0} \in A$. A = ανοικτό

Η $\vec{f}$ διαφορίσιμη στο $\vec{x_0}$ $\Longleftrightarrow \exists \vec{T_{\vec{x_0}}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ γραμμική

τ.ω. $\displaystyle\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x_0}+\vec{h}) - \vec{f}(x_0) - \vec{T_{\vec{x_0}}}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$

$\Longleftrightarrow \exists \vec{T_{\vec{x_0}}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ και $\vec{q} : S(\vec{0},\varepsilon)\ (\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^m$

τ.ω. $\vec{f}(\vec{x_0}+\vec{h}) = \vec{f}(\vec{x_0}) + \vec{T_{\vec{x_0}}}(\vec{h}) + \|\vec{h}\|\,\vec{q}(\vec{h})$

όπου $\displaystyle\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \vec{q}(\vec{h}) = \vec{q}(\vec{0}) = \vec{0}$ $\left(\varepsilon : \vec{x_0} + S(\vec{0},\varepsilon) = S(\vec{x_0},\varepsilon) \subseteq A\right)$

Ισχύουν τα εξής.

1) Αν η $\vec{f}$ διαφορίσιμη στο $\vec{x_0}$, η $\vec{T_{\vec{x_0}}}$ είναι μοναδική.

Συμβολίζουμε $\vec{T_{\vec{x_0}}} = d\vec{f}(\vec{x_0})$ ή $D_1\vec{f}(\vec{x_0})$ καλείται διαφορικό της $\vec{f}$ στο $\vec{x_0}$.

2) $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη στο $\vec{x_0} \Longleftrightarrow$ f_i διαφορίσιμες στο $\vec{x_0}$, $i = 1, \dots, m$.

$d\vec{f}(\vec{x_0}) = (df_1(\vec{x_0}), df_2(\vec{x_0}), \dots, df_m(\vec{x_0})) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$.

$d = m = 1$ $f: A (\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ = ανοικτό, διαφορίσιμη στο x_0.

$df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in \mathbb{R}$ / Πίνακας (1×1) $(f(x_0))$

$d = 1$, $m \geq 2$, $\vec{r}(t) = (\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_m(t))$, $t \in A$.

Η $\vec{r}$ είναι διαφορίσιμη στο $t_0 \Longleftrightarrow$ οι r_i είναι διαφορίσιμες στο t_0 $\Longleftrightarrow \exists\, \vec{r}_i'(t_0)$, $i = 1, \dots, m$

Πίνακας $\begin{pmatrix} r_1'(t_0) \\ r_2'(t_0) \\ \vdots \\ r_m'(t_0) \end{pmatrix}$ $(m\times 1)$.

Ορίζουμε $r'(t_0) = (r_1'(t_0), \dots, r_m'(t_0))$ ως παράγωγο της $\vec{r}$ στο x_0.

Σχέση διαφορ. συνάρτησης στο $\vec{x_0}$ – Συνέχεια συν. στο $\vec{x_0}$.

Συνεχής συνάρτηση στο $\vec{x_0}$ $\not\Longrightarrow$ διαφορίσιμη στο $\vec{x_0}$

πχ $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

Όμως, ισχύει το αντίστροφο.

Πρόταση

$f: A (\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $\vec{x}_0$. Τότε η f είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$. —

Αποδ.

$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + T_{\vec{x}_0}(\vec{h}) + \|\vec{h}\| \vec{q}(\vec{h})$, $\|\vec{h}\| < \varepsilon$

$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} q(\vec{h}) = 0 = q(\vec{0})$

$|f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0)| \leq |T_{\vec{x}_0}(\vec{h}) + \|\vec{h}\| q(\vec{h})| \leq (\|\vec{a}_{\vec{x}_0}\| + 1) \cdot \|\vec{h}\|$

για $\|\vec{h}\| < \delta$ ώστε $|q(\vec{h})| < 1$

Άρα η f είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$.

Σχέση Μερικής Παραγώγου - Διαφόρισης.

$f: A (\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in A$ = ανοιχτό $(d \geq 2)$

$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ $i = 1, 2, \dots, d$ $\not\Longrightarrow$ f διαφορίσιμη στο $\vec{x}_0$

πχ. • $f(x,y) = \begin{cases} 1 & xy = 0 \\ 0 & x \cdot y \neq 0 \end{cases}$ Μερικώς παραγωγίσιμη στο $(0,0)$
Ασυνεχής στο $(0,0)$
άρα μη διαφορίσιμη

• $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (0,0) \end{cases}$

Πρόταση

$f: A (\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x_0} \in A$ = ανοιχτό, διαφορίσιμη στο $\vec{x_0}$

Τότε $\exists \ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0}) \quad i = 1, \ldots, d$

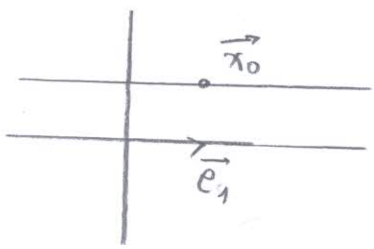
$$df(\vec{x_0})(\bar{e_i}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0})$$

$$df(\vec{x_0}) \cdot (\vec{h}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x_0}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(\vec{x_0}) \right) \circ (h_1, h_2, \ldots, h_d) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial x_i} \cdot h_i$$

Αποδ.

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{f(\vec{x_0} + \vec{h}) - f(\vec{x_0}) - df(\vec{x_0})(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

$\vec{h} = t \vec{e_i}$



$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x_0} + t\bar{e_i}) - f(\vec{x_0}) - t\, df(\vec{x_0})(\bar{e_i})}{t} = 0$$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x_0} + t\bar{e_i}) - f(\vec{x_0})}{t} = df(\vec{x_0}) \cdot (\bar{e_i})$$

$$df(\vec{x_0})(\bar{e_i}) = \frac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial x_i}$$

Πίνακας του διαφορικού / Πίνακας Jacobi

$\vec{f}: A (\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη στο $\vec{x_0} \in A$

$\overrightarrow{T_{\vec{x_0}}} = d\bar{f}(\vec{x_0}) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμική.

- $d = m = 1 \quad T_{x_0}(1) = f'(x_0) \quad (f'(x_0))$ 1×1 πίνακας
- $d = 1, m \geq 2 \quad \vec{r}: A (\subseteq \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \begin{pmatrix} r_1'(t_0) \\ \vdots \\ r_m'(t_0) \end{pmatrix}$ $(m \times 1)$ πίνακας
- $d \geq 2, m = 1 \quad T_{\vec{x_0}}(\vec{h}) = df(\vec{x_0}) \cdot (\vec{h}) = \left(\dfrac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial x_d} \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_d \end{pmatrix}$

Πίνακας $(1 \times d)$ $\nabla f(\vec{x_0}) = \left(\dfrac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial x_d} \right)$

Ανάδελτα ή κλίση της f στο $\bar{x_0}$

• $m, d \geq 2 \quad \vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$

Πίνακας του $d\vec{f}(\vec{x}_0) = (df_1(\vec{x}_0), \dots, df_m(\vec{x}_0))$

$$J\vec{f}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(\vec{x}_0) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \dots & & \frac{\partial f_m}{\partial x_d}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$