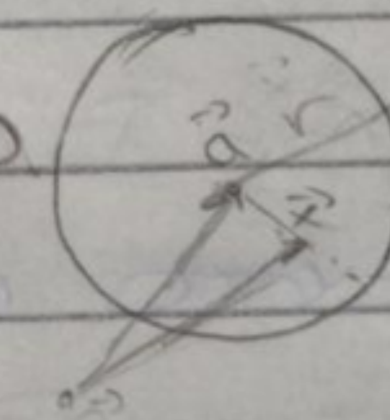
Ασκησεις Μαθημα 2

Ασκησεις/Προτασεις:

(1) $S(\vec{a},r)$, $(r>0)$ ανοιχτο συνολο



Εστω $\vec{x}\in S(\vec{a},r)\setminus\{\vec{a}\}$ θετουμε $\varepsilon=r-\|\vec{x}-\vec{a}\|>0$

Τοτε $S(\vec{x},\varepsilon)\subseteq S(\vec{a},r)$ αφου αν $\vec{y}\in S(\vec{x},\varepsilon)$

τοτε $\|\vec{y}-\vec{a}\|\le\|\vec{y}-\vec{x}\|+\|\vec{a}-\vec{x}\|<r$.

(2) B κλειστο $\Leftrightarrow$ για $\vec{b}_n\in B$ και $\lim\vec{b}_n=\vec{b}\in\mathbb{R}^d$ εχουμε $\vec{b}\in B$.

[$\Rightarrow$] Εστω B κλειστο και $\vec{b}_n\in B$ τ.ω. $\vec{b}_n\to\vec{b}\in\mathbb{R}^d$. Εστω προς ατοπο οτι $\vec{b}\in\mathbb{R}^d\setminus B$.
Αφου $\mathbb{R}^d\setminus B$ ανοιχτο $\exists\,\varepsilon_0>0$: $S(\vec{b},\varepsilon_0)\subseteq B^c$. Ομως $\vec{b}_n\to\vec{b}$ αρα για το δεδομενο $\varepsilon_0>0$ $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$: $\vec{b}_n\in S(\vec{b},\varepsilon_0)\subseteq B^c$ $\forall n\ge n_0$ ατοπο αφου $\vec{b}_n\in B$ αρα $\vec{b}\in B$.

[$\Leftarrow$] Εστω οτι $\forall\,\vec{b}_n\in B$ με $\vec{b}_n\to\vec{b}$ τοτε $\vec{b}\in B$.
Εστω προς ατοπο οτι B δεν ειναι κλειστο $\Rightarrow$ B^c δεν ειναι ανοιχτο αρα $\exists\,\vec{a}\in B^c:\forall\varepsilon>0$ $S(\vec{a},\varepsilon)\cap B\neq\emptyset$. Για $\varepsilon=1$ $\exists\,\vec{a}_1\in S(\vec{a},\varepsilon)\cap B$

Για $\varepsilon=1/2$ $\exists\,\vec{a}_2\in S(\vec{a},\varepsilon)\cap B$: $a_2\neq a_1$

$\vdots$

Για $\varepsilon=1/n$ $\exists\,\vec{a}_n\in S(\vec{a},\varepsilon)\cap B$: $\vec{a}_n\notin\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_{n-1}\}$.

Τοτε $\forall n\in\mathbb{N}$ $\|\vec{a}_n-\vec{a}\|<1/n$ $\Rightarrow$ $\vec{a}_n\in B$ και $\vec{a}_n\to\vec{a}\in B^c$ ατοπο. Αρα B κλειστο.

(3) $\vec{x}_0\in B'$ $\Leftrightarrow$ $\exists\,\vec{b}_n\in B$ με $\vec{b}_n\neq\vec{x}_0$ τ.ω. $\vec{b}_n\to\vec{x}_0$.

[$\Rightarrow$] Εστω $\vec{x}_0\in B'$ τοτε $\forall\varepsilon>0$ $S(\vec{x}_0,\varepsilon)\cap(B\setminus\{\vec{x}_0\})\neq\emptyset$

Για $\varepsilon=1$ $\exists\,\vec{b}_1\in S(\vec{x}_0,\varepsilon)\cap(B\setminus\{\vec{x}_0\})$

Για $\varepsilon=1/2$ $\exists\,\vec{b}_2\in S(\vec{x}_0,\varepsilon)\cap(B\setminus\{\vec{x}_0\})$: $\vec{b}_2\neq\vec{b}_1$ (*)

$\vdots$ (*)

Για $\varepsilon=1/n$ $\exists\,\vec{b}_n\in S(\vec{x}_0,\varepsilon)\cap(B\setminus\{\vec{x}_0\})$: $\vec{b}_n\notin\{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_{n-1}\}$

Τοτε $\forall n\in\mathbb{N}$: $\|\vec{b}_n-\vec{x}_0\|<1/n$, $\vec{b}_n\in B\setminus\{\vec{x}_0\}$ και $\vec{b}_n\to\vec{x}_0$

[$\Leftarrow$] Εστω $\vec{b}_n\in B$ με $\vec{b}_n\neq\vec{x}_0$: $\vec{b}_n\to\vec{x}_0$ αρα $\forall\varepsilon>0$ $\exists\,n_0\in\mathbb{N}$

(*) Αν $\vec{x}_0\in B'$ τοτε $\forall\varepsilon>0$ $S(\vec{x}_0,\varepsilon)\cap B$: απειρο συνολο

$\vec{b}_n \in S(\vec{x}_0,\varepsilon)\ \forall n\geq n_0$ όμως $\vec{b}_n \in B\setminus\{\vec{x}_0\}$ άρα $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$ $\vec{b}_n \in S(\vec{x}_0,\varepsilon)\cap(B\setminus\{\vec{x}_0\})\ \forall n\geq n_0$ τότε $\forall\varepsilon>0\ S(\vec{x}_0,\varepsilon)\cap(B\setminus\{\vec{x}_0\}) \neq\emptyset \Rightarrow \vec{x}_0\in B'$.

(4) B κλειστό $\overset{(α)}{\Leftrightarrow} B'\subseteq B \overset{(β)}{\Leftrightarrow} B=\bar{B}$.

[$\overset{(α)}{\Rightarrow}$] Έστω B κλειστό και $\vec{b}\in B'$ από (3) $\exists \vec{b}_n\in B: \vec{b}_n\neq\vec{b}$ και $\vec{b}_n\to\vec{b}$ όμως B κλειστό άρα από (2) $\vec{b}\in B$ Άρα $B'\subseteq B$.

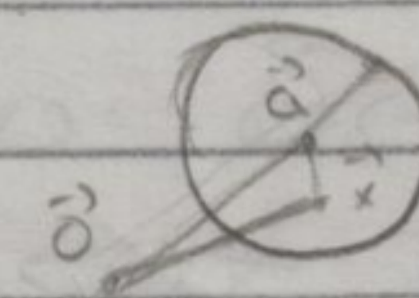
[$\overset{(β)}{\Rightarrow}$] Έστω ότι $B'\subseteq B$ όμως $\bar{B}=B'\cup B \Rightarrow \bar{B}=B$.

[$\Leftarrow$] Έστω ότι $B=\bar{B}$. Όμως $\bar{B}$ κλειστό(*) $\Rightarrow B=\bar{B}$ κλειστό.

(5) $B(\vec{a},r)$ κλειστό (φραγμένο) σύνολο.

Έστω $\vec{b}_n\in B(\vec{a},r): \vec{b}_n\to\vec{b}\in\mathbb{R}^d$. Τότε $\|\vec{b}_n-\vec{a}\|\leq r \Rightarrow \|\vec{b}-\vec{a}\|\leq r \Rightarrow \vec{b}\in B(\vec{a},r)$ Άρα $B(\vec{a},r)$ κλειστό.

Έστω $\vec{x}\in B(\vec{a},r)$, τότε $\|\vec{x}\|\leq\|\vec{a}\|+r$ = σταθ.



Άρα $B(\vec{a},r)$ φραγμένο.

$\bar{S}(\vec{a},r)=B(\vec{a},r)$, $r>0$.

$S(\vec{a},r)\subseteq B(\vec{a},r)$ και $B(\vec{a},r)$ κλειστό $\Rightarrow \bar{S}(\vec{a},r)\subseteq B(\vec{a},r)$

Έστω $\vec{x}\in B(\vec{a},r)$ τότε $\|\vec{x}-\vec{a}\|\leq r$ Τότε

αν $\|\vec{x}-\vec{a}\|<r$ τότε $\vec{x}\in S(\vec{a},r)$.

αν $\|\vec{x}-\vec{a}\|=r$ $\forall\varepsilon>0$ $S(\vec{x},\varepsilon)\cap S(\vec{a},r)\neq\emptyset \Rightarrow$ $\vec{x}\in\bar{S}(\vec{a},r)$

Άρα σε κάθε περίπτωση $B(\vec{a},r)\subseteq\bar{S}(\vec{a},r)$.

(6) $\Pi=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_d,b_d]$, όπου $a_i\leq b_i$ ορθογώνιο είναι κλειστό σύνολο.

Έστω $\vec{\gamma}_n\in\Pi$: $\gamma_n=(\gamma_n^1,\gamma_n^2,\dots,\gamma_n^d)\to\vec{\gamma}=(\gamma^1,\dots,\gamma^d)\in\mathbb{R}^d$ Τότε $\gamma_n^i\to\gamma^i$ και $\gamma_n^i\in[a_i,b_i]$ όμως $[a_i,b_i]$ κλειστό άρα $\gamma^i\in[a_i,b_i]$, $1\leq i\leq d$. Άρα $\vec{\gamma}=(\gamma^1,\dots,\gamma^d)\in\Pi$.

Άρα Π κλειστό.

Άσκηση θέμα 2013 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}: F_1\supseteq F_2\supseteq\dots\supseteq F_n\supseteq\dots$ όπου $F_n\neq\emptyset$ συμπαγή $\subseteq\mathbb{R}^d$ Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\neq\emptyset$

Έστω (x_n) ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ τ.ω. $x_n\in F_n\ \forall n\in\mathbb{N}$.

(*) Ισχύει $\bar{B}$ κλειστό για κάθε $B\subseteq\mathbb{R}^d$

Τώρα αφού $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία $x_n \in F_1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ και F_1 συμπαγές άρα $\exists (x_{k_n})$ υπακολουθία της (x_n): $x_{k_n} \to x \in F_1$

Για $n \geq 2$ το $k_n \geq n \geq 2 \Rightarrow x_{k_n} \in F_{k_n} \subseteq F_2$, $n \geq 2$

$(x_{k_n})_{n\geq 2}$ ανήκει στο $F_2 \Rightarrow$ το όριο της $x \in F_2$ (=κλειστό)

$\vdots$

Τελικά $x \in F_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcap_{\nu=1}^{\infty} F_\nu \neq \emptyset$