Εξυπακούεται ότι $k_j \geq 0$. Εν συντομία, θα γράφουμε τις παραγώγους αυτές και ως εξής:

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k},$$

όπου $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ είναι ένας **πολλαπλός δείκτης** και $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.3

1. Θεωρήστε μια συνάρτηση $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ ώστε οι συναρτήσεις φ, φ_x και φ_y να είναι φραγμένες – κοντά στο (0,0) – και επιπλέον να ισχύει

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\varphi(x,y)) \neq \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\varphi(x,y)).$$

Π.χ.,

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}\right)^5 \left(\frac{x^6 - y^6}{x^6 + y^6}\right)^{11} \sin\left(\frac{x^{14} - y^{14}}{x^{14} + y^{14}} \frac{\pi}{2}\right).$$

Εν συνεχεία ορίστε

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\varphi(x,y) & \alpha\nu \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \alpha\nu \ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

και δείξτε ότι $f \in C^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$. Επίσης δείξτε ότι $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του *Laplace*: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

3. Θεωρήστε μια C^2 συνάρτηση $f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, και ορίστε την συνάρτηση

$$\varphi(t) = f(a + \lambda t, b + \mu t) \text{ για } t \in \mathbb{R},$$

όπου $a, b, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\varphi''(0) = \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2\lambda\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + \mu^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b).$$

Βρείτε επίσης ανάλογους τύπους για συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών και παραγώγους ανώτερης τάξης.

4. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t}, \ \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0,$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση της *θερμότητας*: $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

5. Δείξτε ότι αν $f \in C^2(\mathbb{R})$ και $g \in C^1(\mathbb{R})$ τότε η συνάρτηση

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+t) + f(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds, \; x \in \mathbb{R}, \; t \geq 0,$$

ικανοποιεί τα εξής:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; u(x,0) = f(x) \text{ και } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x).$$

(Η ανωτέρω εξίσωση είναι απλούστερη μορφή της *κυματικής εξίσωσης*.)

6. Θέστε $f(x,y,z) = g(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, όπου $g(t)$, $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, είναι δοσμένη C^2 συνάρτηση. Υπολογίστε την παράγωγο $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ για $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$. Αν απαιτήσουμε η f να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ για $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, τί μορφή έχει η f; Διατυπώστε επίσης και λύστε το ανάλογο πρόβλημα για $n = 2$ και για $n \geq 4$.

7. Δείξτε ότι αν $u = f(x + g(y))$ (με $f, g \in C^2$) τότε $u_x u_{xy} = u_y u_{xx}$.

8. Δείξτε ότι αν $u = f(x - \lambda t) + g(x - \lambda t)$ (με $f, g \in C^2$ και λ είναι μια σταθερά $\neq 0$) τότε $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

9. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = x + y$ και $v = x - y$, δείξτε ότι κάθε λύση $f(x,y)$ της εξίσωσης

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

είναι της μορφής $f(x,y) = g(x-y)$, όπου g είναι μια συνάρτηση μιας μεταβλητής (αλλά και αντίστροφα). Γενικότερα λύστε την εξίσωση

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Υπόδειξη: Θέστε $u = \alpha x + \beta y$, $v = \beta x - \alpha y$.

10. Δείξτε ότι αν $u = f(x,y)$ και $x = s^2 - t^2$, $y = 2st$, τότε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4(s^2+t^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

Βρείτε έναν ανάλογο τύπο στην περίπτωση που $x = s^3 - 3st^2$, $y = 3s^2 t - t^3$. Ομοίως στην περίπτωση που $x = e^s \cos t$, $y = e^s \sin t$.

11. Έστω $f(x,y)$ μια C^1 συ

ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{u-v}\left(u\frac{\partial h}{\partial u} -\right.$$

12. Δείξτε ότι $f(x,y) = h(x/$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} =$$

13. Δείξτε ότι μια συνάρτησ

$$f(x,y,z,t) = \frac{g(\lambda t - }{\sqrt{x^2}}$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσω

14. Δείξτε ότι με τον μετασχ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Βρείτε επίσης έναν ανάλογο τύπ

15. Δείξτε ότι με τον μετασχ

$$x = r\sin\phi\cos$$

η ποσότητα

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \text{ γίνεται }$$

16. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{}{(x_1^2 + x}$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσω

17. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{t^{n/2}}e^{-}$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσω

11. Έστω $f(x,y)$ μια C^1 συνάρτηση. Θέτοντας $h(u,v)=f(u+v,uv)$, δείξτε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{u-v}\left(u\frac{\partial h}{\partial u}-v\frac{\partial h}{\partial v}\right) \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{u-v}\left(\frac{\partial h}{\partial v}-\frac{\partial h}{\partial u}\right).$$

12. Δείξτε ότι $f(x,y)=h(x/y)$, για μια συνάρτηση h, αν και μόνο αν $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$. Υπόδειξη: $u=x/y$, $v=x$.

13. Δείξτε ότι μια συνάρτηση της μορφής

$$f(x,y,z,t)=\frac{g(\lambda t-\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad (\text{όπου } g\in C^2,\ \lambda\neq 0)$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\dfrac{1}{\lambda^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$.

14. Δείξτε ότι με τον μετασχηματισμό $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, η ποσότητα

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{γίνεται} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Βρείτε επίσης έναν ανάλογο τύπο για την ποσότητα

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

15. Δείξτε ότι με τον μετασχηματισμό

$$x=r\sin\phi\cos\theta,\ y=r\sin\phi\sin\theta,\ z=r\cos\phi,$$

η ποσότητα

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{γίνεται} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}+\frac{\cot\phi}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}.$$

16. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{n}{2}-1}},\quad (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n-\{0\},$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του *Laplace*: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\cdots+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}=0$.

17. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{t^{n/2}}e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)/4t},\quad (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ t>0,$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση της *θερμότητας*: $\dfrac{\partial f}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\cdots+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

18. Δείξτε ότι αν μια C^2 συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ είναι ομογε
βαθμού λ (όπου $\lambda \in \mathbb{R}$), δηλαδή $f(tx) = t^{\lambda} f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ και κ
$t > 0$, τότε

$$\sum_{1\le j,k\le n} x_j x_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \lambda(\lambda - 1) f(x).$$

Υπόδειξη. Κοιτάξτε την άσκηση 13(**2.2**).

19. Έστω $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ με $|a| = 1$. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$g_a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1 - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}{[(x_1 - a_1)^2 + (x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2]^{n/2}}$$

που ορίζεται για $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n - \{a\}$, ικανοποιεί την διαφορική εξίσ
του *Laplace* (ως προς τις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

20. Έστω $\lambda > 0$. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{xy^{\lambda}}{x^2 + y^2}$,
$(x,y) \ne (0,0)$, και $f(0,0) = 0$, και υπολογίστε τις παραγώγους $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}($
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ αν υπάρχουν. (Προσέξτε τον ορισμό του y^{λ} που θα χρησιμοποι
– μάλλον θα χρειασθεί να περιορίσετε το πεδίο του λ.)

21. Σωστό ή λάθος; Υπάρχει συνάρτηση $f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, η οποία να
χωριστά ως προς x και ως προς y, και η οποία να μην είναι καν συνεχής
«κοινού» ως προς (x,y) – σε κάποιο σημείο).

Υπόδειξη. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $(x,y) \ne (0,0)$, και $f(0,0) = 0$.

22. Σωστό ή λάθος; Υπάρχει συνάρτηση $f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, η οποία ν
χωριστά ως προς x και ως προς y, και η οποία να μην είναι καν φρα
κοντά σε κάποιο σημείο.

Υπόδειξη. $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $(x,y) \ne (0,0)$, και $f(0,0) = 0$.

23. Σωστό ή λάθος; Υπάρχει συνάρτηση $f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, η οπο
είναι *αναλυτική* – χωριστά – ως προς x και ως προς y, και η οποία να μην
καν φραγμένη κοντά σε κάποιο σημείο.

24. Θεωρήστε το σύνολο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$ και μια
συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ ώστε $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ σε κάθε σημείο του D. Έπετ
$f(-x,0) = f(x,0)$ αν $x > 1$;