Μαθημα 3'

22/05/15

§3 Για συναρτήσεις m μεταβλητών $(x_1, x_2, \dots, x_m)$

Έστω $U \subset \mathbb{R}^m$ ένα ανοιχτό χωρίο και $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ κλάσεως C^2

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \longrightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

- Το 1ο διαφορικό της f στο $\vec{x_0} \in U$ είναι η γραμμική μορφή

$$Df(\vec{x_0}) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{h} \longrightarrow \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{h} \quad \text{όπου} \quad \nabla f(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\vec{x_0}) \\ \vdots \\ f_{x_m}(\vec{x_0}) \end{pmatrix}$$

(Συμβ. $f_{x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$)

- Παραγωγίζοντας ως προς $x_1, \dots, x_m$ τις συνιστώσες του $\nabla f(\vec{x_0})$ σχηματίζουμε έναν $m \times m$ συμμετρικό πίνακα.

$$H_f(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\vec{x_0}) & f_{x_1x_2}(\vec{x_0}) & \dots & f_{x_1x_m}(\vec{x_0}) \\ f_{x_1x_2}(\vec{x_0}) & f_{x_2x_2}(\vec{x_0}) & \dots & f_{x_2x_m}(\vec{x_0}) \\ \vdots & & & \\ f_{x_1x_m}(\vec{x_0}) & f_{x_2x_m}(\vec{x_0}) & \dots & f_{x_mx_m}(\vec{x_0}) \end{pmatrix}$$

$= f_{x_2x_1}(\vec{x_0})$
επειδή $f \in C^2$

που λέγεται Hessian πίνακας της f στο $\vec{x_0}$.
(Εσσιανός)

Ορισμός Το 2ο διαφορικό της f στο $\vec{x_0} \in U$ είναι η τετραγωνική μορφή $D^2 f(\vec{x_0}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$\vec{h} \longmapsto D^2 f(\vec{x_0}) \cdot \vec{h} = \underbrace{\vec{h}}_{\in \mathbb{R}^m} \cdot \underbrace{\left(H_f(\vec{x_0}) \cdot \vec{h}\right)}_{\in \mathbb{R}^m}$$

[$Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ τετραγωνική μορφή σημαίνει ότι
$Q(\lambda \vec{h}) = \lambda^2 Q(\vec{h})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^m$]

• Αναλυτικά έχουμε $D^2 f(\vec{x_0}) \vec{h} = \sum_{i,j=1}^{m} f_{x_i x_j}(\vec{x_0}) h_i h_j$, $\vec{h} = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$

και ειδικότερα

όταν $m=1$ $\quad D^2 f(\underbrace{\vec{x_0}}_{\in \mathbb{R}}) \underbrace{h}_{\in \mathbb{R}} = f''(x_0) \cdot h^2$

όταν $m=2$ $\quad D^2 f(\underbrace{\vec{x_0}}_{\in \mathbb{R}^2}) \cdot \underbrace{\vec{h}}_{\in \mathbb{R}^2} = f_{x_1 x_1}(\vec{x_0}) h_1^2 + 2 f_{x_1 x_2}(\vec{x_0}) \cdot h_1 \cdot h_2 + f_{x_2 x_2}(\vec{x_0}) h_2^2$

$\vec{h} = (h_1, h_2)$

όταν $m=3$

$$D^2 f(\vec{x_0}) \cdot \vec{h} = f_{x_1 x_1}(\vec{x_0}) h_1^2 + f_{x_2 x_2}(\vec{x_0}) \cdot h_2^2 + f_{x_3 x_3}(\vec{x_0}) \cdot h_3^2 + 2 f_{x_1 x_2}(\vec{x_0}) \cdot h_1 h_2 +$$
$$+ 2 f_{x_1 x_3}(\vec{x_0}) \cdot h_1 \cdot h_3 + 2 f_{x_2 x_3}(\vec{x_0}) h_2 h_3$$

$$[\,(h_1 + h_2 + h_3)^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 2h_1 h_2 + 2h_1 h_3 + 2h_2 h_3\,]$$

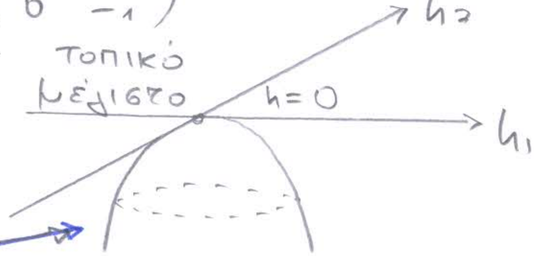
Παράδειγμα. Έστω $f(x_1, x_2) = \sin x_1 \cos x_2$. Να υπολογιστεί το 2ο διαφορικό της f στα σημεία $\vec{x_1} = (\frac{\pi}{2}, 0)$, $\vec{x_2} = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ και $\vec{x_3} = (0, \frac{\pi}{2})$

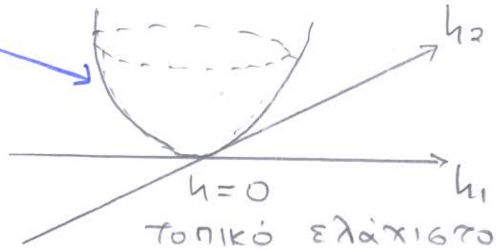
Απάντηση. Υπολογίζουμε $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \cos x_2 \\ -\sin x_1 \sin x_2 \end{pmatrix}$

και $H_f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -\sin x_1 \cos x_2 & -\cos x_1 \sin x_2 \\ -\cos x_1 \sin x_2 & -\sin x_1 \cos x_2 \end{pmatrix}$

Στο σημείο $(\frac{\pi}{2},0)$ $H_f(\frac{\pi}{2},0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

άρα $D^2 f(\frac{\pi}{2},0)\,\underset{(h_1,h_2)}{\overset{\parallel}{\vec{h}}} = -h_1^2 - h_2^2$



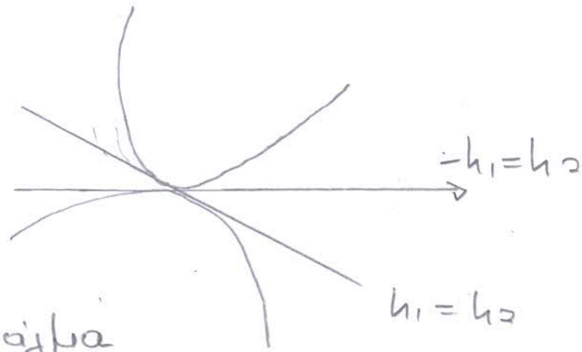


Στο σημείο $(-\frac{\pi}{2},0)$, $H_f(-\frac{\pi}{2},0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

άρα $D^2 f(-\frac{\pi}{2},0)\,\vec{h} = h_1^2 + h_2^2$

Στο σημείο $(0,\frac{\pi}{2})$ $H_f(0,\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

άρα $D^2 f(0,\pi/2)\cdot\vec{h} = -2h_1h_2$



σάγμα (σαμάρι) για $h=0$.

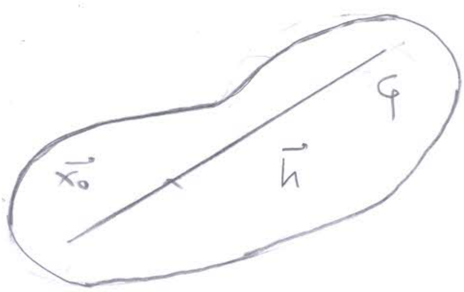
Γεωμετρική Ερμηνεία

Αν $\|\vec{h}\| = 1$, τότε η συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \longrightarrow \varphi(t) = f(\vec{x_0} + t\vec{h}) = f(\vec{r}(t))$

(όπου $\vec{r}(t) = \vec{x_0} + t\vec{h}$)

είναι ο περιορισμός της f στην προσανατολισμένη ευθεία που διέρχεται από το $\vec{x_0}$ και έχει κατεύθυνση $\vec{h}$.



Έχουμε $\boxed{\begin{aligned}\varphi'(0) &= Df(\vec{x_0})\cdot\vec{h}\\ \varphi''(0) &= D^2f(\vec{x_0})\cdot\vec{h}\end{aligned}}$

$$\varphi'(t) = \nabla f(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t) = \nabla f(\vec{x_0}+t\vec{h})\cdot\vec{h}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} f_i(\underbrace{\vec{x_0}+t\vec{h}}_{\vec{r}(t)})\cdot h_i$$
$$\varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^{m} f_{x_i x_j}(\vec{x_0}+t\vec{h})h_i h_j$$

Με τη βοήθεια του 2ου διαφορικού το Θ4 διατυπώνεται για συναρτήσεις m μεταβλητών ως έξης.

Θ5 Έστω $f\in C^2(U,\mathbb{R})$, $U\in\mathbb{R}^m$ ανοιχτό χωρίο και $\vec{x_0}\in U$.

Τότε
$$\boxed{(8)\quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} \frac{f(\vec{x})-f(\vec{x_0})-Df(\vec{x_0})(\vec{x}-\vec{x_0})-\frac{1}{2}D^2f(\vec{x_0})(\vec{x}-\vec{x_0})}{\|(\vec{x}-\vec{x_0})\|^2}=0}$$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ.

3. $f:(a,b)\xrightarrow{C^2}\mathbb{R}$

$x_0\in(a,b)$

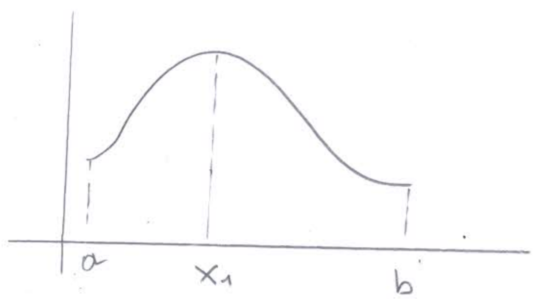
Αν $f'(x_0)=0$ και $\boxed{f''(x_0)<0}$

$\Longrightarrow x_0$ τοπικό μέγιστο

Αν $f'(x_0)=0$ και $\boxed{f''(x_0)>0}$

$\Longrightarrow x_0$ τοπικό ελάχιστο

1.



$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής

κλειστό

φραγμένο.

2. $f:(a,b)\xrightarrow{C^2}\mathbb{R}$

ανοιχτό

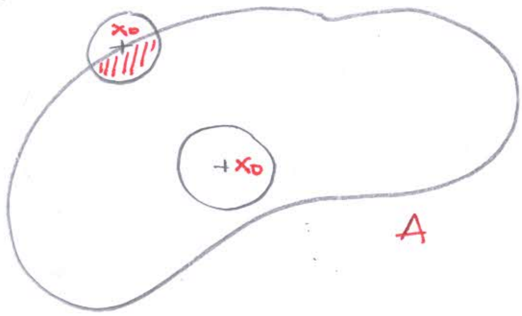
$x_0\in(a,b)$ ακρότατο $\Rightarrow f'(x_0)=0$

$x_0\in(a,b)$ τοπ. μέγιστο $\Rightarrow f'(x_0)\le 0$

τοπ. ελάχιστο $\Rightarrow f'(x_0)\ge 0$

§1 Προκαταρκτικά.

Ορισμός Έστω $A \subset \mathbb{R}^m$ και $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$. Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω. $x \in A$, $\|x - x_0\| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0)$.



Η f έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ αν $x \in A \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0)$

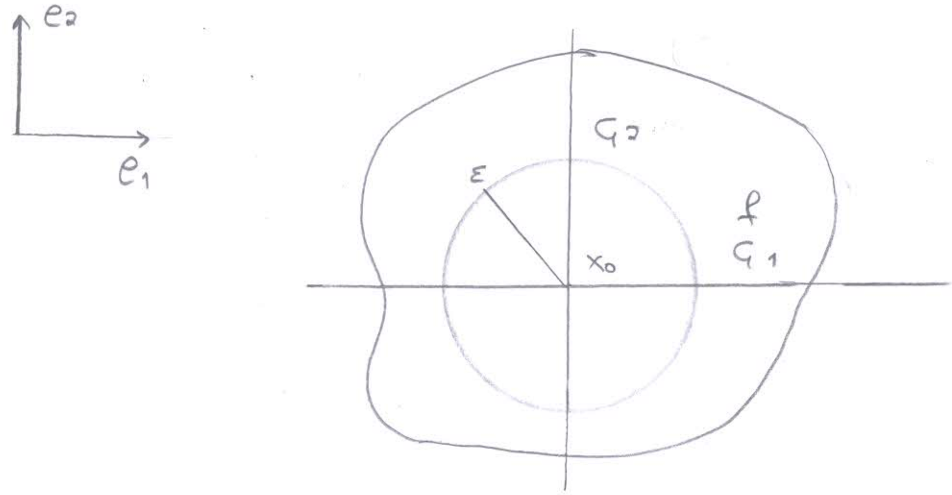
- Ανάλογα ορίζεται το τοπικό (ολικό) ελάχιστο
- Ακρότατο σημαίνει μέγιστο ή ελάχιστο

Θ1 Έστω $K \subset \mathbb{R}^m$ κλειστό και φραγμένο και έστω $f: K \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f έχει ολικό μέγιστο και ελάχιστο σε κάποια σημεία του K.

§2 Αναγκαίες Συνθήκες για την ύπαρξη ακροτάτων

Θ2 Έστω $U \in \mathbb{R}^m$ ανοικτό και $f \in C^1(U, \mathbb{R})$.
Τότε αν το $x_0 \in U$ είναι τοπικό ακρότατο της f, ισχύει $\boxed{\nabla f(x_0) = 0}$

Απόδειξη Έστω $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^m$ και έστω $\varepsilon > 0$ τ.ω. $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| < \varepsilon\} \subset U$.
Θεωρούμε τον περιορισμό της f στις ευθείες που διέρχονται από το x_0 κι έχουν κατεύθυνση e_i



$$\varphi_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longrightarrow \varphi_i(t) = f(x_0 + t e_i)$$

Αφού η f έχει τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα ελάχιστο) στο x_0, οι συναρτήσεις φ_i έχουν επίσης τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα ελάχιστο) για $t=0$. Άρα $\varphi_i'(0)=0$ και επειδή $\varphi_i'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ συμπεραίνουμε ότι $\nabla f(x_0) = 0$ □

Ορισμός. Έστω $U \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτό και $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία $x \in U$ όπου $\nabla f(x) = 0$.

Σύμφωνα με το Θ2, τα κρίσιμα σημεία είναι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων.

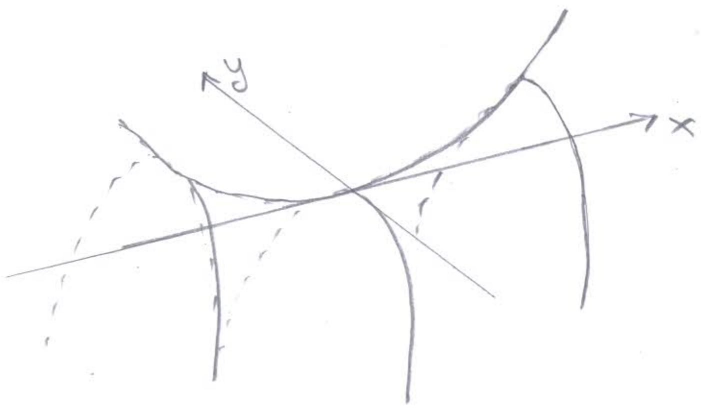
Ορισμός. Τα κρίσιμα σημεία που ΔΕΝ είναι τοπικά ακρότατα λέγονται σαγματικά σημεία. Με άλλα λόγια

$x \in U$ σαγματικό σημείο της f $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \nabla f(x) = 0 \\ \text{Σε κάθε περιοχή του } x \text{ υπάρχουν σημεία } x_1, x_2 \in U \text{ τ.ω. } f(x_1) < f(x) < f(x_2) \end{cases}$

<u>Παράδειγμα</u>. Το 0 είναι σαγματικό σημείο της $f(x,y)=x^2-y^2$

Πράγματι, $\nabla f(x,y)=(2x,-2y) \Longrightarrow \nabla f(0,0)=0$

Επιπλέον, $f(x,0)=x^2$ και $f(0,y)=-y^2$, άρα η f δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε τοπικό ελάχιστο στο 0.



σαμάρι $\longleftrightarrow$ σάγμα

<u>Άσκηση 1</u>. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x,y)=(x^2-1)^2-y^2$
$$= x^4-2x^2+1-y^2$$

<u>Απάντηση</u>. Το σημείο $(0,0)$ είναι τοπικό μέγιστο

Πράγματι, $f(0,0)=1$ και για $|x|\leq 1$ ισχύει $x^4 \leq x^2$

Άρα $|x|\leq 1 \Longrightarrow x^4-2x^2 \leq 0 \Longrightarrow x^4-2x^2+1 \leq 1 \Longrightarrow$

$$\underbrace{x^4-2x^2+1-y^2}_{=f(x,y)} \leq \underset{f(0,0)}{1}$$

• Το σημείο $(1,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

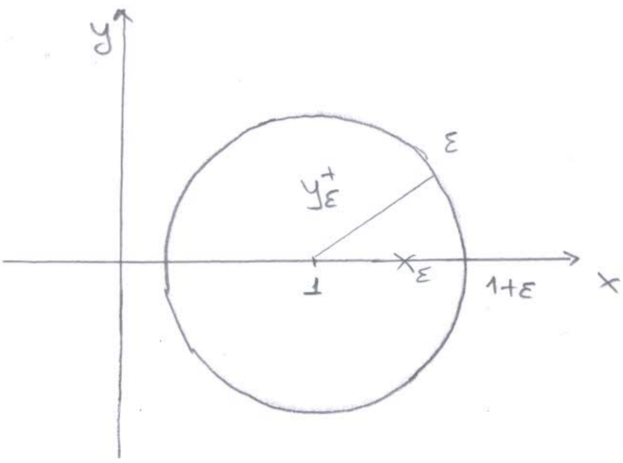
Πράγματι, $\nabla f(1,0)=0$. Έπειτα θεωρούμε τον περιορισμό της f στον άξονα x, $x \longmapsto f(x,0)=(x^2-1)^2$ έχει ολικό ελάχιστο για $x=1$

στην ευθεία $x=1$, $y \longmapsto f(1,y)=-y^2$ έχει ολικό μέγιστο για $y=0$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in (1, 1+\varepsilon)$

$\exists y_\varepsilon \in (0, \varepsilon) \quad$ τ.ω. $f(1, y_\varepsilon) < \underbrace{f(1,0)}_{0} < f(x_\varepsilon, 0)$



• Ομοίως, το σημείο $(-1,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Θ3 Έστω $U \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και $f \in C^2(U, \mathbb{R})$

Τότε, αν το $x_0 \in U$ είναι τοπικό μέγιστο της f ισχύει

$D^2 f(x_0) h \leq 0 \quad , \forall h \in \mathbb{R}^m$

τοπικό ελάχιστο της f ισχύει

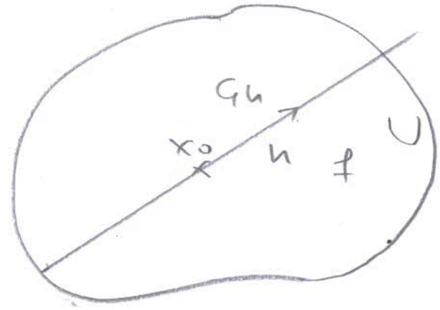
$D^2 f(x_0) h \geq 0 , \quad \forall h \in \mathbb{R}^m$

Απάντηση Εξετάζουμε την περίπτωση που η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Εργαζόμαστε όπως στην Απ. του Θ2

Έστω $\varepsilon > 0$ τ.ω. $B(x_0, \varepsilon) \subset U$. Θεωρούμε τον περιορισμό της f στις ευθείες που διέρχονται από το x_0 και έχουν κατεύθυνση το h με $\|h\| = 1$:

$g_h : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto g_h(t) = f(x_0 + th)$



Οι συναρτήσεις φ_h παρουσιάζουν τοπικό μέγιστο για $t=0$, επομένως $\varphi'_h(0)=0$. Θα δείξουμε με εις άτοπο απαγωγή ότι $\varphi''_h(0)\le 0$. Αν $\varphi''_h(0)>0$, τότε σύμφωνα με τον τύπο (4) του Θ2 στο Κεφάλαιο με τα Θεωρήματα Taylor: $\underbrace{\varphi_h(t)=\varphi_h(0)}_{f(x_0)}+\underbrace{\varphi'_h(0)}_{0}t+\frac{1}{2}\varphi''_h(0)t^2+R_2(t)$ με $\lim_{t\to 0}\frac{R_2(t)}{t^2}=0$

Συνεπώς, για $|t|<\delta$ αρκετά μικρό $(0<\delta<\varepsilon)$ έχουμε:

$-\frac{1}{4}\varphi''_h(0)t^2\le R_2(t)\le\frac{1}{4}\varphi''_h(0)t^2$ και

$$\varphi_h(t)\ge\varphi_h(0)+\frac{1}{4}\varphi''_h(0)t^2\Longrightarrow\varphi_h(t)>\varphi_h(0)\text{ για } t\in(0,\delta)$$
$$\Longrightarrow f(x_0+th)>f(x_0)$$

Άτοπο επειδή η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

Συμπεραίνουμε ότι $\varphi''_h(0)\le 0$ και επειδή $D^2f(x_0)h=\varphi''_h(0)$ έχουμε $D^2f(x_0)h\le 0$, όταν $\|h\|=1$.

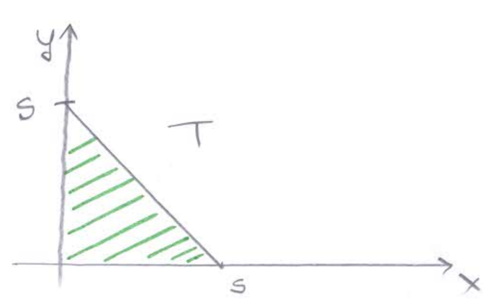
Τέλος, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $D^2f(x_0)(\lambda h)=\lambda^2D^2f(x_0)$ ($\lambda\in\mathbb{R}$) της τετραγωνικής μορφής $D^2f(x_0)$ για να δείξουμε ότι

$D^2f(x_0)h\le 0,\ \forall h\in\mathbb{R}^m$.

<u>Άσκηση 3.</u> Για x,y,z θετικούς ακέραιους με άθροισμα $s>0$ $(x+y+z=s)$ βρείτε τη μέγιστη τιμή του γινομένου xyz.

<u>Απάντηση.</u> $x+y+z=s\Longrightarrow z=s-(x+y)$ και $f(x,y)=xy(s-x-y)$
$=sxy-x^2y-xy^2$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το τρίγωνο $T=\{x\ge 0,\ y\ge 0,\ \underbrace{x+y\le s}_{z\ge 0}\}$



Η f είναι συνεχής στο T κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Χάρη στο Θ1 γνωρίζουμε ότι η f πιάνει το μέγιστο της σ' ένα σημείο $(x_0,y_0)\in T$

Στο σύνορο του T. $x=0 \Longrightarrow f=0$

$y=0 \Longrightarrow f=0$

$x+y=s \Longrightarrow f=0$

Κατά συνέπεια το μέγιστο της f πιάνεται στο εσωτερικό του T σ' ένα σημείο $(x_0,y_0)\in U=\{x>0,\ y>0,\ x+y<s\}$ ανοιχτό χωρίο.

Αναζητάμε τα κρίσιμα σημεία της $f\in C^1(U,\mathbb{R})$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} sy-2xy-y^2 \\ sx-x^2-2xy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y\,(s-2x-y) \\ x\,(s-2y-x) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} s-2x-y=0 \\ s-2y-x=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+y=s \\ x+2y=s \end{cases} \Longleftrightarrow x=y=\frac{s}{3}.$$

Αφού το σημείο $\left(\frac{s}{3},\frac{s}{3}\right)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f στο U, συμπεραίνουμε ότι $(x_0,y_0)=\left(\frac{s}{3},\frac{s}{3}\right)$

δηλαδή $\max\limits_T f=f(x_0,y_0)=f\left(\frac{s}{3},\frac{s}{3}\right)=\frac{s^3}{3^3}$ και

$$xyz\le\left(\frac{s}{3}\right)^3=\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$

$$(xyz)^{1/3}\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

γεωμετρικός μέσος $\le$ αριθμητικός μέσος.