ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.4

1. Αποδείξτε τον δεύτερο τύπο του *Λήμματος 2.4.1*, χωρίς να εμπλέξετε την έννοια του ολοκληρώματος.

2. Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases} p(1/x,1/y)e^{-1/(x^2+y^4)} & \alpha\nu\ x\neq 0\ \kappa\alpha\iota\ y\neq 0 \\ 0 & \alpha\nu\ x=0\ \acute{\eta}\ y=0 \end{cases}$$

όπου $p(x,y)$ είναι ένα πολυώνυμο των x,y. Δείξτε ότι για κάθε m,

$$f(x,y)=o\left((x^2+y^2)^{m/2}\right),\ \text{όταν το}\ (x,y)\to(0,0).$$

Είναι σωστό ότι η $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$;

3. Σωστό ή λάθος; Με τις υποθέσεις του *Θεωρήματος 2.4.10* (και τον συμβολισμό της §2.4.8),

$$f(x)=f(a)+\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{|k|=s}\frac{1}{k!}\frac{\partial^s f}{\partial x^k}(a)(x-a)^k$$
$$+\,m\sum_{|k|=m}\frac{(x-a)^k}{k!}\int_0^1\frac{\partial^s f}{\partial x^k}((1-t)a+tx)(1-t)^{m-1}dt\,.$$

4. Σωστό ή λάθος; Το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x^y-x-(x-1)(y-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)-\sin^3(|x-1|+|y-1|)}{|x-1|^3+|y-1|^3}$$

δεν υπάρχει.

5. Προσπαθήστε να βρείτε κανόνες τύπου *l' Hopital* για συναρτήσεις δυο ή περισσοτέρων μεταβλητών.

2.5 Τοπικά ακρότατα και άλλα κρίσιμα σημεία συναρτήσεων

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Θα λέγουμε ότι η συνάρτηση f έχει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο $p\in\Omega$ αν υπάρχει $r>0$ ούτως ώστε $B(p,r)\subset\Omega$ και $f(p)\geq f(x)$ για κάθε $x\in B(p,r)$. Ομοίως η f λέγεται ότι έχει **τοπικό ελάχιστο** σε ένα τέτοιο σημείο p, αν υπάρχει $r>0$ ούτως ώστε $B(p,r)\subset\Omega$ και $f(p)\leq f(x)$ για κάθε $x\in B(p,r)$. Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει μια αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση f για να είναι το σημείο p **τοπικό ακρότατο** (δηλαδή τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο).

2.5.1. Θεώρημα. *Αν*
$p\in\Omega$ *και παρουσιάζει τ*

Απόδειξη. Έπεται σ
Θεωρίας των Συναρτήσε
συνάρτηση πάνω στην ε
διάνυσμα $u\in\mathbb{R}^n$, τότε ο
$t=0$. Συνεπώς

$$\frac{d}{dt}(f(p+tu))\Big|_{t=0}=0$$

Ιδιαιτέρως, $(\partial f/\partial x_j)(p)=$

2.5.2. Ορισμός. Το
συνάρτησης $f:\Omega\to\mathbb{R}$,

Έτσι σύμφωνα με την
τοπικό ακρότατο σε ένα
σημείο της συνάρτησης.
σωστό. Π.χ., για τη συνά
σημείο αλλά βέβαια στο
ελάχιστο, καθώς, όταν τ
τότε $f(x,y)<0=f(0,0)$
η επιφάνεια στο σημείο α

2.5.3. Παραδείγματα.

Το μόνο κρίσιμο σημείο
τοπικό ελάχιστο όταν $\lambda>$
τοπικό μέγιστο όταν $\lambda<$
σαγματικό σημείο όταν λ

Το παράδειγμα αυτό
μιας συνάρτησης δυο μ
υπάρχουν και άλλα ενδε
τοπικό ελάχιστο στο (0,0)

2. Γενικότερα, θεωρήσ

διάνυσμα v_2, ιδιοδιάνυσμα του $T|_{W_1}$ με $|v_2|=1$ και ιδιοτιμή $\lambda_2=\max\{\langle T(x),x\rangle : x\in W_1 \ \kappa\alpha\iota\ |x|=1\}$. Τότε βέβαια το διάνυσμα v_2 είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A (με ιδιοτιμή λ_2) και $\langle v_2,v_1\rangle=0$.

Η κατασκευή που μόλις ολοκληρώσαμε μπορεί να επαναληφθεί υπό την έννοια ότι αν θεωρήσουμε τον γραμμικό υπόχωρο W_2 του $\mathbb{R}^n$ που είναι κάθετος στα διανύσματα v_1 και v_2, δηλαδή $W_2=\{x\in\mathbb{R}^n : \langle x,v_1\rangle=\langle x,v_2\rangle=0\}$ (και $\dim W_2=n-2$), και τον περιορισμό $T|_{W_2}:W_2\to W_2$, βρίσκουμε ιδιοδιάνυσμα v_3 του πίνακα A, με ιδιοτιμή $\lambda_3=\max\{\langle T(x),x\rangle : x\in W_2,\ |x|=1\}$ και έτσι ώστε το σύνολο $\{v_1,v_2,v_3\}$ να είναι ορθοκανονικό. Συνεχίζοντας με αυτόν το τρόπο εύκολα ολοκληρώνουμε την απόδειξη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.5

1. Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων
$f(x,y,z)=x^2+xy+y^2+z^2$, $f(x,y)=xy-x^2-y^2-2x-2y+4$, και
$f(x_1,x_2,x_3.x_4,x_5)=x_1^2+x_2^2+3x_1x_2+4x_4x_5$.

2. Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων
$f(x,y)=12xy-3x^2y-4xy^2$, $f(x,y)=y^3-3x^2y$,
$f(x,y)=x^2+3y^4+4y^3-12y^2$,
$f(x,y)=x^4-2x^2+y^3-6y$, $f(x,y)=(x-1)(x^2-y^2)$,
$f(x,y)=(2x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$.

3. Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων
$f(x,y,z)=xyz(4-x-y-z)$, $f(x,y,z)=x^3-3x-y^3+9y+z^2$,
$f(x,y,z)=(3x^2+2y^2+z^2)e^{-x^2-y^2-z^2}$.

4. Σωστό ή λάθος; Αν η πραγματική συνάρτηση $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ είναι συνεχής για $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le 1$ και C^1 για $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1$, και αν

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|>0 \text{ όταν } x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1,$$

τότε υπάρχουν $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$ και

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)<f(a_1,a_2,\dots,a_n) \text{ όταν } x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1.$$

5. Σωστό ή λάθος; Αν η πραγματική συνάρτηση $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ είναι συνεχής για $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_n^4+|x_1x_2\cdots x_n|\le 1$ και

C^1 για $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4 + |x_1 x_2 \cdots x_n| < 1$, και αν

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| > 0 \text{ όταν } x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4 + |x_1 x_2 \cdots x_n| < 1,$$

τότε υπάρχουν $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4 + |a_1 a_2 \cdots a_n| = 1$ και

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ όταν } x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4 + |x_1 x_2 \cdots x_n| < 1.$$

6. Σωστό ή λάθος; Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι C^2 σε περιοχή του σημείου $0 \in \mathbb{R}^n$ και στο σημείο αυτό η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο τότε

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{2f(x) - 2f(0) - \sum_{j,k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0) x_j x_k}\right)}{e^{|x|} - 1} = 0.$$

2.6 Διαφορισιμότητα συναρτήσεων οριζομένων με ολοκληρώματα

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση που ορίζεται από ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$F(x) = \int_{t=\alpha}^{\beta} f(t,x)\,dt,$$

όπου η συνάρτηση $f = f(t,x) : [\alpha,\beta] \times \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ εξαρτάται από την μεταβλητή $t \in [\alpha,\beta]$, ως προς την οποία ολοκληρώνουμε, καθώς και από μια παράμετρο x, η οποία κινείται σε ένα ανοικτό διάστημα $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ της ευθείας. Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε την εξάρτηση του ολοκληρώματος $F(x)$ από την παράμετρο $x \in \mathrm{I}$. Π.χ., θα απαντήσουμε σε ερωτήματα της μορφής: Κάτω από ποιές συνθήκες είναι η συνάρτηση $F(x)$ συνεχής ή διαφορίσιμη ή C^m ή C^∞;

Ξεκινούμε την μελέτη αυτή με τα ακόλουθα λήμματα.

2.6.1. Λήμμα. *Αν η συνάρτηση* $f = f(t,x) : [\alpha,\beta] \times \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής τότε η συνάρτηση* $F : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *με* $F(x) = \int_{t=\alpha}^{\beta} f(t,x)\,dt$, $x \in \mathrm{I}$, *είναι επίσης συνεχής.*

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός ότι η συνάρτηση $F : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, είναι τοπικός. Έτσι αρκεί να πάρουμε ένα σημείο $x_0 \in \mathrm{I}$, να το σταθεροποιήσουμε και να δείξουμε ότι η συνάρτηση $F : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο x_0. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$, οσοδήποτε μικρό. Ας πάρουμε ένα $r > 0$, αρκετά μικρό ώστε $[x_0 - r, x_0 + r] \subset \mathrm{I}$. Τότε η συνάρτηση $f = f(t,x)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής για $(t,x) \in [\alpha,\beta] \times [x_0 - r, x_0 + r]$, λόγω βέβαια της συνέχειας της συνάρτησης f και της συμπάγειας του συνόλου $[\alpha,\beta] \times [x_0 - r, x_0 + r]$. Επομένως υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ούτως ώστε με $t_1, t_2 \in [\alpha,\beta]$ και $x_1, x_2 \in [x_0 - r, x_0 + r]$,