ΕΛΕΝΗ ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΥ 1112201900029

ΔΗΜΗΤΡΑ ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ ΡΕΚΟΥΜΗ 1112201900178

Ημερομηνία και Ώρα Εξέτασης : Παρασκευή 22 Ιανουαρίου 2021 , 17:00

ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Έστω συνάρτηση $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$,A=ανοιχτό. Οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, αν υπάρχουν είναι και αυτές συναρτήσεις από το A στο $\mathbb{R}$ άρα και για αυτές μπορούν να ορισθούν μερικές παράγωγοι οι οποίες λέγονται μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε είναι ο ακόλουθος:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$, 1 ≤i, j ≤ n .

Ακολουθώντας μία επαγωγική διαδικασία μπορούμε να ορίσουμε μερικές παραγώγους κάθε τάξης.

Μία συνάρτηση $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ λέγεται ότι είναι κλάσης C^1 αν όλες οι μερικές παράγωγοι της υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Ωστόσο αν και αυτές είναι συνεχείς συναρτήσεις τότε λέμε ότι η f είναι κλάσης C^2 δηλαδή αν όλες οι $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$, 1 ≤i , j ≤ n υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις στο A. Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε f να είναι C^n κλάσης αν οι μερικές παράγωγοι n τάξης υπάρχουν και είναι συνεχείς στο A.

Η f λέγεται κλάσης C^∞ αν έχει συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης και για κάθε μεταβλητή.

Όλες καλούνται πολλαπλές μερικές παράγωγοι, ενώ οι $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$ ονομάζονται μεικτές μερικές παράγωγοι.

Ακόμα και αν εκ πρώτης όψεως φαίνεται προφανές ότι οι μεικτές μερικές παράγωγοι μίας συνάρτησης είναι ίσες πάντα , ο ισχυρισμός αυτός δεν είναι αληθής. Ωστόσο τις προϋποθέσεις για την ισότητα των μεικτών παραγώγων δίνει το θεώρημα Schwarz/ Chairaut/ Joung.

Θεώρημα Schwarz/ Chairaut/ Joung (Μεικτών Μερικών Παραγώγων)

Έστω $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A$. Αν υπάρχουν οι f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} στο A και είναι συνεχείς δηλαδή αν η f είναι C^2 τότε ισχύει $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Απόδειξη: Έστω $(x_0, y_0) \in A$ και θεωρούμε $S(\Delta_x, \Delta_y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta_y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$. Κρατώντας σταθερά τα y_0 και Δ_y ορίζουμε την συνάρτηση $g(x) = f(x, y_0 + \Delta_y) - f(x, y_0)$ άρα $S(\Delta_x, \Delta_y) = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$ δηλαδή η S εκφράζεται ως μία διαφορά διαφορών. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για συναρτήσεις μίας μεταβλητής προκύπτει ότι $g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(\xi)\Delta x$ για κάποιο $\xi \in (x_0, x_0 + \Delta_x)$.

Άρα $S(\Delta_x, \Delta_y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)\right]\Delta x$

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε συνάρτηση $h(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)$ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής προκύπτει ότι $h(y_0 + \Delta y) - h(y_0) = h'(\eta)\Delta y$ για κάποιο $\eta \in (y_0, y_0 + \Delta_y)$.Έχοντας ως δεδομένα τα παραπάνω βλέπουμε ότι ισχύει $S(\Delta_x, \Delta_y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta)\Delta x \Delta y$. Επειδή η $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ είναι συνεχής (από την υπόθεση) έπεται ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{1}{\Delta x \Delta y}[S(\Delta x, \Delta y)]$

Παρατηρώντας ότι η S είναι συμμετρική ως προς Δx και Δy με αντίστοιχο τρόπο παρατηρούμε ότι η $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ δίνεται από τον ίδιο οριακό τύπο και συνεπώς αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Ασκήσεις

1) Έστω $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Να βρεθούν οι τιμές των μεικτών μερικών παραγώγων στο σημείο (0,0)

Λύση: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(5x^4y-y^5)(x^4+y^4)-(x^5y-xy^5)(4x^3)}{(x^4+y^4)^2} = \frac{x^8y+8x^4y^5-y^9}{(x^4+y^4)^2}$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,y) = -1$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^5-5xy^4)(x^4+y^4)-(4y^3)(x^5y-xy^5)}{(x^4+y^4)^2} = \frac{x^9-8x^5y^4-xy^8}{(x^4+y^4)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{(9x^8-40x^4y^4-y^8)(x^4+y^4)^2-(x^9-8x^5y^4-xy^8)2(x^4+y^4)(4x^3)}{(x^4+y^4)^4}$$

Άρα $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

Αυτή η συνάρτηση αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ότι οι μεικτές μερικές παράγωγοι μίας συνάρτησης δεν είναι πάντα ίσες!!

2) Μπορεί να υπάρχει συνάρτηση $f(x,y)$κλάσης C^2με $f_x = 2x - 5y \; και \; f_y = 4x + y$;

Λύση: ΟΧΙ

$f_x = 2x - 5y \Rightarrow f(x,y) = x^2 - 5xy + h(y)$ Άρα $f_y = -5x + h'(y)$

$f_y = 4x + y \Rightarrow -5x + h'(y) = 4x + y \Rightarrow h'(y) = 9x + y \Rightarrow h(y) = 9xy + \frac{1}{2}y^2 + c$

Το οποίο είναι άτοπο καθώς η h είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής και συγκεκριμένα της y

3) Έστω $w = f(x,y)$ μία συνάρτηση δύο μεταβλητών και έστω $x = u + v$, $y = u - v$. Δείξτε ότι $$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε κατά κύριο λόγο τον κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Οι μερικές παράγωγοι ανωτέρας τάξης εκτός από την ιδιαίτερη μαθηματική σημασία τους για την μελέτη της συμπεριφοράς των συναρτήσεων αποτέλεσαν ορόσημο για τις υπόλοιπες επιστήμες αφού η χρήση τους συνέβαλε σημαντικά στην μαθηματική μοντελοποίηση της φύσης. Συγκεκριμένα στην φυσική αρκετοί σπουδαίοι επιστήμονες χρησιμοποίησαν τις μερικές παραγώγους ανωτέρας τάξης ώστε να δημιουργήσουν εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν φαινόμενα όπως η κίνηση των πλανητών, την μεταφορά της θερμότητας και πολλά άλλα.

Για παράδειγμα στις αρχές του 19ου αιώνα ο Γάλλος μαθηματικός Fourier ασχολήθηκε με την μελέτη της θερμότητας. Η πλήρης κατανόηση των προβλημάτων μεταφοράς θερμότητας δίνει λύση σε πολλά αναπάντητα ερωτήματα τόσο σε καθαρά επιστημονικά ζητήματα όπως ο υπολογισμός της θερμοκρασίας ενός σώματος ή ενός πλανήτη όπως η Γη καθώς και σε ερωτήματα που αφορούν την εφαρμογή της στην βιομηχανία.

Έστω ένα ομογενές σώμα Β$\subset \mathbb{R}^3$αναπαριστάται ως ένα χωρίο του τρισδιάστατου χώρου. Έστω $T(x, y, z, t)$ η θερμοκρασία ενός σώματος στο σημείο (x, y, z) την χρονική στιγμή t . Ο Fourier στηριζόμενος σε ορισμένες φυσικές αρχές απέδειξε ότι η θερμοκρασία πρέπει να ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση $k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t}$ η οποία καλείται **εξίσωση θερμότητας** όπου k είναι μία σταθερά η τιμή της οποίας εξαρτάται από την αγωγιμότητα του υλικού από το οποίο είναι φτιαγμένο το σώμα. Ουσιαστικά η εξίσωση αυτή περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο διαχέεται η θερμότητα από ένα σημείο του οποίου η θερμοκρασία είναι υψηλότερη από την θερμοκρασία των γειτονικών του σημείων.

Εφαρμογή

Α)Δείξτε ότι η $g(x, t) = 2 + e^{-t} \sin x$ ικανοποιεί την μονοδιάστατη εξίσωση θερμότητας $g_t = g_{xx}$. Η $g(x, t)$ αναπαριστά τη θερμοκρασία μίας μεταλλικής ράβδου στη θέση x τη χρονική στιγμή t.

Β)Σχεδιάστε το γράφημα της $g(x, t)$ για $t \geq 0$

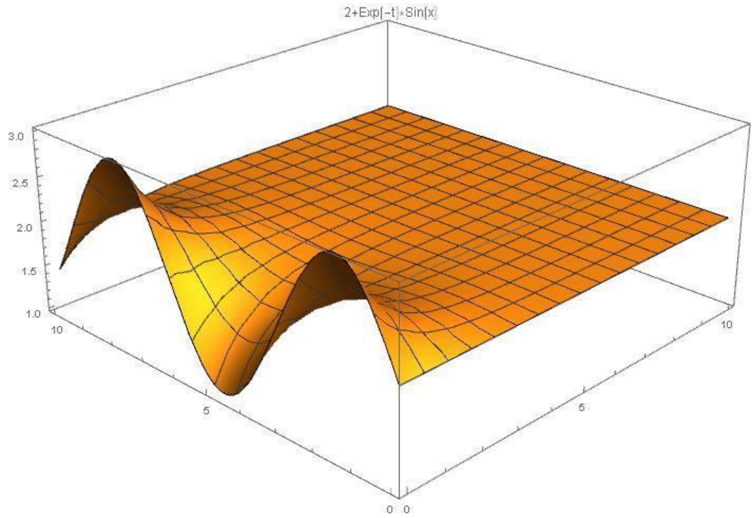
Γ) Τί συμβαίνει στην $g(x, t)$ καθώς $t \to \infty$; Ερμηνεύστε αυτό το όριο σε σχέση με τη συμπεριφορά της θερμότητας στην ράβδο.

Λύση: Α) $\frac{\partial g}{\partial x} = e^{-t} \cos x \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -e^{-t} \sin x$

$\frac{\partial g}{\partial t} = -e^{-t} \sin x$

Άρα διαπιστώνουμε ότι $g_t = g_{xx}$

Β)



Γ) $\lim_{t\to\infty} g(x,t) = \lim_{t\to\infty}(2 + e^{-t} sinx) = 2$

Το όριο αυτό εκφράζει το γεγονός ότι μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα η ράβδος αποκτά σε κάθε σημείο της την ίδια θερμοκρασία δηλαδή η θερμότητα διαχέεται στην ράβδο και επέρχεται μία σταθερή θερμοκρασιακή στάθμη αφού εξαλείφονται όλοι οι χρονομεταβλητοί όροι.

ΘΕΩΡΗΜΑ GREEN

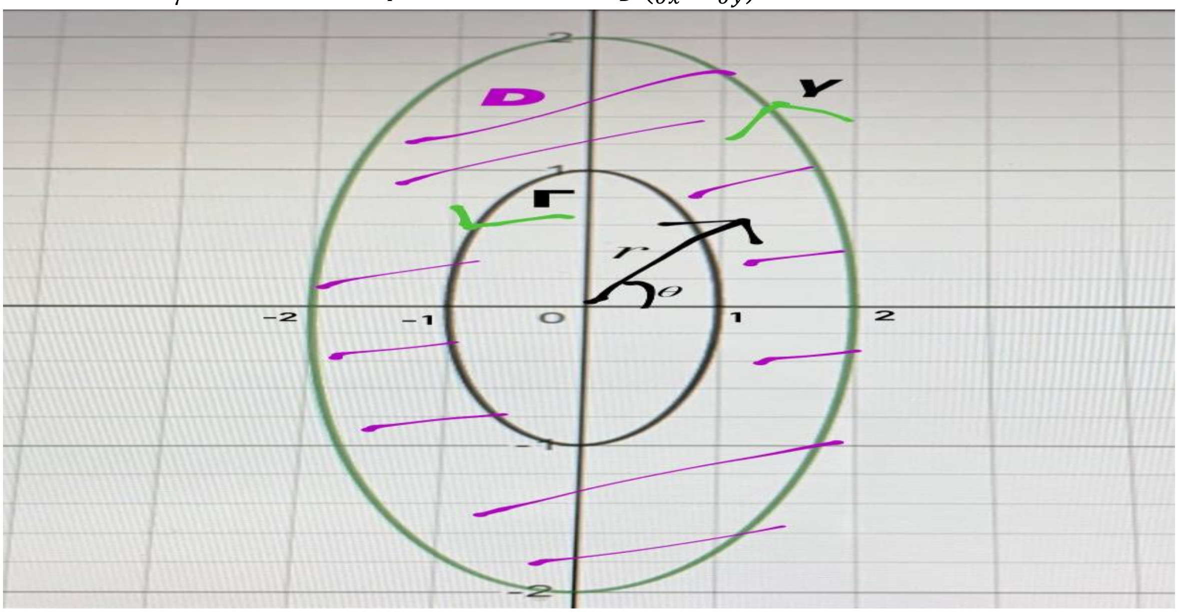
Το Θεώρημα Green είναι σημαντικό, αφού συνδέει ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους πάνω στο σύνορο ενός χωρίου του επιπέδου, με ένα διπλό ολοκλήρωμα στο εσωτερικό του χωρίου.

Ορισμός: Έστω D⊆ $\mathbb{R}^2$ένα απλό χωρίο, C το σύνορό του και $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F} = (P, Q)$ C^1συνάρτηση. Αν οι $P: D \to \mathbb{R}$ και $Q: D \to \mathbb{R}$ είναι κλάσεις C^1, τότε $\int_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$, όπου ∂D είναι η προσανατολισμένη καμπύλη C^+.

*Το Θεώρημα Green εφαρμόζεται τόσο για απλό, όσο και για πολλαπλά συνεκτικό χωρίο D.

Άσκηση: Επαληθεύστε τον τύπο του Green για το σύνολο $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ και το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y) = (-x^2 y, xy^2)$.

Θα δείξω ότι $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy - \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$.



Για (x,y)∈ γ η παραμετροποίηση είναι η εξής: $x = 2\,cos\theta, y = 2sin\theta, 0 \le \vartheta \le 2\pi$. Άρα, $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$=$\int_\gamma -x^2y\,dx + xy^2\,dy$=$\int_0^{2\pi} -(2\,cos\,\vartheta)^2 \cdot 2\sin\theta\,d(2\cos\theta)$+$2\,cos\,\theta(2\,sin\,\theta)^2 \cdot d(2\,sin\,\vartheta)$=$\int_0^{2\pi} -(2\,cos\,\vartheta)^2 \cdot 2\sin\theta \cdot (-2\sin\theta)\,d\theta + 2\cos\theta(2\sin\vartheta)^2 \cdot 2\cos\theta\,d\theta =$ $16\int_0^{2\pi} 4\,cos^2\,\theta\,sin^2\,\theta\,d\vartheta$=$8\int_0^{2\pi} sin^2(2\theta)\,d\theta$=$8\int_0^{2\pi} \frac{1-cos(4\theta)}{2}\,d\theta$=4($[\theta]_0^{2\pi}$-$\left[\frac{sin(4\theta)}{4}\right]_0^{2\pi}$) $= 4 \cdot 2 \cdot \pi = 8\pi$

Για (x,y)∈ Γ η παραμετροποίηση είναι η εξής: $x = cos\theta, y = sin\theta, 0 \le \vartheta \le 2\pi$. Άρα, $\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy$=$\int_\Gamma -x^2y\,dx + xy^2\,dy$=$\int_0^{2\pi} -(cos\,\vartheta)^2 \cdot \sin\theta\,d(\cos\theta)$+$cos\,\theta(sin\,\theta)^2 \cdot d(sin\,\vartheta)$=$\int_0^{2\pi} 2\,cos^2\,\theta \cdot sin^2\,\theta\,d\theta$=$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4\,cos^2\,\theta \cdot sin^2\,\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} sin^2(2\,\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(4\theta)}{2}\,d\theta = \frac{1}{4}\left([\theta]_0^{2\pi} - \left[\frac{\sin(4\theta)}{4}\right]_0^{2\pi}\right) = \frac{\pi}{2}$.

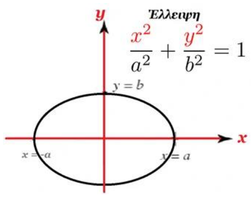
Από την άλλη, $\int_D\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_D\int (y^2 + x^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 = \frac{15\pi}{2}$.

Αφού έθεσα x=r·cosθ, y=r·sinθ, 0≤θ≤2π και $J(r,\theta) = \begin{pmatrix} cos\,\theta & -r \cdot sin\,\vartheta \\ sin\,\theta & r \cdot cos\,\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J(r,\theta)) = r \Rightarrow$ $|\det(J(r,\theta))| = r$. Άρα όντως 8π-π/2=15π/2.

Μια από τις εφαρμογές του Θεωρήματος Green είναι ο υπολογισμός εμβαδόν χωρίου. Αν C είναι μια απλή κλειστή καμπύλη που φράσσει ένα χωρίο στο οποίο εφαρμόζεται το Θ.Green, τότε το εμβαδόν του χωρίου D που φράσσεται από την C=∂D είναι $A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$.

Απόδειξη: Έστω $P(x,y) = -y, Q(x,y) = x$. Από Θ.Green έχουμε $\frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx =$ $\frac{1}{2}\int_D\int \frac{\partial x}{\partial x} \frac{-\partial(-y)}{\partial y}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_D (1+1)\,dx\,dy$ =$\int_D\int\,dx\,dy = A$.

Άσκηση: Αποδείξτε ότι η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$έχει εμβαδόν πab, a,b$>0$.



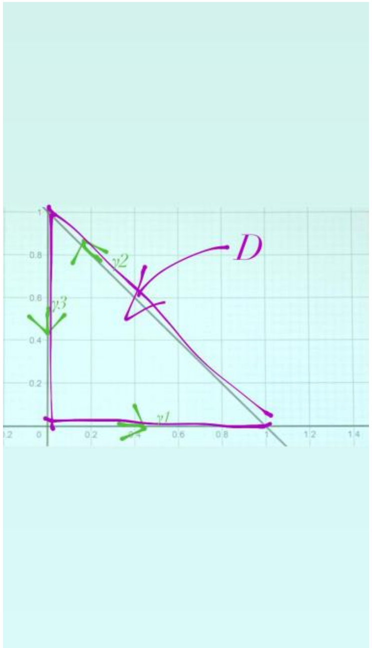
$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$=$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta\,d(b\sin\theta) - b\sin\theta d(\alpha\cos\theta))\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\,\alpha\cos\theta b\cos\theta -$ $b\,sin\,\theta(-\alpha\,sin\,\theta))\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \alpha b(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \alpha \cdot b\,d\theta = \frac{1}{2}\alpha \cdot b \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \frac{2\pi\alpha b}{2} =$ $\pi\alpha b$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μπορέσαμε και χρησιμοποιήσαμε το συγκεκριμένο τύπο για το εμβαδό, διότι το χωρίο είναι φραγμένο από κλειστή καμπύλη.

Έστω D$\subseteq \mathbb{R}^2$ ένα απλό συνεκτικό χωρίο, ∂Dμια απλή κλειστή καμπύλη και $\vec{F} = (P, Q), P, Q \in C^1(D)$. Εκτός από τη συνηθισμένη-εφαπτομενική μορφή του Θεωρήματος Green, υπάρχει και η **<u>κάθετη μορφή</u>**, η οποία είναι η εξής:

$$\int_{\partial D} P\,dy - Q\,dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy$$

<u>Άσκηση:</u> Έστω διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2, x + 2)$ και καμπύλη γ, όπου γ το σύνορο του τριγωνικού χωρίου στο επίπεδο xy με κορυφές (0,0),(0,1),(1,0). Να επαληθευτεί η κάθετη μορφή του Θεωρήματος Green.



Η γ δεν είναι ενιαίου τύπου, οπότε γ=γ1+γ2+γ3.

Για την γ1 ισχύει ότι y=0, x=0 έως x=1.

Για την γ2 ισχύει ότι x+y=1$\Rightarrow$ $\mathrm{y} = 1 - \mathrm{x}$, x=1 έως x=0.

Για την γ3 ισχύει ότι x=0, y=1 έως y=0.

Η κάθετη μορφή του Θ.Green είναι $\int_\gamma \mathrm{P\,dy - Q\,dx} = \iint_\mathrm{D} \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{y}}\right) \mathrm{dx\,dy}$.

$\int_{\gamma 1} \mathrm{P\,dy - Q\,dx}$=$\int_{\gamma 1} (\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2)\,\mathrm{dy} - (\mathrm{x} + 2)\,\mathrm{dx} = -\int_0^1 (x + 2)\,dx = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$

$\int_{\gamma 2} \mathrm{P\,dy - Q\,dx}$=$\int_{\gamma 2} (x^2 + (1 - x^2))(-dx) - (x + 2)\,dx = \int_1^0 (-2x^2 + 2x - 1 - x - 2)\,dx =$
$\int_1^0 (-2x^2 + x - 3)\,dx = \int_0^1 (2x^2 - x + 3)\,dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 3 = \frac{19}{6}$

$\int_{\gamma 3} \mathrm{P\,dy - Q\,dx}$=$\int_1^0 (x^2 + y^2)\,dy - (x + 2)\,dx = \int_1^0 y^2\,dy = -\frac{1}{3}$ και

$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D 2x\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} 2x\,dx\,dy = \int_0^1 [x^2]_0^{1-y}\,dy =$
$\int_0^1 (1-y)^2\,dy = \int_0^1 (1 + y^2 - 2y)\,dy = 1 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3}$. Άρα, $\int_\gamma \mathrm{P}\,\mathrm{dy} - \mathrm{Q}\,\mathrm{dx} = -\frac{5}{2} + \frac{19}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} =$
$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy$.