Εθνικο και Καποδιστριακο Πανεπιστημιο
Αθηνων

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

Ημέρα & Ώρα Εξέτασης: 25/01/2020 20:00

Βασιλικη Μουλα 1112201400465

Αθανασιος Αγακος 1112200222357

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

20 Φεβρουαρίου 2021

Εισαγωγικό Σημείωμα

Στην εργασία αυτή επιλέξαμε για το μέρος α) που αφορά το Διαφορικό Λογισμό το κομμάτι της θεωρίας για τα τοπικά ακρότατα όπου παρουσιάζουμε τη θεωρία της εύρεσης ακροτάτων σε στάδια για τη γενικότερη περίπτωση συναρτήσεων τριών μεταβλητών και γίνεται εφαρμογή της σε παράδειγμα συνάρτησης δύο μεταβλητών, ενώ για το μέρος β) το θεώρημα του Green όπου παρουσιάζουμε το θεώρημα και στη συνέχεια δίνεται ένα συγκριτικό παράδειγμα υπολογισμού ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος. Ο περιορισμός των σελίδων σε 4 - 6 ήταν αρκετά δεσμευτικός και για το λόγο αυτό εστιάσαμε στα απολύτως απαραίτητα εφόσον θα ακολουθήσει και η προφορική εξέταση. Η λιγότερο από μία επιπλέον σελίδα που προκύπτει θα μπορούσε να αποφευχθεί με πιο συμπτυγμένη μορφοποίηση του κειμένου ή αφαιρώντας κάτι ακόμα από το πρώτο μέρος, όμως προτιμήσαμε να μη το κάνουμε ζητώντας την επιείκειά σας. Στην παρακάτω βιβλιογραφία συμπεριλαμβάνονται φυσικά και οι σημειώσεις μαζί με το επιπλέον υλικό από την ηλεκτρονική τάξη του μαθήματος.

Βιβλιογραφία

[Τσί03] Λεωνίδας Ν. Τσίτσας. *Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός*. ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΚΔΟΣΗ. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, 2003. ISBN: 978-960-266-209-0.

[Tro05] Jerold E. Marsden - Antony J. Tromba. *Διανυσματικός Λογισμός*. ΕΝΑΤΗ ΕΚΔΟΣΗ. ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ, 2005. ISBN: 978-960-7309-45-7.

[Χατ09] Τηλέμαχος Ε. Χατζηαφράτης. *Απειροστικός Λογισμός Σε Πολλές Μεταβλητές*. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, 2009. ISBN: 978-960-266-274-8.

[Tho17] George B. Jr. Thomas, Ross L. Finney - Maurice D. Weir - Frank R. Giordano. *Thomas Απειροστικός Λογισμός*. ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ, 2017. ISBN: 978-960-524-182-7.

Μέγιστα και Ελάχιστα - Ακρότατα υπό συνθήκη
Ακρότατα σε κλειστό και φραγμένο σύνολο

Θεωρούμε τη συνάρτηση τριών μεταβλητών $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη όσες φορές θέλουμε. Για την εύρεση των τοπικών ακροτάτων της εργαζόμαστε ως εξής:

(I) Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους f_x, f_y, f_z και λύνουμε το σύστημα

$$\{f_x = 0,\ f_y = 0,\ f_z = 0\}$$

Οι λύσεις του συστήματος αυτού είναι τα **κρίσιμα σημεία** της συνάρτησης f

(II) Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της συνάρτησης f και θεωρούμε τις **πρωτεύουσες ελλάσσονες ορίζουσες** του **Εσσιανού** πίνακά της f

$$\Delta_1 = f_{xx}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

(III) Για κάθε κρίσιμο σημείο υπολογίζουμε τις ποσότητες $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ και ισχύουν οι ισχυρισμοί:

1. Αν $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ τότε η f έχει τοπικό **ελάχιστο** σε αυτό το σημείο
2. Αν $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$ τότε η f έχει τοπικό **μέγιστο** σε αυτό το σημείο
3. Αν $\Delta_2 < 0$ τότε το σημείο αυτό είναι **σαγματικό** σημείο της f
4. Αν $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \Delta_3 \neq 0$ και το σύνολο $\left\{\Delta_1, \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dfrac{\Delta_3}{\Delta_2}\right\}$ περιέχει θετικά και αρνητικά στοιχεία τότε το σημείο αυτό είναι **σαγματικό** σημείο της f

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Λύση:

(I) Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης f είναι

$$f_x = 2x, \qquad f_y = 8y - 1$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία της είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\{f_x = 0, f_y = 0\} \Leftrightarrow \{2x = 0, 8y - 1 = 0\} \Leftrightarrow \left\{x = 0, y = \frac{1}{8}\right\}$$

Άρα η συνάρτηση $f(x,y)$ έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο το $\left(0, \dfrac{1}{8}\right)$

(II) Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x,y)$ είναι

$$f_{xx} = 2, \qquad f_{yy} = 8, \qquad f_{xy} = f_{yx} = 0$$

οπότε έχουμε ότι

$$\Delta_1 = f_{xx} = 2, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

(III) Στο $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ έχουμε

$$\Delta_1 = 2 > 0, \qquad \Delta_2 = 16 > 0$$

Επομένως ισχύει ο ισχυρισμός 1 και η $f(x, y)$ έχει τοπικό **ελάχιστο** στο σημείο αυτό το οποίο είναι ίσο με

$$f\left(0, \frac{1}{8}\right) = 0^2 + 4\left(\frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{8} = \frac{4}{64} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{16}$$

Όταν ζητούνται τα ακρότατα μίας συνάρτησης χωρίς οι μεταβλητές να συνδέονται με κάποια σχέση λέμε ότι έχουμε ελεύθερα ή αδέσμευτα ακρότατα. Πολλές φορές όμως ζητούνται τα ακρότατα όταν οι μεταβλητές αυτές συνδέονται με μία ή περισσότερες σχέσεις (περιορισμούς ή συνοριακές συνθήκες). Τότε λέμε ότι έχουμε ακρότατα υπό συνθήκη ή δεσμευμένα ακρότατα. Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου μας δίνεται μία συνθήκη.

Έστω δύο C^1 πραγματικές συναρτήσεις

$$f = f(x, y, z), \quad g = g(x, y, z) : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

Για την εύρεση των ακροτάτων της f υπό τη δέσμευση $g(x, y, z) = 0$ εργαζόμαστε ως εξής:

(I) Θεωρούμε τη συνάρτηση Lagrange των f και g

$$F = F(x, y, z, \lambda) : U \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in U, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

όπου λ είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange. Οι μεταβλητές x, y, z, λ θεωρούνται μεταξύ τους ανεξάρτητες.

(II) Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους F_x, F_y, F_z, F_λ και θεωρούμε το σύστημα

$$\{F_x = 0, \ F_y = 0, \ F_z = 0, \ F_\lambda = 0\}$$

(III) Επιλύουμε το σύστημα και προσδιορίζουμε τις λύσεις του $(x_i, y_i, z_i, \lambda_i), \ i = 1, 2, \ldots$

(IV) Για καθεμία από τις λύσεις αυτές προσδιορίζουμε το ∇g και αν είναι $\nabla g(x, y, z) \neq \mathbf{0}$ τότε στην αντίστοιχη θέση μπορεί να υπάρχει ακρότατο και ονομάζεται **δεσμευμένο κρίσιμο σημείο** υπό τη **δέσμευση** $g(x, y, z) = 0$

(V) Θεωρούμε τις **πρωτεύουσες ελλάσσονες ορίζουσες** του **Εσσιανού** πίνακά της F

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & g_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & g_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & g_z \\ g_x & g_y & g_z & 0 \end{vmatrix}$$

(VI) Για κάθε κρίσιμο σημείο υπολογίζουμε τις ποσότητες Δ_3, Δ_4 και ισχύουν οι ισχυρισμοί:

1. Αν $\Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0$ τότε η f έχει **υπό συνθήκη** τοπικό **ελάχιστο** σε αυτό το σημείο υπό τη δέσμευση $g(x,y,z) = 0$

2. Αν $\Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0$ τότε η f έχει **υπό συνθήκη** τοπικό **μέγιστο** σε αυτό το σημείο υπό τη δέσμευση $g(x,y,z) = 0$

3. Αν δεν ισχύει καμμία από τις περιπτώσεις 1 και 2 τότε το σημείο αυτό είναι **δεσμευμένο σαγματικό** σημείο της f

Εξ άλλου, αν η ορίζουσα του Εσσιανού πίνακα ισούται με 0, τότε το κριτήριο δεν αποφαίνεται.

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$ υπό τη συνθήκη $x^2 + y^2 = 1$

Λύση:

(I) Η συνθήκη που έχουμε είναι η $x^2 + y^2 - 1 = 0$ όπου $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση Lagrange των f και g

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= x^2 + 4y^2 - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \\ &= (\lambda+1)x^2 + (\lambda+4)y^2 - y - \lambda \end{aligned}$$

(II) Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης F είναι

$$F_x = 2(\lambda+1)x, \quad F_y = 2(\lambda+4)y - 1, \quad F_\lambda = x^2 + y^2 - 1$$

και θεωρούμε το σύστημα

$$\{F_x = 0, F_y = 0, F_\lambda = 0\}$$

(III) Επιλύουμε το σύστημα

$$2(\lambda+1)x = 0 \tag{1}$$

$$2(\lambda+4)y - 1 = 0 \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{3}$$

Η (1) δίνει $x = 0$ ή $\lambda = -1$

- Για $x = 0$
  - Η (3) δίνει $y = \pm 1$
  - Για $y = 1$ η (2) δίνει $\lambda = -\dfrac{7}{2}$ ενώ για $y = -1$ δίνει $\lambda = -\dfrac{9}{2}$

  Οπότε έχουμε τις λύσεις

$$x_1 = 0, y_1 = 1, \lambda_1 = -\frac{7}{2} \quad \text{και} \quad x_2 = 0, y_2 = -1, \lambda_2 = -\frac{9}{2}$$

- Για $\lambda = -1$
  - Η (2) δίνει $y = \dfrac{1}{6}$
  - Για $y = \dfrac{1}{6}$ η (3) δίνει $x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{6}$

  Οπότε έχουμε τις λύσεις

$$x_3 = \frac{\sqrt{5}}{6}, y_3 = \frac{1}{6}, \lambda_3 = -1 \quad \text{και} \quad x_4 = -\frac{\sqrt{5}}{6}, y_4 = -\frac{1}{6}, \lambda_4 = -1$$

(IV) Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ είναι

$$g_x = 2x, \qquad g_y = 2y$$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους για κάθε σημείο και προκύπτει ότι

i. Για $x_1 = 0, y_1 = 1, \lambda_1 = -\dfrac{7}{2}$ είναι $(g_{x_1}, g_{y_1}) = (0,2) \neq \mathbf{0}$

ii. Για $x_2 = 0, y_2 = -1, \lambda_2 = -\dfrac{9}{2}$ είναι $(g_{x_2}, g_{y_2}) = (0,-2) \neq \mathbf{0}$

iii. Για $x_3 = \dfrac{\sqrt{5}}{6}, y_3 = \dfrac{1}{6}, \lambda_3 = -1$ είναι $(g_{x_3}, g_{y_3}) = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}, \dfrac{1}{3}\right) \neq \mathbf{0}$

iv. Για $x_4 = -\dfrac{\sqrt{5}}{6}, y_4 = -\dfrac{1}{6}, \lambda_4 = -1$ είναι $(g_{x_4}, g_{y_4}) = \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}, -\dfrac{1}{3}\right) \neq \mathbf{0}$

Άρα σε όλα τα σημεία μπορεί να υπάρχει ακρότατο

(V) Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της συνάρτησης $F(x,y,\lambda)$ είναι

$$F_{xx} = 2(\lambda+1), \qquad F_{yy} = 2(\lambda+4), \qquad F_{xy} = F_{yx} = 0$$

Υπολογίζουμε την πρωτεύουσα ελλάσσονα ορίζουσα Δ_3

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2(\lambda+1) & 0 & 2x \\ 0 & 2(\lambda+4) & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -8\left((\lambda+4)\,x^2 + (\lambda+1)\,y^2\right)$$

(VI) Για κάθε κρίσιμο σημείο υπολογίζουμε τη Δ_3

i. $\Delta_3 = 20 > 0$ επομένως ισχύει ο ισχυρισμός 2 και η $f(x,y)$ έχει **υπό συνθήκη** τοπικό **μέγιστο** στο σημείο αυτό το οποίο είναι ίσο με

$$f(0,1) = 0^2 + 4\,(1)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

ii. $\Delta_3 = 28 > 0$ επομένως ισχύει ο ισχυρισμός 2 και η $f(x,y)$ έχει **υπό συνθήκη** τοπικό **μέγιστο** στο σημείο αυτό το οποίο είναι ίσο με

$$f(0,-1) = 0^2 + 4\,(-1)^2 - (-1) = 4 + 1 = 5$$

iii. $\Delta_3 = -\dfrac{10}{3} < 0$ επομένως ισχύει ο ισχυρισμός 1 και η $f(x,y)$ έχει **υπό συνθήκη** τοπικό **ελάχιστο** στο σημείο αυτό το οποίο είναι ίσο με

$$f\left(\frac{\sqrt{5}}{6},\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} = \frac{5}{36} + \frac{4}{36} - \frac{6}{36} = \frac{1}{12}$$

iv. $\Delta_3 = -\dfrac{10}{3} < 0$ επομένως ισχύει ο ισχυρισμός 1 και η $f(x,y)$ έχει **υπό συνθήκη** τοπικό **ελάχιστο** στο σημείο αυτό το οποίο είναι ίσο με

$$f\left(-\frac{\sqrt{5}}{6},-\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{6}\right)^2 - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} = \frac{5}{12}$$

Τέλος σύμφωνα με το Θεώρημα Μεγίστης και Ελαχίστης Τιμής η συνάρτηση f λαμβάνει **μεγίστη και ελαχίστη τιμή** σε ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο K. Ο υπολογισμός γίνεται με την ακόλουθη διαδικασία:

(I) Βρίσκουμε τις τιμές της συνάρτησης f στα κρίσιμα σημεία της f, τα οποία ανήκουν στο εσωτερικό $\overset{\circ}{K}$ του K

(II) Βρίσκουμε τις τιμές της συνάρτησης f στα δεσμευμένα τοπικά ακρότατα της f (υπό τις δεσμεύσεις, που ορίζει το σύνορο ∂K), τα οποία ανήκουν στο σύνορο ∂K του K

(III) Συγκρίνουμε τις τιμές της συνάρτησης f, οι οποίες έχουν βρεθεί. Η μεγαλύτερη από τις τιμές αυτές είναι η μεγίστη τιμή και η μικρότερη είναι η ελαχίστη τιμή της συνάρτησης f στο K

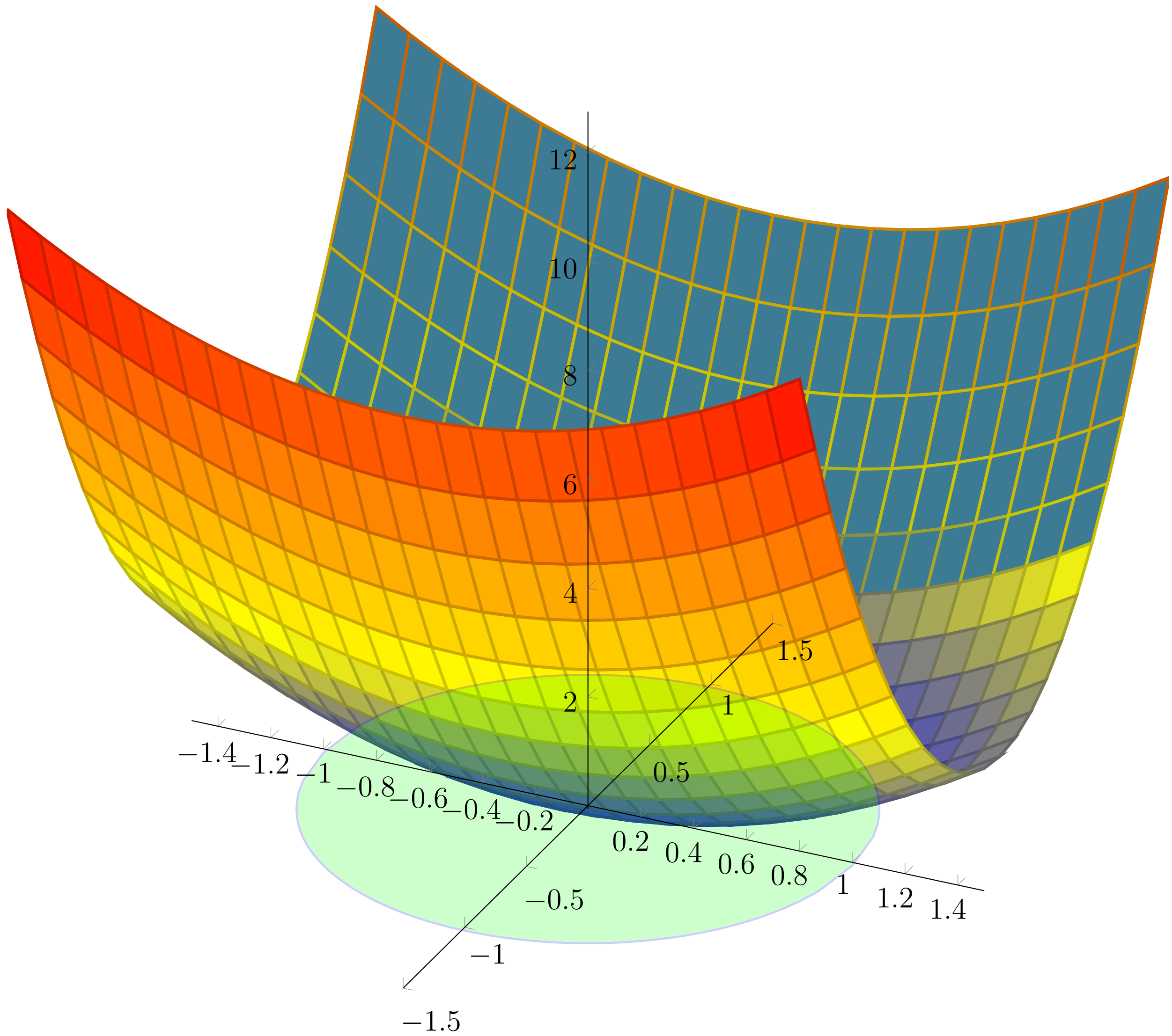
Παράδειγμα: Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$ στο κλειστό σύνολο $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

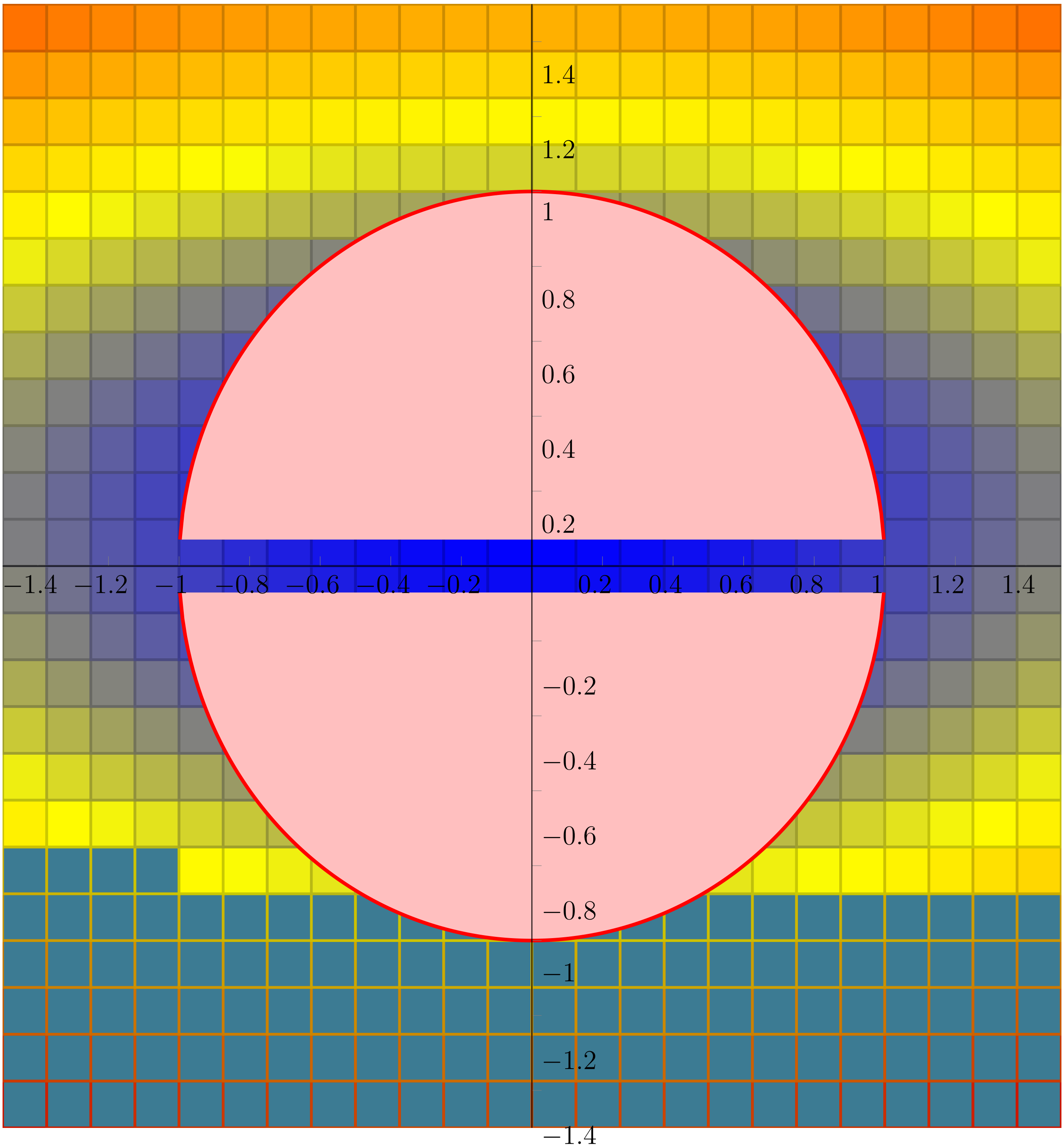
Λύση:

(I) Τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος που επαληθεύουν την ανισότητα $x^2 + y^2 < 1$

(II) Στο σύνορο μελετάμε τα ακρότατα υπό τη συνθήκη $x^2 + y^2 - 1 = 0$

(III) Έχοντας υπολογίσει τις τιμές τους στα προηγούμενα παραδείγματα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει τη μεγίστη τιμή και ελαχίστη τιμή της στα σημεία $(0,-1)$ και $\left(0,\dfrac{1}{8}\right)$ με $f(0,-1) = 5$ και $f\left(0,\dfrac{1}{8}\right) = -\dfrac{1}{16}$ αντίστοιχα.


12
10
8
6
4
2
−1.4
−1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5


1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−1.4
−1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1.2
−1.4

Θεώρημα Green

Η Καμπύλη Jordan του $\mathbb{R}^2$ είναι μια απλή, συνεχής και κλειστή παραμετρική καμπύλη $\Gamma = \Gamma(r)$ που ορίζεται από την παραμέτρηση $r : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Το συμπλήρωμα του Γ είναι $\Gamma^c = \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$ και ισούται με $A \cup B$, όπου A ένα φραγμένο και B ένα μη φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Τα A, B λέγονται εσωτερικό και εξωτερικό της καμπύλης Γ και συμβολίζονται με $\text{int}\Gamma$ και $\text{ext}\Gamma$ αντίστοιχα.

Έστω $\Gamma = \Gamma(r)$ μια προσανατολισμένη καμπύλη Jordan και D ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με $\Gamma \subseteq \partial D$. Λέμε ότι η Γ είναι θετικά προσανατολισμένη ως προς το D, όταν ο προσανατολισμός της συμπίπτει με την φορά κίνησης (αντίθετα από την φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού) και αντιστοίχως αρνητικά προσανατολισμένη.

Θα χρειαστούμε $D_1 = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$ ένα x-απλό χωρίο του $\mathbb{R}^2$ όπου $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι C^1 συναρτήσεις. Έστω $C_1 = \partial D_1$ και $P : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ένα C^1 αριθμητικό πεδίο του $\mathbb{R}^2$ στο D_1. Τότε έχουμε

$$\int_{C_1^+} P dx = -\iint_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \tag{1}$$

Τώρα, έστω $D_2 = \{(x, y) : c \leq y \leq d,\ k(y) \leq x \leq l(y)\}$ το y-απλό χωρίο του $\mathbb{R}^2$, όπου $k, l : [c, d] \to \mathbb{R}$ είναι C^1 συναρτήσεις με $C_2 = \partial D_2$ και $Q : D_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι C^1 αριθμητικό πεδίο του $\mathbb{R}^2$ στο D_2. Τότε, έχουμε

$$\int_{C_2^+} Q dy = \iint_{D_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \tag{2}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1),(2) παίρνουμε το θεώρημα Green.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ GREEN:</u> Έστω D απλό χωρίο του $\mathbb{R}^2$ με

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\} = \{(x, y) : c \leq y \leq d, k(y) \leq x \leq l(y)\}$$

με $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ και $k, l : [c, d] \to \mathbb{R}$ με C^1 συναρτήσεις, $\Gamma = \partial D$ και $\mathbf{F} = (P, Q) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι C^2 διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^2$ στο D. Τότε, ισχύει ο τύπος του Green

$$\int_{\Gamma^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_{\Gamma^+} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

<u>Παράδειγμα:</u> Επαληθεύστε τον τύπο του Green για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y) = (2x, x - y)$ του $\mathbb{R}^2$ στο $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

<u>Λύση</u>:

1. Η καμπύλη $\Gamma = \partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$ είναι C^1 παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τη C^1 παραμέτρηση $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, με $0 \leq t \leq 2\pi$.

   Θεωρούμε στη συνέχεια $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t$ και παίρνουμε $\mathbf{F}(x(t), y(t)) = (4\cos t, 2\cos t - 2\sin t)$ με $\mathbf{r}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$, όπου $0 \leq t \leq 2\pi$.

Συνεπώς, εκμεταλλευόμενοι τον τύπο υπολογισμού του διανυσματικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος, προκύπτει ότι

$$\int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(x(t), y(t)\right) \cdot \mathbf{r}^{'}(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (4\cos t, 2\cos t - 2\sin t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-8\sin t\cos t + 4\cos^2 t - 4\sin t\cos t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (4\cos^2 t - 12\sin t\cos t)dt = \int_0^{2\pi} (2 + 2\cos 2t - 6\sin 2t)dt$$

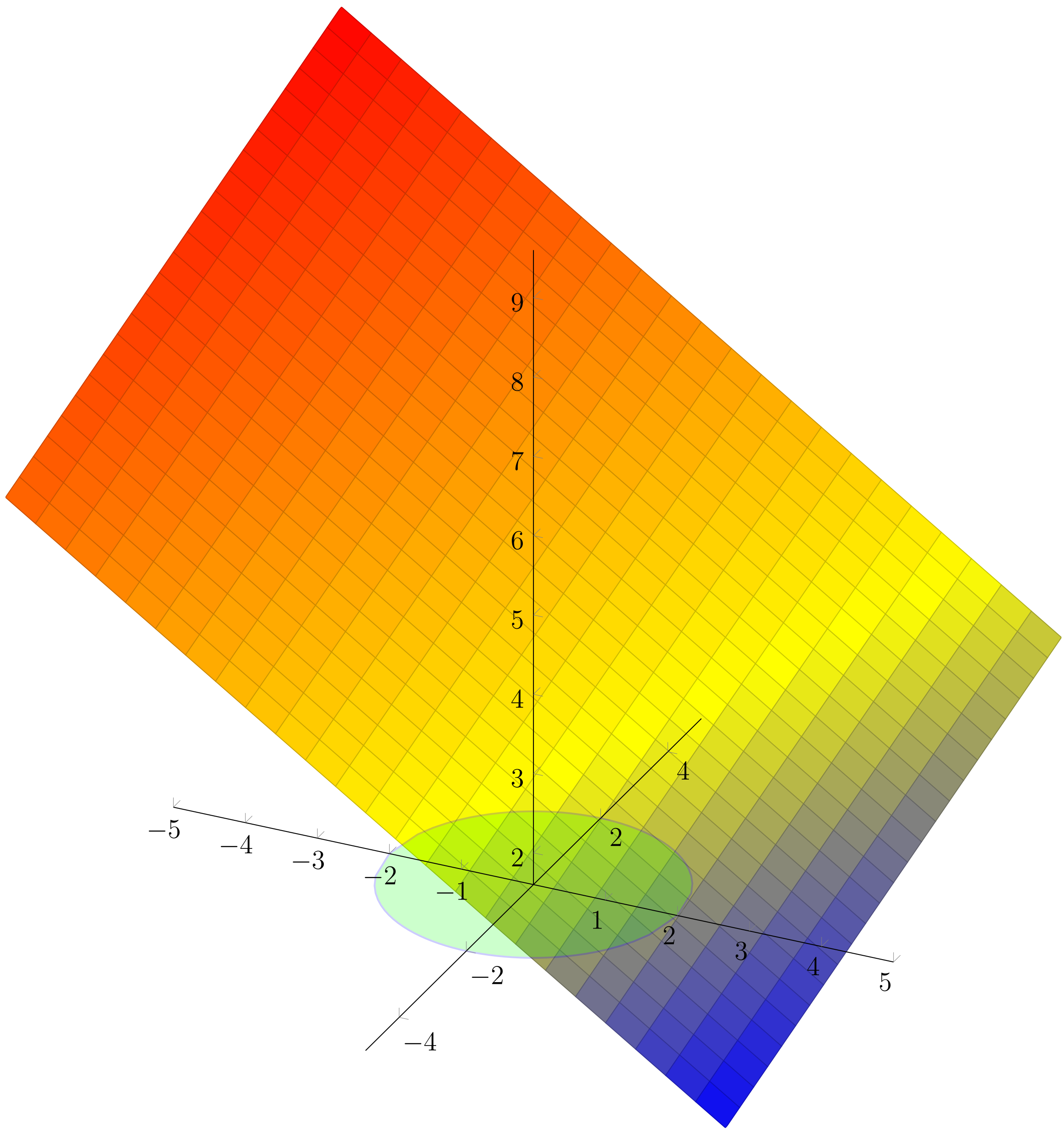
$$= [2t + \sin 2t + 3\cos 2t]_0^{2\pi} = 4\pi$$

2. Επίσης, ισχύει $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$ και $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$. Χρησιμοποιώντας τις πολικές συντεταγμένες $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$ με $0 \le r \le 2$ και $0 \le \theta \le 2\pi$, έπεται ότι

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_D 1dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 2d\theta$$

$$= [2\theta]_0^{2\pi} = 4\pi$$


9
8
7
6
5
4
3
2
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
2
4
−2
−4