Ας θεωρήσουμε τώρα το σύνολο

$$W = \{(x,y) \in \Omega : f(x,y) = f(\alpha,\gamma)\}$$

Αφού $(\alpha,\gamma) \in W$, $W \neq \varnothing$. Προφανώς το σύνολο W είναι κλειστό στο Ω. Είναι όμως και ανοικτό στο Ω. Πράγματι αν $(x_0, y_0) \in W$, τότε

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subset \Omega, \text{ για κάποιο } \varepsilon > 0.$$

Και από το πρώτο μέρος της απόδειξης,

$$f\Big|_{[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]\times[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]} \equiv f(x_0,y_0) = f(\alpha,\gamma),$$

οπότε $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subset W$.

Αλλά το Ω υποτίθεται συνεκτικό, συνεπώς, από το *Πόρισμα 1 του Θεωρήματος 1.7.13*, $W = \Omega$, και το συμπέρασμα έπεται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.1

1. Βρείτε μια συνάρτηση $f(x,y)$, ορισμένη για $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, ούτως ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

2. Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, έχει μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$. Είναι η συνάρτηση f συνεχής;

3. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\lambda}} & \textit{για } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \textit{για } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο $(0,0,0)$ αν και μόνο αν $\lambda < 1$.

4. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} & \textit{για } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{για } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$. Εν συνεχεία θέστε $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$, και δείξτε ότι $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos(3\theta)$ για $r \neq 0$. Επίσης δείξτε ότι η συνάρτηση

$$g(r,\theta) = \begin{cases} r\cos(3\theta) & \textit{για } r \neq 0 \\ 0 & \textit{για } r = 0 \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη σε όλα τα σημεία (r,θ).

$(\alpha,\gamma)\}$.

V είναι κλειστό στο Ω. Είναι
V, τότε
ια κάποιο $\varepsilon > 0$.

$) = f(\alpha,\gamma)$,

ς, από το *Πόρισμα 1* του
πεται.

ι $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, ούτως

$) = \frac{y}{x^2+y^2}$.

^{2}, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, έχει μερικές
f συνεχής;

$,y,z)\neq(0,0,0)$

$(0,0,0)$

$)\neq(0,0)$

$=(0,0)$

εχεία θέστε $x=r\cos\theta$ και
$\theta)$ για $r\neq 0$. Επίσης δείξτε

$\neq 0$

$=0$

5. Δείξτε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y}-1-x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \quad \text{και} \quad \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^y-x-2(y-1)\log 2}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}=0.$$

6. Αν υπάρχουν, υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y}-e^{\sqrt{x^2+y^2}}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y}-x-|x|-|y|-1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y}-x-\sqrt{x^2+y^2}-1}{|x|+|y|}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x\cos y}-x-\sin(\sqrt{x^2+y^2})-1}{e^{|x|+|y|}-1}.$$

7. Αν για μια συνάρτηση $f(x,y,z)$ που ορίζεται σε μια περιοχή του σημείου $(0,0,0)$ ξέρετε ότι

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|f(x,y,z)|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0,$$

τί συμπέρασμα βγάζετε για την συνάρτηση αυτή;

8. Υπολογίστε το διαφορικό της συνάρτησης

$$f(x,y)=x^y=e^{y\log x}, \quad x>0,\ -\infty<y<\infty.$$

στα διάφορα σημεία του πεδίου ορισμού της.

9. Υπολογίστε το διαφορικό της συνάρτησης

$$f(x,y)=x^{y^x}=e^{y^x\log x}=e^{(\log x)e^{x\log y}} \quad \text{στο σημείο } (2,3),$$

καθώς και το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^{y^z}$ το σημείο $(2,3,2)$.

10. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y)=(\sin x)^{\cos y}=e^{\cos y\log(\sin x)}$. Αν

$$\lim_{(x,y)\to(\pi/4,\pi/4)} \frac{|f(x,y)-Ax-By-C|}{\sqrt{(x-\pi/4)^2+(y-\pi/4)^2}}=0,$$

τί συμπέρασμα βγάζετε για τους αριθμούς A,B,C;

11. Έστω ότι $f,g\in C^1(D)$ σε ένα ανοικτό σύνολο $D\subset\mathbb{R}^n$. Αν $a\in D$ και

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x)-g(x)|}{|x-a|}=0,$$

τί συμπέρασμα βγάζετε; Είναι δυνατόν να ισχύει η σχέση αυτή και οι συναρτήσεις f,g να μην είναι διαφορίσιμες στο σημείο a; Είναι δυνατόν να ισχύει η σχέση αυτή και οι συναρτήσεις f,g να μην έχουν μερικές παραγώγους στο σημείο a;

12. Σωστό ή λάθος; $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{x\sqrt{1-\cos(xe^y)}}{|x|+|y-a|}=0$ για κάθε $a\in\mathbb{R}$.

13. Σωστό ή λάθος; Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ τότε δεν υπάρχουν $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta\in\mathbb{R}$ έτι ώστε να υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y,z)\to(\alpha,\beta,\gamma)}\frac{x^{y^z}-\mathrm{A}-\mathrm{B}x-\Gamma y-\Delta z+\sin(|x-\alpha|+|y-\beta|+|z-\gamma|)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}.$$

2.2 Διαφορικός λογισμός διανυσματικών συναρτήσεων

2.2.1. Παράγωγοι συναρτήσεων της μορφής

$$g:\mathrm{I}=\{t\in\mathbb{R}:\alpha<t<\beta\}\to\mathbb{R}^n.$$

Ας θεωρήσουμε ένα ανοικτό διάστημα $\mathrm{I}=\{t\in\mathbb{R}:\alpha<t<\beta\}$ στην ευθεία τα πραγματικών αριθμών και μια διανυσματική συνάρτηση $g:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^n$. Μια τέτοι συνάρτηση απεικονίζει σε κάθε σημείο $t\in\mathrm{I}$, ένα διάνυσμ $g(t)=(g_1(t),g_2(t),...,g_n(t))$ του $\mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται **διαφορίσιμ** στο σημείο $\tau\in\mathrm{I}$ αν <u>κάθε</u> μια από τις συναρτήσεις $g_1(t),g_2(t),...,g_n(t)$ είνι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό. Ορίζουμε δε την παράγωγο $g'(\tau)$ σαν τ διάνυσμα με συντεταγμένες τις παραγώγους των $g_j(t)$, δηλαδή

$$g'(\tau)=\frac{dg}{dt}(\tau)\overset{op}{=}\left(\frac{dg_1}{dt}(\tau),\frac{dg_2}{dt}(\tau),...,\frac{dg_n}{dt}(\tau)\right).$$

Είναι ακόμη σαφές ότι

$$g'(\tau)=\lim_{t\to\tau}\frac{g(t)-g(\tau)}{t-\tau}=\lim_{t\to\tau}\left(\frac{g_1(t)-g_1(\tau)}{t-\tau},\frac{g_2(t)-g_2(\tau)}{t-\tau},...,\frac{g_n(t)-g_n(\tau)}{t-\tau}\right).$$

Αν η συνάρτηση $g:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο $t\in\mathrm{I}$ τό ορίζεται μια άλλη διανυσματική συνάρτηση, η παράγωγός της:

$$\frac{dg}{dt}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^n,\quad t\to\frac{dg}{dt}(t).$$

Και αν η συνάρτηση dg/dt είναι συνεχής, τότε η συνάρτηση g λέγετι **συνεχώς διαφορίσιμη** – εν συντομία C^1. (Ανάλογα ορίζονται και οι κλάσε των συναρτήσεων της μορφής $g:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^n$ που είναι C^m, $2\le m\le\infty$.)

Καμπύλες στον χώρο $\mathbb{R}^n$**.** Από γεωμετρικής άποψης μια συνάρτηση τι μορφής $g:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^n$ περιγράφει μια καμπύλη: Σε κάθε σημείο $t\in\mathrm{I}$ αντιστοιχ ένα σημείο του χώρου $\mathbb{R}^n$, το $g(t)$, και όλα αυτά τα σημεία μαζί συνιστούν τι καμπύλη. Μερικές φορές θα γράφουμε $\vec{r}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^n$ αντί $g:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^n$, θέλοντας ν τονίσουμε την διανυσματική φύση των τιμών μιας τέτοιας συνάρτησης. Θ λέγουμε δε ακόμη ότι το **διάνυσμα θέσης** $\vec{r}(t)$ περιγράφει μια καμπύλη – τι καμπύλη γ με παραμετρικές εξισώσεις:

$$x_1=g_1(t),\ x_2=g_2(t),\ \dots,x_n=g_n(t),\quad \alpha<t<\beta.$$

Τέλος, αν $(z_1,...,z_s)$ είναι η μεταβλητή στον $\mathbb{R}^s$, και θεωρήσουμε το $y_1,...,y_n$ σαν συναρτήσεις των $x_1,...,x_m$, και τα $z_1,...,z_s$ σαν συναρτήσεις των $y_1,...,y_n$, μπορούμε να γράψουμε ακόμη ότι

$$\frac{\partial(z_1,....,z_s)}{\partial(x_1,...,x_m)}(a)=\frac{\partial(z_1,....,z_s)}{\partial(y_1,...,y_n)}(b)\cdot\frac{\partial(y_1,...,y_n)}{\partial(x_1,...,x_m)}(a).$$

Ιδιαιτέρως στην περίπτωση που $m=n=s$,

$$\det[(J(f\circ g))(a)]=\det[(Jf)(b)]\cdot\det[(Jg)(a)].$$

Και αν επιπλέον $f\circ g=id$ τότε

$$\det[(Jf)(b)]\cdot\det[(Jg)(a)]=1.$$

Ιδιαιτέρως, τότε,

$$\det[(Jf)(b)]\neq 0 \text{ και } \det[(Jg)(a)]\neq 0.$$

Αν επομένως μια απεικόνιση $g:\Theta\to\mathbb{R}^n$ είναι <u>αντιστρέψιμη</u> κοντά σε ένα σημείο $a\in\Theta$, τότε $\det[(Jg)(a)]\neq 0$. Εννοείται ότι η g είναι διαφορίσιμη, με διαφορίσιμη τοπική αντίστροφη. Π.χ., η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x^3$, έχει συνεχή αντίστροφη την $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(y)=\sqrt[3]{y}$, αλλά $g'(0)=0$. (Το αντίστροφο της προηγουμένης παρατήρησης, ότι δηλαδή αν $\det[(Jg)(a)]\neq 0$, η συνάρτηση g αντιστρέφεται τοπικά στο a, ισχύει επίσης, και είναι το *Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης* – θα το μελετήσουμε στο *Κεφάλαιο 3*.)

Συμβολισμός. Για έναν μετασχηματισμό $T:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, την <u>ορίζουσα</u> του πίνακα *Jacobi* $JT(a)$ (σε ένα σημείο $a\in\Omega$) θα την συμβολίζουμε με $\mathfrak{J}T(a)$ και θα την ονομάζουμε ***Jacobian***. Δηλαδή $\mathfrak{J}T(a)=\det JT(a)$. (Για την <u>**γεωμετρική σημασία**</u> του αριθμού $\mathfrak{J}T(a)$, κοιτάξτε τις §§5.8.1, 6.2.5 και 7.4.8 και τα *Θεωρήματα 5.8.2, 6.2.1 και 7.4.1*.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.2

1. Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}[1-\cos(x^2/y)]\sqrt{x^2+y^2} & \alpha\nu\ \ y\neq 0\\ 0 & \alpha\nu\ \ y=0.\end{cases}$$

Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$, δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και υπολογίστε τις κατευθυνόμενες παραγώγους της f στο $(0,0)$.

στον $\mathbb{R}^s$, και θεωρήσουμε τα
$z_1,\dots,z_s$ σαν συναρτήσεις των

$\cdot \dfrac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}(a)$.

$]\cdot \det[(Jg)(a)]$.

$)]=1$.

$)(a)]\neq 0$.

ναι αντιστρέψιμη κοντά σε ένα
ότι η g είναι διαφορίσιμη, με
$\to \mathbb{R}$ με $g(x)=x^3$, έχει συνεχή
$g'(0)=0$. (Το αντίστροφο της
t$[(Jg)(a)]\neq 0$, η συνάρτηση g
είναι το *Θεώρημα Αντίστροφης*
3.)

$:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, την ορίζουσα
$\in\Omega$) θα την συμβολίζουμε με
ή $\mathcal{J}T(a)=\det JT(a)$. (Για την
ξτε τις §§5.8.1, 6.2.5 και 7.4.8

^{2} αν $y\neq 0$
αν $y=0$.

εν είναι διαφορίσιμη στο (0,0)
ης f στο (0,0).

2. Θεωρήστε την καμπύλη στον xyz − χώρο με παραμετρικές εξισώσεις

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=e^t,\ -\infty<t<+\infty,$$

και γράψτε εξισώσεις για την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(0,1,e^{\pi/2})$. Επίσης γράψτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στην καμπύλη στο σημείο αυτό.

3. Μια συνάρτηση μπορεί σε κάποιο σημείο να έχει μερικές παραγώγους (πρώτης τάξης) αλλά να μην έχει κατευθυνόμενη παράγωγο σε καμιά άλλη κατεύθυνση (δηλαδή εκτός από τις κατευθύνσεις των αξόνων). Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{για } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{για } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

4. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει κατευθυνόμενες παραγώγους σε κάθε κατεύθυνση – σε κάποιο σημείο – και εν τούτοις να μην είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{για } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{για } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Επίσης δείξτε ότι δεν ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας – όταν διαφορίσουμε την σύνθεση $f(\alpha t,\beta t)$ ως προς το t για $t=0$ (όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha\beta\neq 0$).

5. Αν $f(x,y)$ είναι συνάρτηση των x,y και $x=x(t)$ και $y=y(t)$ είναι συναρτήσεις της μεταβλητής t, τότε

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\quad \text{(κανόνας της αλυσίδας).}$$

Επαληθεύσατε τον ανωτέρω τύπο στις περιπτώσεις:

(i) $f(x,y)=x^3e^{xy^2}$, $x=t^2$, $y=\sin t$

(ii) $f(x,y)=x^y$, $x=t^2$, $y=t^3$.

(iii) $f(x,y)=(\log x)^y$, $x=e^t$, $y=t$.

6. Θεωρήστε μια C^1 − συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα ανοικτό και κυρτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$|f(x)-f(y)|\leq\left(\sup_{z\in\Omega}|\nabla f(z)|\right)|x-y|,\ \text{για κάθε } x,y\in\Omega.$$

7. Σε ποιά κατεύθυνση, η συνάρτηση $f(x,y)=xe^y+x^2y+y^2$ έχει την πιο απότομη μεταβολή στο σημείο $(1,-2,-5)$;

8. Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $z = 2x^2 + y^2$, στο σημείο $(-1,2,6)$.

9. Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $z^2 = 2x^2 + y^2$, στο σημείο $(-1,2,\sqrt{6})$.

10. Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $2x^2 + y^2 + 5z^2 = 16$, στο σημείο $(1,-3,1)$.

11. Θεωρήστε την καμπύλη $\mathcal{C}$ στον $xyz-$χώρο η οποία είναι η τομή των επιφανειών με εξισώσεις $z = y^2 - 3x^2$ και $z^2 + y^2 = 2$, και γράψτε εξισώσεις για την ευθεία που είναι εφαπτόμενη στην $\mathcal{C}$ στο σημείο $(0,1,1)$.

12. Δείξτε ότι οι εξισώσεις

$$(x(t), y(t)) = \begin{cases} \left(e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}\right) & \alpha\nu \quad t > 0 \\ (0,0) & \alpha\nu \quad t = 0 \\ \left(-e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}\right) & \alpha\nu \quad t < 0 \end{cases}$$

ορίζουν μια C^∞ παραμέτρηση της καμπύλης $y = |x|$ στο $xy-$επίπεδο.

13. *(Θεώρημα του Euler)* Δείξτε ότι μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ είναι ομογενής βαθμού λ (όπου $\lambda \in \mathbb{R}$), δηλαδή $f(tx) = t^\lambda f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ και κάθε $t > 0$, αν και μόνο αν η f ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lambda f(x).$$

Υπόδειξη. Για την μια κατεύθυνση, διαφορίστε την σχέση $f(tx) = t^\lambda f(x)$ ως προς t. Για το αντίστροφο θεωρήστε την συνάρτηση $\phi(t) = t^{-\lambda} f(tx)$ και δείξτε ότι $\phi'(t) = 0$.

14. Για $a_m \in \mathbb{R}$, θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{m=1}^{N} \frac{a_m}{(x_1^{2m} + x_2^{2m} + \cdots + x_n^{2m})^{1/2m}}$$

και δείξτε ότι ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = -f.$$

15. Εξηγήστε γιατί το σύνολο $C^1(\mathbb{R}^n)$ (με τις συνήθεις πράξεις) είναι γραμμικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$. Εν συνεχεία θεωρήστε τον τελεστή εφαπτόμενου της επιφάνειας με

εφαπτόμενου της επιφάνειας με

εφαπτόμενου της επιφάνειας με
).

χώρο η οποία είναι η τομή των
$^2 = 2$, και γράψτε εξισώσεις για
ιμείο $(0,1,1)$.

αν $t>0$
αν $t=0$
) αν $t<0$

$|x|$ στο $xy-$επίπεδο.

μια διαφορίσιμη συνάρτηση
λ (όπου $\lambda\in\mathbb{R}$), δηλαδή
: $t>0$, αν και μόνο αν η f

).

την σχέση $f(tx)=t^{\lambda}f(x)$ ως
ηση $\phi(t)=t^{-\lambda}f(tx)$ και δείξτε

n
$\cdots+x_n^{2m})^{1/2m}$

τις συνήθεις πράξεις) είναι
θεωρήστε τον τελεστή

$T:C^1(\mathbb{R}^n)\to C^1(\mathbb{R}^n)$, που ορίζεται από την σχέση: $T(f)=\partial f/\partial x_1$ για $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$. Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός και ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι ιδιοτιμή του. Υπόδειξη: $e^{\lambda x_1}$.

16. Δείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι ιδιοτιμή του γραμμικού τελεστή

$$S:C^1(\mathbb{R}^n)\to C^1(\mathbb{R}^n),\ S(f)=\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\ \text{ για } f\in C^1(\mathbb{R}^n).$$

17. Υλικό σημείο μάζας m ευρίσκεται σε ύψος h από οριζόντιο επίπεδο και βάλλεται οριζοντίως με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$, εννοείται μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Μετά από λίγο χρόνο τ (το τ υποτίθεται μικρό) ασκείται πάνω σε αυτό μια οριζόντια δύναμης $\vec{F}_0$, και το κινεί σε συνδυασμό με το βάρος του, μέχρις ότου αυτό συναντήσει το οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογίστε ακριβώς το σημείο που αυτό θα συναντήσει το οριζόντιο επίπεδο, τον χρόνο που θα κινηθεί μέχρι που να συναντήσει το επίπεδο αυτό, καθώς και την ταχύτητα που θα έχει την στιγμή αυτή.

2.3 Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

2.3.1. Συναρτήσεις δυο μεταβλητών και μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης. Θα θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση των συναρτήσεων δυο μεταβλητών. Έστω λοιπόν μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ορισμένη πάνω στο ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ και ας συμβολίζουμε με (x,y) την μεταβλητή σε αυτό. Έστω ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι συναρτήσεις

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\Omega\to\mathbb{R}\quad\text{και}\quad\frac{\partial f}{\partial y}:\Omega\to\mathbb{R}.$$

Αυτές οι συναρτήσεις με τη σειρά των ενδέχεται να έχουν μερικές παραγώγους, ως προς x ή ως προς y:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right):\Omega\to\mathbb{R},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right):\Omega\to\mathbb{R},\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right):\Omega\to\mathbb{R},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right):\Omega\to\mathbb{R}.$$

Π.χ., αν $f(x,y)=x\cos(ye^{xy})$ τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos(ye^{xy})-xy^2e^{xy}\sin(ye^{xy})\quad\text{και}\quad\frac{\partial f}{\partial y}=-x(1+xy)e^{xy}\sin(ye^{xy}).$$

Και $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=-2\sin(ye^{xy})y^2e^{xy}-xy^3\sin(ye^{xy})e^{xy}-xy^4\cos(ye^{xy})e^{2xy}$,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=-(1+3xy+x^2y^2)e^{xy}\sin(ye^{xy})-xy^2(1+xy)e^{2xy}\cos(ye^{xy}),$$