Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

Ηλεκτρονική Τάξη: http://eclass.uoa.gr

Σημειώσεις Φοιτητών

Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Μάθημα:

301. Απειροστικός λογισμός ΙΙΙ

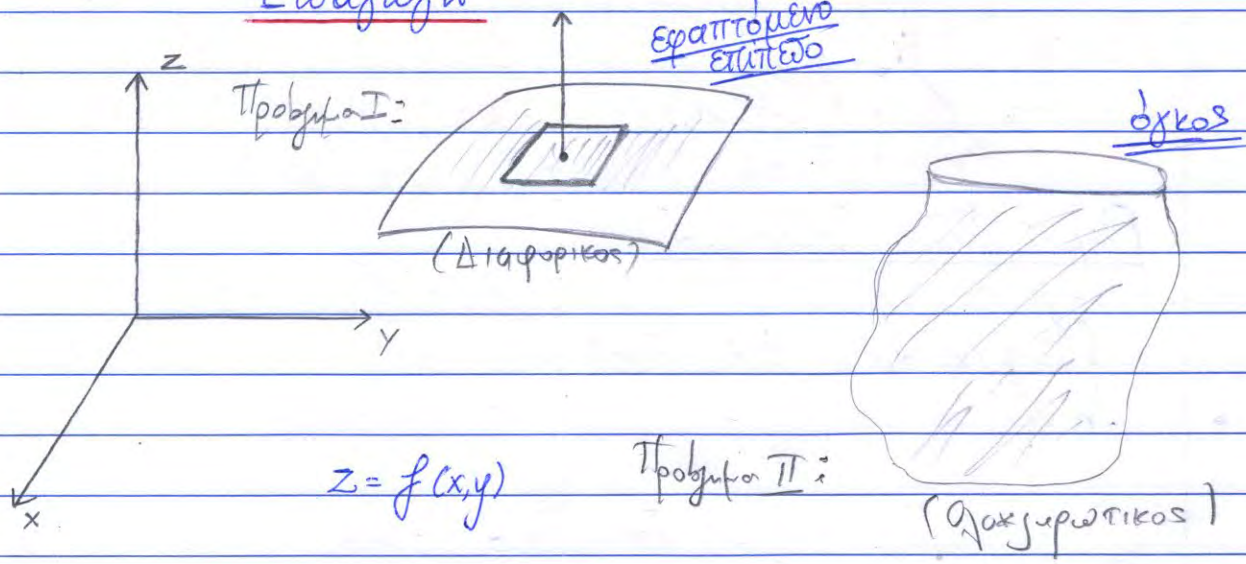
Διδάσκων: Ν. Αλικάκος

Ευχαριστούμε για τις σημειώσεις τους : Γεράσιμος & Ηλίας

Πακέτο Σημειώσεων 1 / Φυλλάδιο Ασκήσεων 1.

Διάλεξη 1

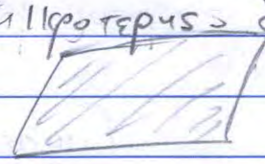
Εισαγωγή



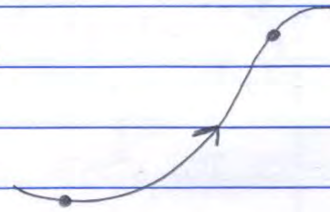
Διαφορές $\mathbb{R}^1$ με τον $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$

- Δεν υπάρχει διαφορά στην Γενική Τοπολογία
- Υπάρχει διαφορά στην Γεωμετρία
- Δυσκολία στον $\mathbb{R}^3$: Η μέτρηση συνόλων μικρότερης διάστασης

Π.χ. ($\cancel{\mathbb{R}^2}$) Εμβαδόν Επιφάνειας
(2-διαστάσεις)



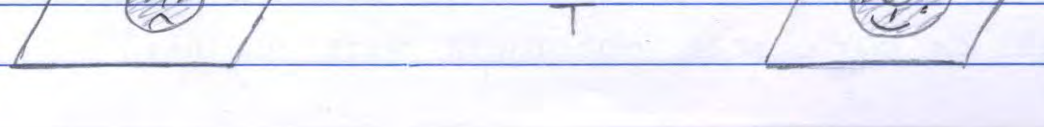
($\cancel{\mathbb{R}^1}$) Μήκος Καμπύλης
(1-διάσταση)



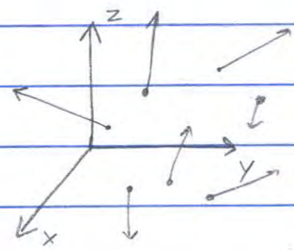
- Στον $\mathbb{R}^n$ δεν υπάρχει διάταξη

Αντικείμενα μελέτης

Μετασχηματισμοί : $T(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$



Διανυσματικά Πεδία :



Θεμελιώδες Θεώρημα :

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

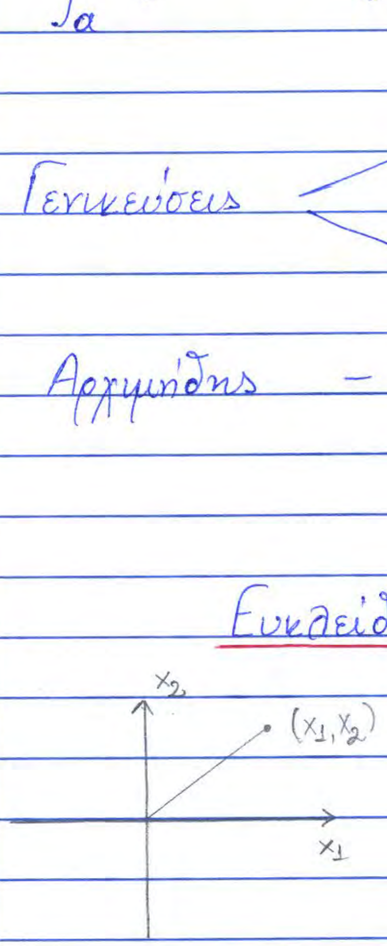
Γενικεύσεις → Θεώρημα Green

Γενικεύσεις → Θεώρημα Απόκλισης (Gauss)

Αρχιμήδης — Όγκος
Εμβαδόν Σφαίρας ~ Newton-Leibniz
...

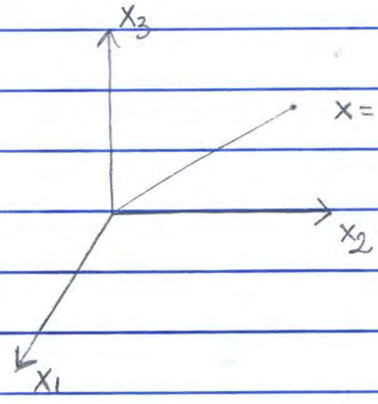
Ευκλείδειος $\mathbb{R}^n$

A)



$x = (x_1, x_2)$
(Καρτεσιανό Επίπεδο (Descartes))

(Καρτεσιανός Χώρος)

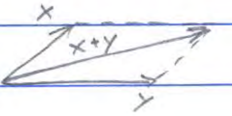


$x = (x_1, x_2, x_3)$

Γενικότερα ...

Διανυσματικός Χώρος

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$



$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

$ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$, $(a \in \mathbb{R})$

Β) Απόσταση - Προβολή

1) Εσωτερικό Γινόμενο

$$\langle x, y \rangle \equiv x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

2) Νόρμα

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} = \left(\langle x, x \rangle \right)^{1/2} = \left(x \cdot x \right)^{1/2}$$

3) Ανισότητες

α) Cauchy - Schwartz : $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \le \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

β) Τριγωνική Ανισότητα : $\|\vec{x} + \vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

Απόδειξη Cauchy - Schwarz

- Για $\vec{x} = \vec{0}$ ή $\vec{y} = \vec{0}$ η ανισότητα ισχύει ως ισότητα

- Έστω ότι $\|x\| = \|y\| = 1$.
  Τότε ισχύει $|x_i y_i| \le \dfrac{x_i^2 + y_i^2}{2}$, $i = 1, \dots, n$

$ab \le \dfrac{a^2 + b^2}{2}$

Άρα $\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Επομένως στην περίπτωση αυτή ισχύει ως ισότητα

• Θέτουμε $x_i' = \dfrac{x_i}{\|x\|}$ και $y_i' = \dfrac{y_i}{\|y\|}$, $1 \le i \le n$

Από την προηγούμενη περίπτωση έπεται:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i' y_i'\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\|x\|}\cdot\frac{y_i}{\|y\|}\right)\right| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{\|x\|}\cdot\frac{|y_i|}{\|y\|} \le 1.$$

Εφόσον $\sum x_i'^2 = \sum y_i'^2 = 1$

Έπεται ότι $\left|\sum x_i y_i\right| \le \|x\|\cdot\|y\|$

Δηλαδή $|x\cdot y| \le \|x\|\,\|y\|$

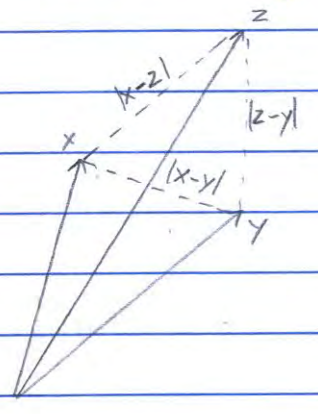
Απόδειξη Τριγωνικής Ανισότητας:

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \iff \|x+y\|^2 \le (\|x\|+\|y\|)^2$$
$$\iff (x+y)\cdot(x+y) \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\|$$
$$\iff \cancel{x\cdot x} + 2x\cdot y + \cancel{y\cdot y} \le \cancel{x\cdot x} + \cancel{y\cdot y} + 2\|x\|\,\|y\|$$

Δηλαδή $x\cdot y \le \|x\|\,\|y\|$ (ισχύει (Cauchy-Schwarz))

Γεωμετρική Ερμηνεία

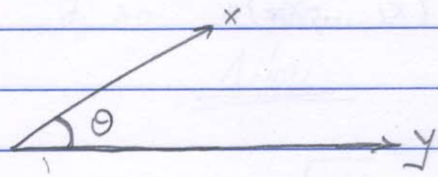
$$x-z = (x-y) + (y-z)$$
$$\|x-z\| \le \|x-y\| + \|y-z\|$$



$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$$

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

Γωνία



$$\cos\theta := \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}$$

$\theta = \arccos \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$

Συμπεράσματα:

1) $x \perp y \iff x \cdot y = 0$

2) Ισότητα στην C-S $\iff$ τα διανύσματα $\parallel$ $(\vec{x} = \lambda \vec{y})$

Ορθοκανονική Βάση (Ο.Κ.Β)

$e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$

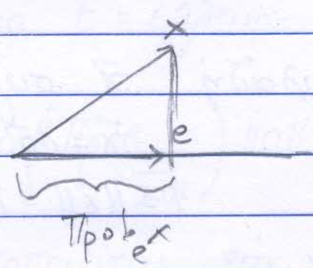
↑ i-θέση

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$\|e_i\| = 1$ και $e_i \perp e_j$

Προβολή

$\vec{e}, \ \|e\| = 1$



$\text{Προβ}_{\vec{e}} \vec{x} := (x \cdot e) \cdot e$

Παραδείγματα - Ασκήσεις

1) $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sqrt{n}\, \|x\|$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

Λύση

i) Έστω $x_i \geq 0$

$|\langle x, (1,1,\dots,1)\rangle| \overset{C-S}{\leq} \|x\| \cdot \|(1,1,\dots,1)\| \iff$

$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq \|x\| \sqrt{1^2+1^2+\dots+1^2} \overset{x_i \geq 0}{\iff}$

$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq \sqrt{n}\, \|x\| \iff$

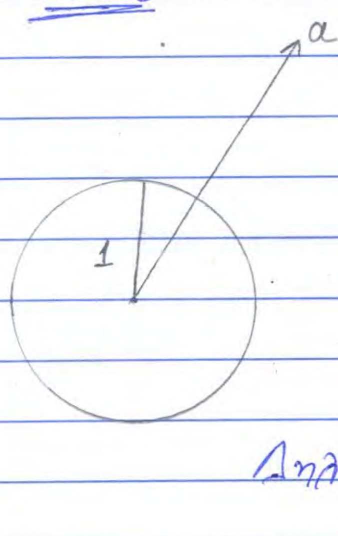
$\sum |x_i| \leq \sqrt{n}\, \|x\|$

ii) Θεωρούμε $\vec{y} = (|x_1|, \dots, |x_n|)$

$\Rightarrow \sum |x_i| \leq \sqrt{n}\, \|y\| = \sqrt{n}\, \|x\|$ ∎

2) $\sup\{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} = \|a\|$

Λύση



$a \neq 0$

$\|x\| = 1$ $\quad S^{n-1}$ σφαίρα

$a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n x_n = \vec{a} \cdot \vec{x} \leq \|a\| \|x\| = \|a\|$

ισότητα $x = \dfrac{a}{\|a\|}$

Δηλαδή $\vec{x}$ συγγραμμικό του $\vec{a}$

$\vec{x} = \lambda \vec{a}$

$1 = \|\vec{x}\| = \lambda \|a\| \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{\|a\|}$.

∎

3) $\sup\{a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n x_n \mid \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = 1\} = \sqrt{\frac{a_1^2}{\lambda_1} + \dots + \frac{a_n^2}{\lambda_n^2}}$

με $\lambda_i > 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$

Λύση

Θέτουμε $y_i = \sqrt{\lambda_i}\, x_i$ τότε $x_i = \frac{y_i}{\sqrt{\lambda_i}}$, $\Sigma y_i^2 = 1$.

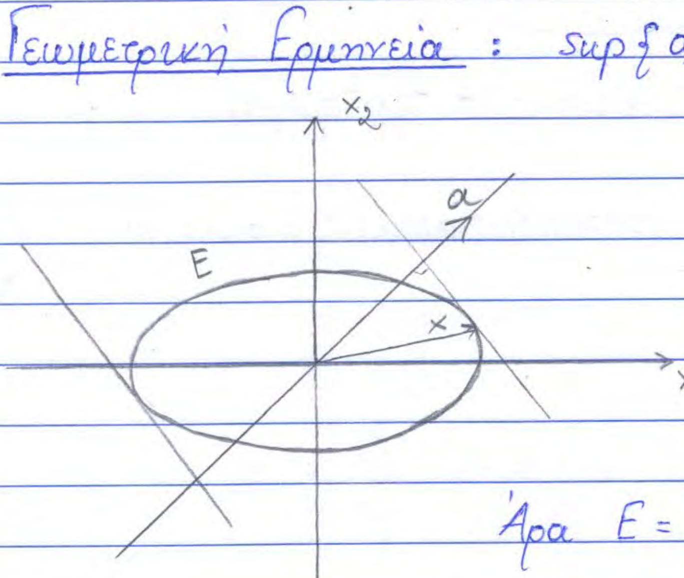
Παρατηρούμε ότι $a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n x_n = a_1 \frac{y_1}{\sqrt{\lambda_1}} + \dots + a_n \frac{y_n}{\sqrt{\lambda_n}}$

$$= \frac{a_1}{\sqrt{\lambda_1}} y_1 + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} y_n$$

Απο την προηγούμενη άσκηση παίρνουμε ότι

$$\sup\left\{\frac{a_1}{\sqrt{\lambda_1}} y_1 + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} y_n\right\} = \left\|\frac{a}{\sqrt{\lambda}}\right\| = \sqrt{\frac{a_1^2}{\lambda_1} + \dots + \frac{a_n^2}{\lambda_n}}$$

Γεωμετρική Ερμηνεία : $\sup\{a_1 x_1 + a_2 x_2 \mid \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1\}$



$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1.$

$\Rightarrow \frac{x_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{x_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} = 1.$

Άρα E = έλλειψη , $x \in E$

$$\sup\left(\frac{a}{\|a\|} \cdot x\right) \|a\| = \sup\left(\text{Προβ}_{\frac{a}{\|a\|}} x\right) \|a\|$$

Η προβολή $x \in E$ μεγιστοποιείται εάν η εφαπτόμενη στο x είναι κάθετη στο a $\Leftrightarrow$

$$\lambda_2 x_2 a_1 = \lambda_1 x_1 a_2$$

Υπολογίζουμε την ποσότητα $F = a_1 x_1 + a_2 x_2$

$$F = a_1 x_1 + a_2 x_2 = \frac{\lambda_1 x_1^2 a_2}{\lambda_2 x_2} + a_2 x_2 = \frac{a_2}{\lambda_2 x_2}$$

Υπολογίζουμε το x_2

$$x_1 = \frac{\lambda_2 x_2 a_1}{\lambda_1 a_2}, \quad \lambda_1 \left(\frac{\lambda_2 x_2 a_1}{\lambda_1 a_2} \right)^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1$$

$$\Rightarrow |x_2| = \frac{1}{\left[\frac{(\lambda_2 a_1)^2 + \lambda_1 \lambda_2 a_2^2}{\lambda_1 a_2^2} \right]^{1/2}}$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε $F = \left(\frac{a_1^2}{\lambda_1} + \frac{a_2^2}{\lambda_2} \right)^{1/2}$

$F(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 \qquad G(x_1, x_2) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$

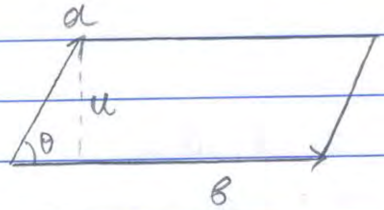
$\nabla F = \lambda \nabla G$ (πολλαπλασιαστές Lagrange) $\blacksquare$

$\boxed{\text{Διάλεξη 2}}$

Ασκήσεις (συνέχεια)

4) Δείξτε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $E = \left(\|a\|^2 \|b\|^2 - (a \cdot b)^2 \right)^{1/2}$

Λύση



$$\|a\|^2\|\beta\|^2 - (a\cdot\beta)^2 =$$
$$= \|a\|^2\|\beta\|^2 - (\|a\|^2\|\beta\|^2\cos^2\theta)$$
$$= \|a\|^2\|\beta\|^2(1-\cos^2\theta)$$
$$= \|a\|^2\|\beta\|^2\sin^2\theta$$
$$= (\|a\|^2\sin^2\theta)(\|\beta\|^2)$$
$$= u^2\|\beta\|^2$$
$$= E^2$$

∎

5) R^4, $e_1=(1,0,0,0)$, $e_2=(0,1,0,0)$, $e_3=(0,0,1,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$

Έστω $a_1 = \frac{1}{5}(3e_1+4e_3)$ $a_2=\frac{1}{5}(4e_2-3e_4)$ $a_3=\frac{\sqrt{2}}{10}(-4e_1+3e_2+3e_3-4e_4)$

a_1, a_2, a_3 ανα δύο κάθετα και $\|a_1\|=\|a_2\|=\|a_3\|=1$.
Βρείτε a_4 τέτοιο ώστε $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ ο.κ σύστημα

Λύση

Είναι $a_1 = \frac{1}{5}\left(3(1,0,0,0)+4(0,0,1,0)\right) = \frac{1}{5}\left((3,0,0,0)+(0,0,4,0)\right)$

$= \frac{1}{5}(3,0,4,0)$

Όμοια $a_2 = \frac{1}{5}(0,4,0,-3)$

και $a_3 = \frac{\sqrt{2}}{10}(-4,3,3,-4)$

Έστω $a_4 = (x,y,z,w)$

Για να είναι $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ ορθοκανονικό σύστημα πρέπει a_i κάθετα ανα δύο και $\|a_i\|=1$, $i=1,\dots,4$

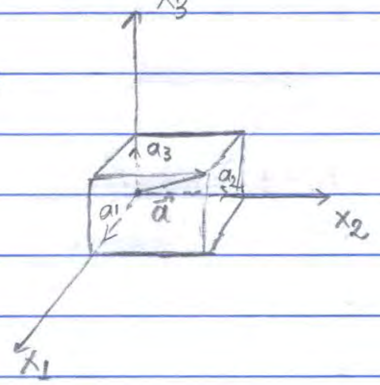
Επομένως
$$\left.\begin{array}{l} 3x+4z=0 \\ 4y-3w=0 \\ -4x+3y+3z-4w=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z=-\frac{3}{4}x \\ y=\frac{75}{28}x \\ w=\frac{100}{28}x \end{array}$$

και $x^2+y^2+z^2+w^2=1$ ...

∎

Γεωμετρία Στον $\mathbb{R}^n$

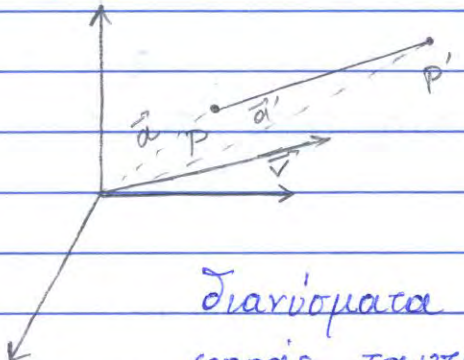
A $\mathbb{R}^3$



$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

όπου $\vec{i} = \vec{e_1}$, $\vec{j} = \vec{e_2}$, $\vec{k} = \vec{e_3}$

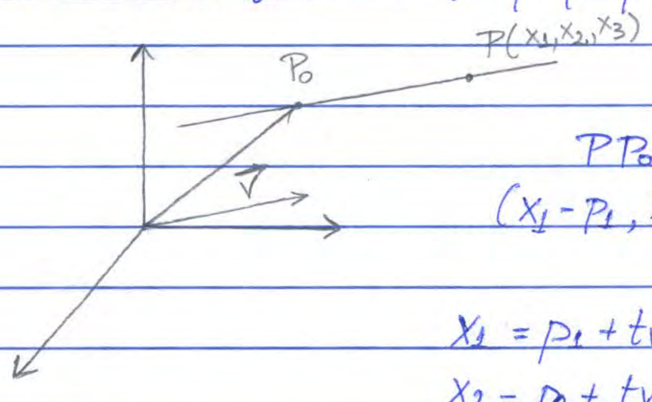
B Διάνυσμα που συνδέει δύο σημεία $P = (x_1, x_2, x_3)$ και $P' = (x_1', x_2', x_3')$ - Ευθεία



$$PP' = (x_1' - x_1, x_2' - x_2, x_3' - x_3)$$

διανύσματα του ίδιου μήκους και της ίδιας φοράς ταυτίζονται και αντιπροσωπεύονται από διάνυσμα με αρχή την αρχή των αξόνων.

Γ Εξίσωση Ευθείας μέσω $P_0 = (p_1, p_2, p_3)$, παράλληλης στο $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ (παραμετρική)



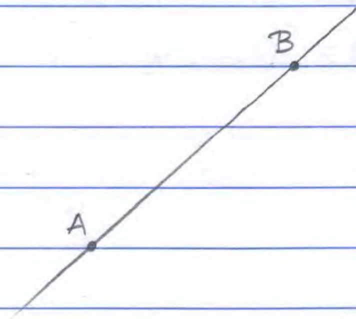
$$PP_0 = t\vec{v} \quad , t \in \mathbb{R} \iff$$

$$(x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3) = t(v_1, v_2, v_3) \iff$$

$$x_1 = p_1 + tv_1$$
$$x_2 = p_2 + tv_2$$
$$x_3 = p_3 + tv_3$$

Εφαρμογή 1: Βρείτε την παραμετρική εξίσωση ευθείας μέσω $A=(2,3,4)$ και $B=(5,6,8)$

Λύση

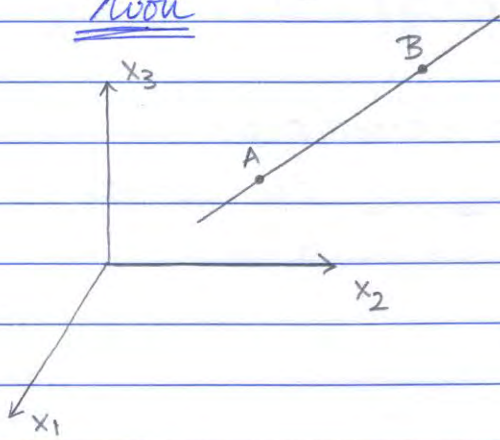


$$\vec{V} = \overrightarrow{AB} = (5-2\ ,\ 1-3,\ 8-4)$$
$$= (\ 3\ ,-2\ ,4)$$

$$x_1 = 2+3t$$
$$x_2 = 3+(-2)t$$
$$x_3 = 4+(-4)t$$

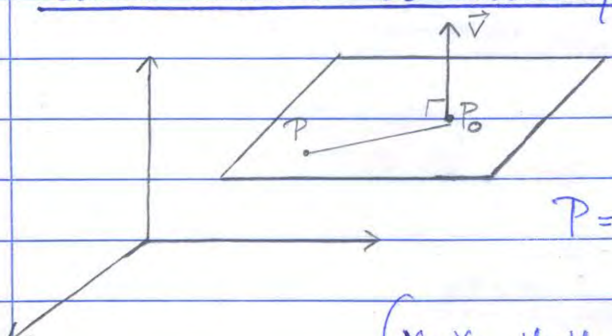
Εφαρμογή 2: Περιγράψτε το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ του A,B στην παραπάνω εφαρμογή.

Λύση



$$L = \{tA + (1-t)B \mid 0 \leq t \leq 1\}$$
$$= \{t(2,3,4) + (1-t)(5,6,8) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

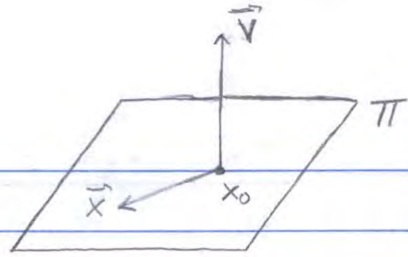
$\boxed{\Delta}$ Εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από σημείο P_0 και είναι κάθετο σε διάνυσμα $\vec{v}$



$$\overrightarrow{PP_0} \perp \vec{V}$$
$$\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$$
$$P = (x,y,z) \quad , P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$(x-x_0\ ,\ y-y_0\ ,z-z_0)\cdot(v_1, v_2, v_3) = 0 \iff$$
$$(x-x_0)v_1 + (y-y_0)v_2 + (z-z_0)v_3 = 0 \iff$$
$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = \boxed{x_0v_1 + y_0v_2 + z_0v_3 = C} \iff$$

$$(x,y,z)\cdot\vec{V} = C$$



$\boxed{E}$ Εξίσωση Υπερεπιπέδου στον $\mathbb{R}^n$

Το υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο $\Pi = \{\vec{x}\cdot\vec{v} = c\}$
όπου $\vec{v} \neq \vec{0}$ και $c \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad \vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$

- $c = 0$ αν και μόνο αν το επίπεδο διέρχεται από την αρχή των αξόνων

- Έστω $x_0 \in \Pi \Leftrightarrow \vec{x_0}\cdot\vec{z} = c$.
  Δοθέντος $\vec{x} \in \Pi$, $\vec{x}\cdot\vec{z} = \vec{x_0}\cdot\vec{z} \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{x_0})\cdot\vec{z} = 0$

- $\Pi_1 = \{\vec{x}\cdot\vec{v} = c_1\}$, $\Pi_2 = \{\vec{x}\cdot\vec{v} = c_2\}$ τότε $\Pi_1 \parallel \Pi_2$

Εφαρμογή 1: Βρείτε το υπερεπίπεδο Π στον $\mathbb{R}^4$ που περιέχει τα e_1, $e_1 + 2e_2$, $e_2 + 3e_3$, $e_3 + 4e_4$

Λύση

$\Pi = \{\vec{x}\cdot\vec{v} = c \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^4\} \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

$$\left.\begin{array}{l} e_1 \cdot v = c \Leftrightarrow v_1 = c \\ (e_1 + 2e_2)\cdot v = c \Leftrightarrow v_1 + 2v_2 = c \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{v_2 = 0}$$

$$(e_2 + 3e_3)\cdot v = c \Leftrightarrow v_2 + 3v_3 = c \Rightarrow \boxed{v_3 = \frac{c}{3}}$$

$$(e_3 + 4e_4)\cdot v = c \Leftrightarrow v_3 + 4v_4 = c \Rightarrow \boxed{v_4 = \frac{c}{6}}$$

Επιλέγουμε αυθαίρετα (βολικά) $c = 6$

Άρα $\boxed{6x_1 + 2x_3 + x_4 = 6}$

Παρατήρηση: Το $\Pi = \{\vec{x}\cdot\vec{v} = c\}$ δεν ορίζεται μοναδικά

$\{\vec{x}\cdot\vec{v} = c\} \Leftrightarrow \{\vec{x}\cdot\lambda\vec{v} = \lambda c\} \quad \forall \lambda \neq 0$

Άρα $c, \vec{v}$ όχι μοναδικά! Επιλέγω αυθαίρετα c.

Εφαρμογή 2: Εξίσωση επιπέδου στον R^3 που περιέχει την ευθεία $\varepsilon: (-1,1,2)+t(2,3,4)$ και κάθετο στο επίπεδο $2x_1+x_2-3x_3+4=0$

Λύση

Έστω $\Pi: \vec{x}\cdot\vec{v}=c \Rightarrow x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3=c$ το ζητούμενο επίπεδο.

Έχουμε από υπόθεση $(-1+2t, 1+3t, 2+4t)\in\Pi$

Δηλαδή $(-1+2t)v_1+(1+3t)v_2+(2+4t)v_3=c$

Επίσης $\Pi\perp 2x_1+x_2-3x_3+4$ δηλ. $\vec{v}\perp(2,1,-3)$

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet \text{ Για } t=0 & -v_1+v_2+2v_3=c \quad (1) \\ \bullet \text{ Για } t=1 & v_1+4v_2+6v_3=c \quad (2) \end{array}\right\} \text{συνθήκη ευθείας}$$

$\bullet\ \vec{v}\perp(2,1,-3) \qquad 2v_1+v_2-3v_3=0 \quad (3)$

αλλιώς: $\vec{u}=(2,3,4)$
$\vec{v}\perp\vec{u}$
$\vec{v}\perp(2,1,3)$
$(-1,1,2)\in\Pi$

Επιλέγω $c=1$ (βολικό) και έχουμε
$$\left.\begin{array}{l} -v_1+v_2+2v_3=1 \\ v_1+4v_2+6v_3=1 \\ 2v_1+v_2-3v_3=0 \end{array}\right\} (\Sigma)$$

Εφαρμογή 3: Εξίσωση επιπέδου στον $\mathbb{R}^3$, μέσω $(3,2,-1)$ και $(1,-1,2)$ και $\parallel$ στην $\epsilon: (1,-1,0)+t(3,2,-2)$

Λύση

Έστω $\Pi: \vec{x}\cdot\vec{v}=c \Rightarrow x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3=c$ το ζητούμενο επίπεδο.

$\vec{u}=(3,2,-2)\parallel\varepsilon$ άρα $\vec{v}\perp\vec{u} \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{u}=0$

Έχουμε
$$\left.\begin{array}{l} 3v_1+2v_2-1v_3=c \\ v_1-v_2+2v_3=c. \\ 3v_1+2v_2-2v_3=0 \end{array}\right\} (\Sigma) \quad \text{(επιλέγω } c \text{ αυθαίρετα)}$$

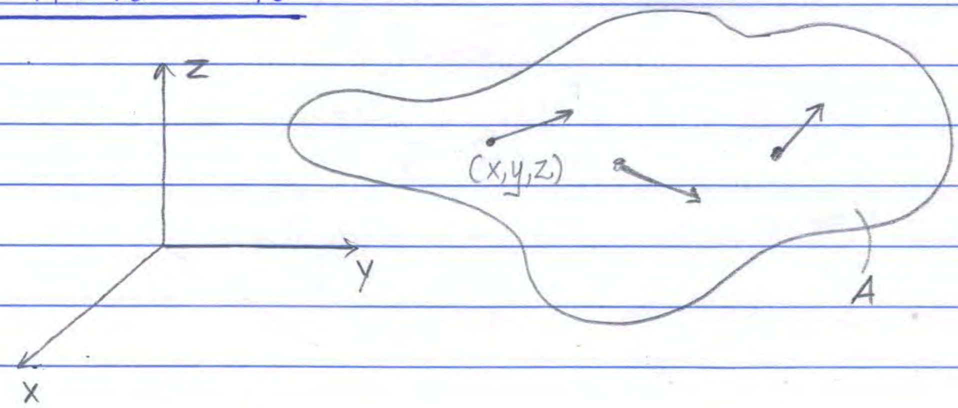
Γραφήματα - Γεωμετρία Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών

A $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n)$

Π.χ $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$, $A = \mathbb{R}^3 - \{0\}$

B $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Π.χ



$T(x,y,z)$ Θερμοκρασία

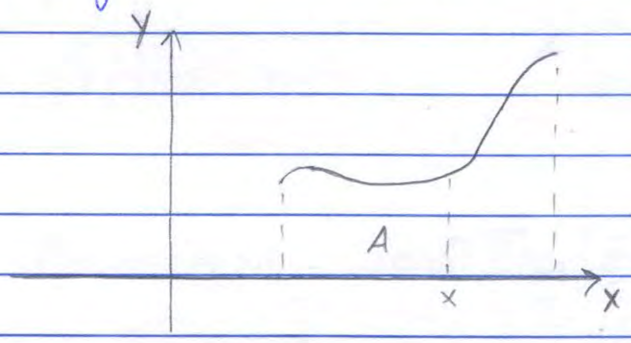
$T: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\vec{V}(x,y,z)$ ταχύτητα (διανυσματική συνάρτηση)

$\vec{V}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

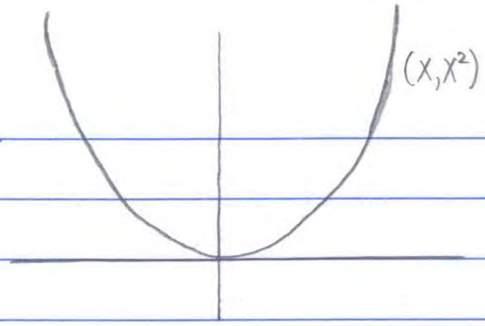
Γ Γραφήματα Συναρτήσεων ($m=1$, $n \geq 1$)

Γ1 $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Γράφημα : $G = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$
$G \subset \mathbb{R}^2$

π.χ

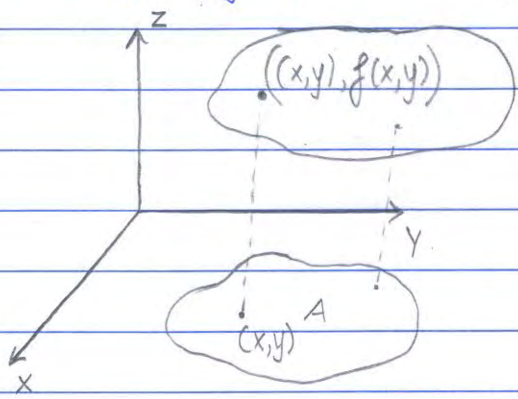


$f(x) = x^2$

$G = \{ (x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \}$

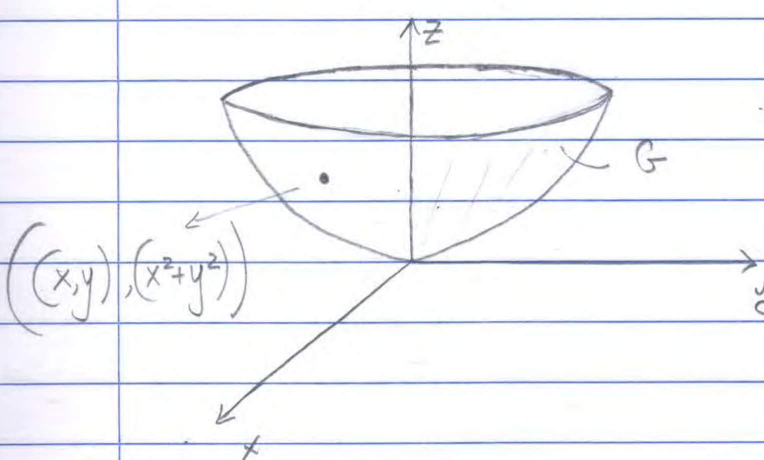
$\boxed{\Gamma_2}$ $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$G = \{ ((x,y), f(x,y)) \mid (x,y) \in A \}$



$z = f(x,y)$

π.χ $f(x,y) = x^2 + y^2$



παραβολοειδές

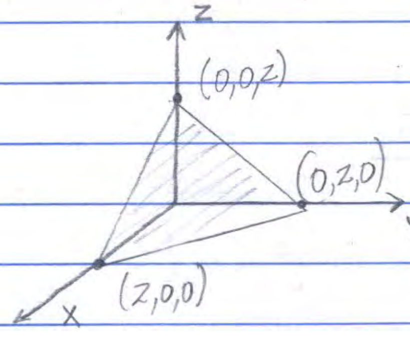
Παραδείγματα

Επίπεδο

$$z = f(x,y) = -x-y+2 \qquad A = \mathbb{R}^2$$

$x+y+z = 2$

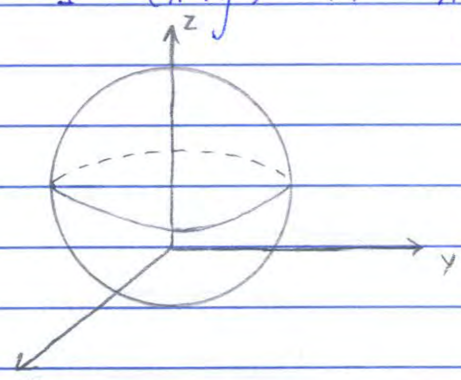
2



Σφαίρα

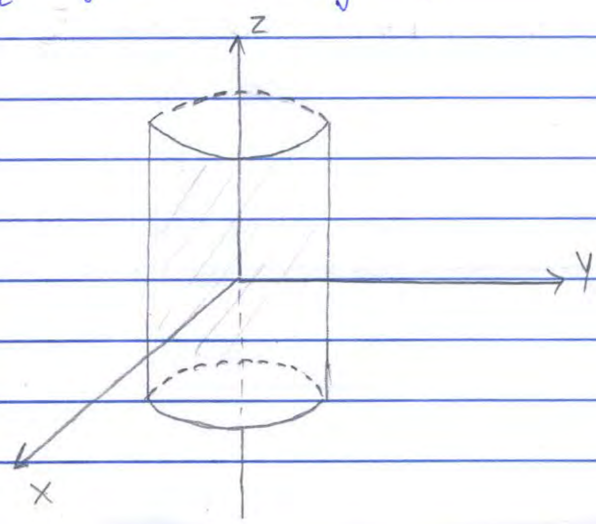
2 $z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ $\qquad x^2+y^2 \leq 1$ (πάνω ημισφαίριο)

$$z^2 = 1-(x^2+y^2) \iff x^2+y^2+z^2 = 1$$

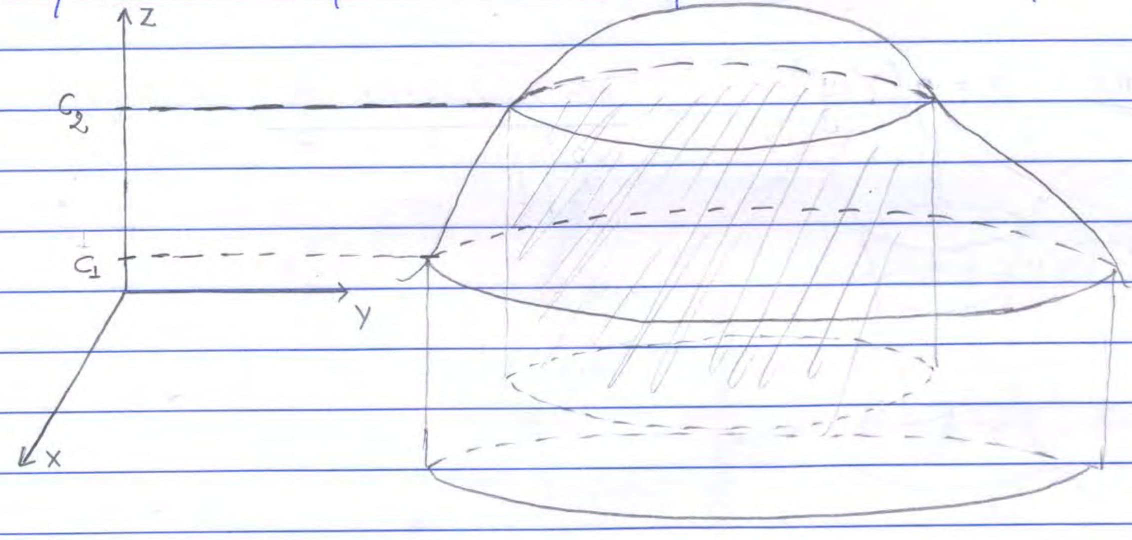


Κύλινδρος

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\}$ $\qquad$ (λείπει η z $\Longleftrightarrow$ $\parallel$ στον z-άξονα)



$\boxed{\Delta}$ Καμπύλες - Επιφάνειες - Γενικότερα Σύνολα Στάθμης.

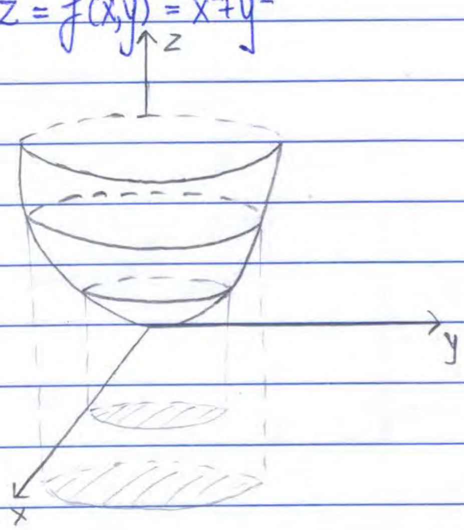


Ορισμός: $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

Σύνολο στάθμης c $= \Sigma_c = \{ x \in A \mid f(x) = c \}$

Π.χ. $z = f(x,y) = x^2 + y^2$

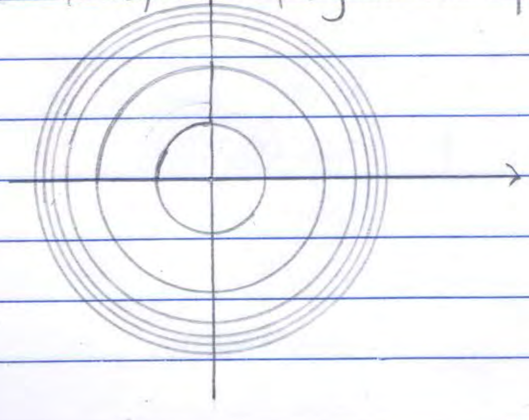
$\Sigma_c = \{ x^2 + y^2 = c \}$ $c = 1, 2, \ldots$



Απόσταση Καμπυλών : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

(κατανομή καμπυλών στάθμης)

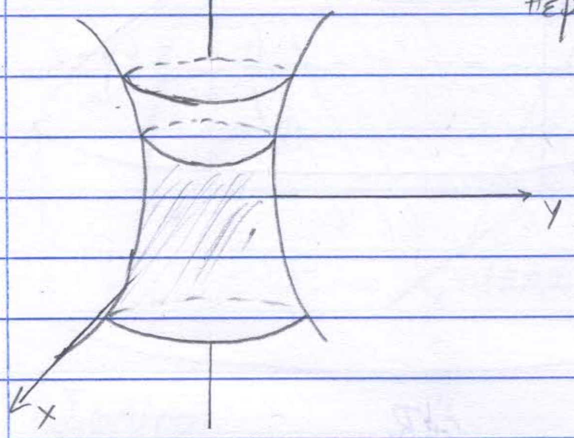
$= \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$



$$\boxed{\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{n}}$$

<u>Σημείωση</u>: Οι καμπύλες στάθμης δεν αρκούν για να καθορίσουν την συνάρτηση! Χρειάζεται και η κατανομή.

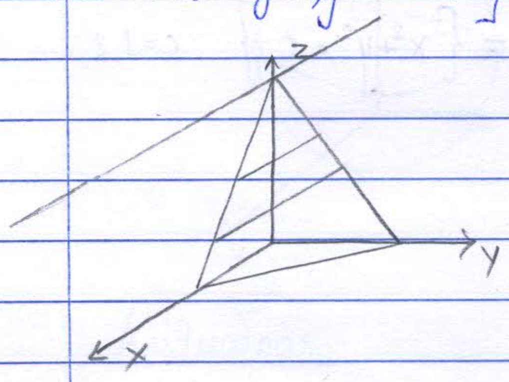
<u>π.χ</u> $z = g(x^2+y^2)$, <u>για αυθαίρετη g,</u> οι καμπύλες είναι περιφέρειες.

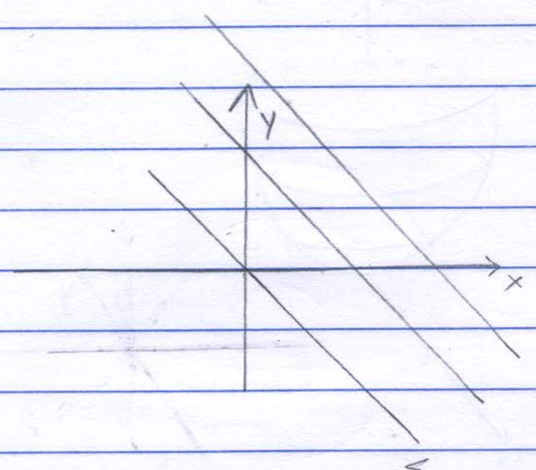


<u>Παραδείγματα</u>:

<u>Επίπεδο</u>

$z = f(x,y) = -x-y+2$



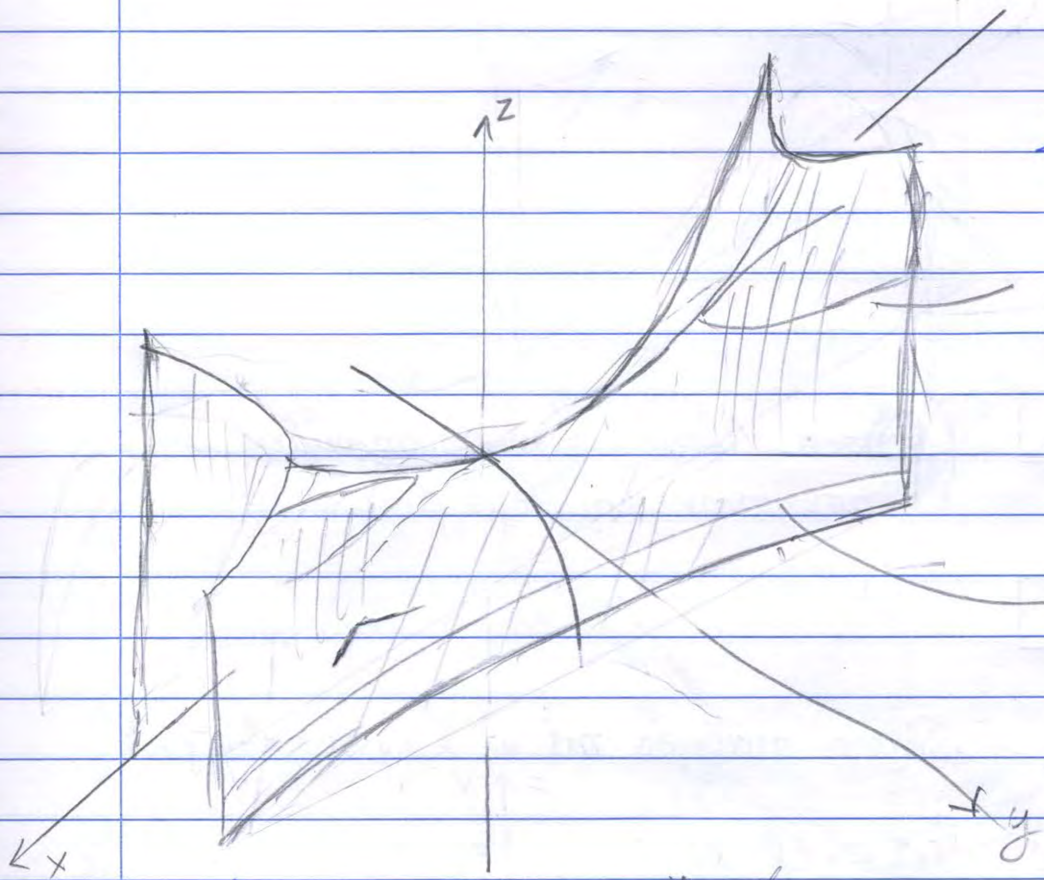


<u>ευθείες</u>

$\Sigma_c = \{-x-y+2 = c\}$ $\quad x+y = 2-c$

Σάγμα

$$z = f(x,y) = x^2 - y^2$$

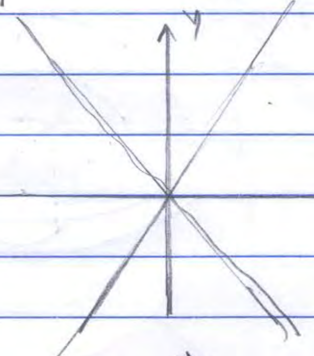


$$\Sigma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = c\}$$

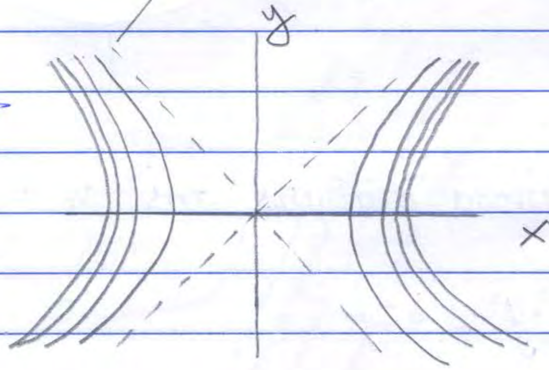
$x^2 - y^2 = 1^2$, $z = 1$

$x^2 - y^2 = -1^2$, $z = -1$

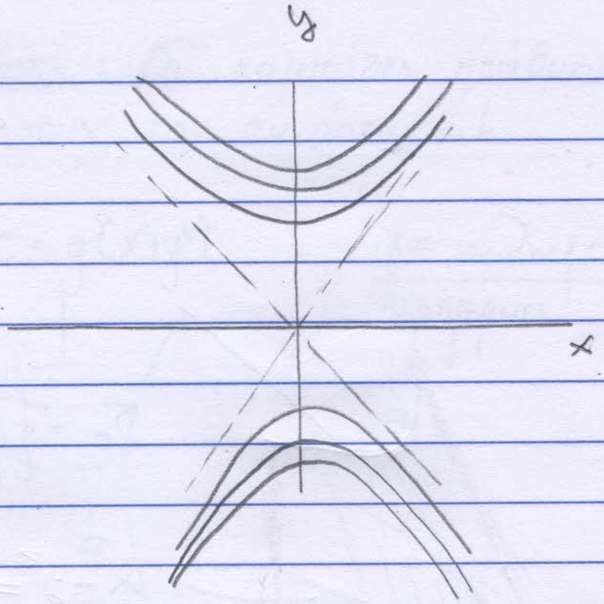
i) $c = 0$



ii) $c > 0$



iii) $c<0$



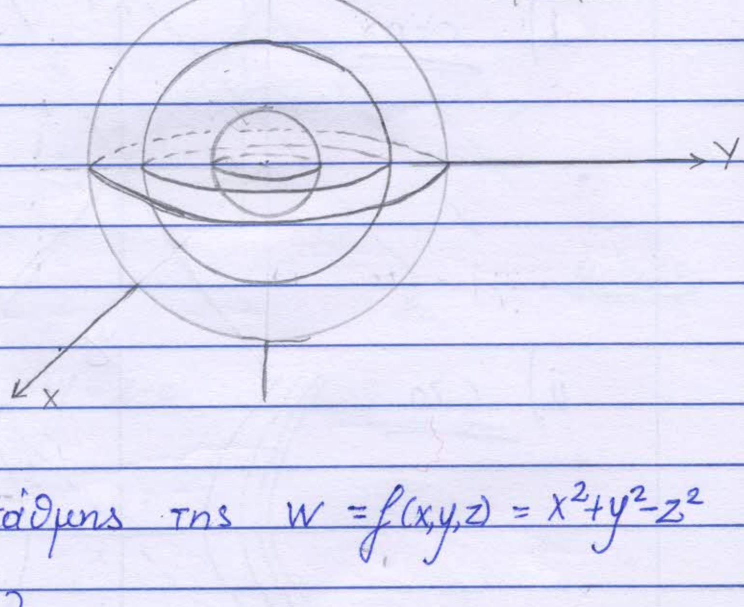
$\boxed{\text{Διάλεξη 3}}$ (Λύσεις των προηγούμενων ασκήσεων και εφαρμογών)

$\boxed{\text{Διάλεξη 4}}$

Παράδειγμα: Σύνολα στάθμης της $w = f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$\Sigma_c = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = c\}$

σφαίρες

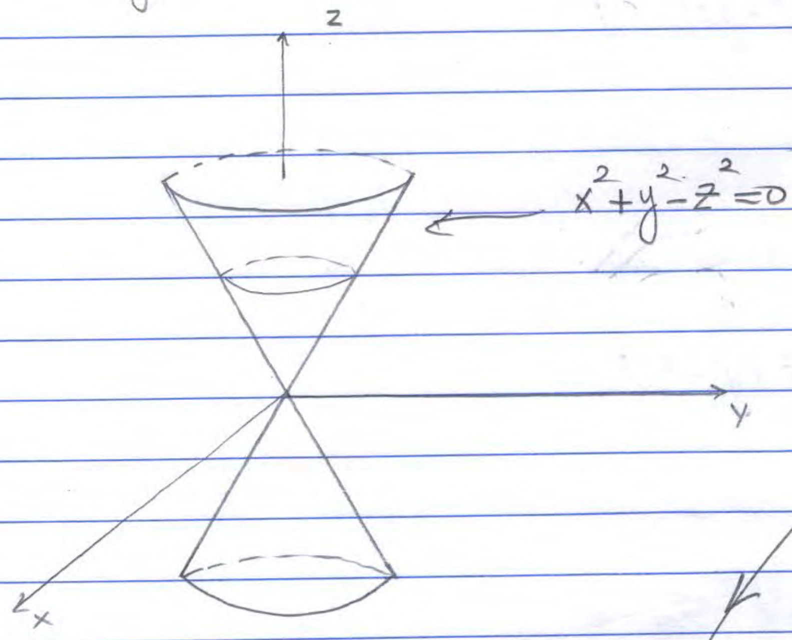


Παράδειγμα: Σύνολα στάθμης της $w = f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

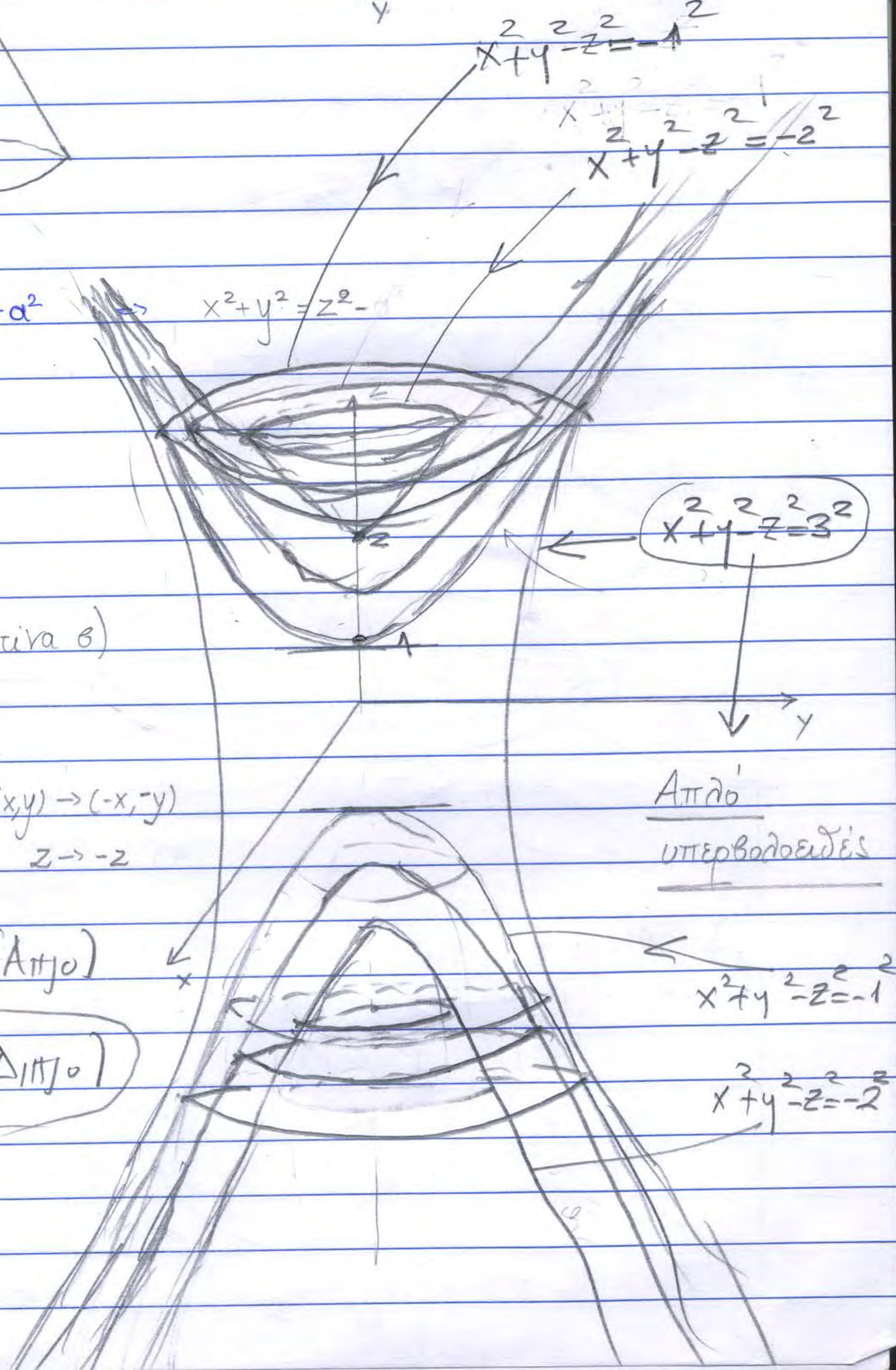
$\Sigma_c = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2-z^2 = c\}$

i) $\underline{C=0} \Rightarrow$ <u>κώνος</u>

$$x^2+y^2=z^2 \Leftrightarrow z=\sqrt{x^2+y^2}$$



ii) $\underline{C<0} \Rightarrow C=-a^2 \Rightarrow x^2+y^2=z^2-$



iii) $C>0 \Rightarrow C=\beta^2$

$\Rightarrow x^2+y^2=z^2+\beta^2$

($z=0$, ακτίνα β)

Συμμετρία $(x,y)\to(-x,-y)$
$z\to -z$

$x^2+y^2-z^2=c^2$ (Απλό)

$x^2+y^2-z^2=-c^2$ (Διπλό)

Ασκήσεις

6) α) $f(x,y,z) = -x^2-y^2-z^2$.

$\Sigma_c = \{ (x,y,z) \mid f(x,y,z) = c \} \Rightarrow -x-y^2-z^2 = c \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = c$

• Αν $c \leq 0$ τότε $\Sigma_c = \phi$

• Αν $c > 0$ τότε Σ_c σφαίρα με ακτίνα $\sqrt{c}$

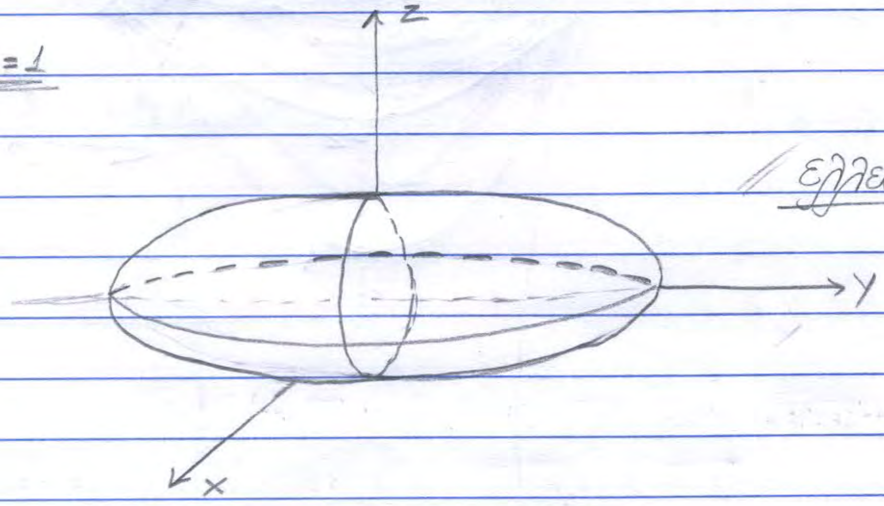
β) $f(x,y,z) = 4x^2+y^2+9z^2$

$\Sigma_c = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = c\} \Rightarrow 4x^2+y^2+9z^2 = c$

• Αν $c \leq 0$ τότε $\Sigma_c = \phi$

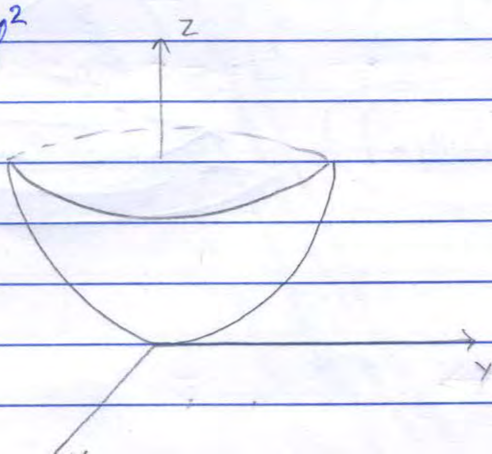
• Αν $c > 0$, $c = k^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{\left(\frac{k}{2}\right)^2} + \dfrac{y^2}{k^2} + \dfrac{z^2}{\left(\frac{k}{3}\right)^2} = 1$

$\underline{c=1}$



ελλειψοειδές

γ) $f(x,y) = x^2+y^2$



7) Γραφήματα στον $\mathbb{R}^3$ και καμπύλες στάθμης για $c=0,\pm1,\pm2,\pm3$

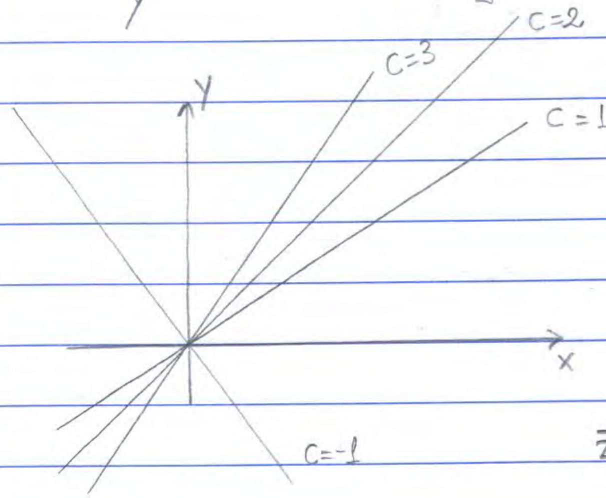
α) $z=f(x,y)=\frac{x}{y}$

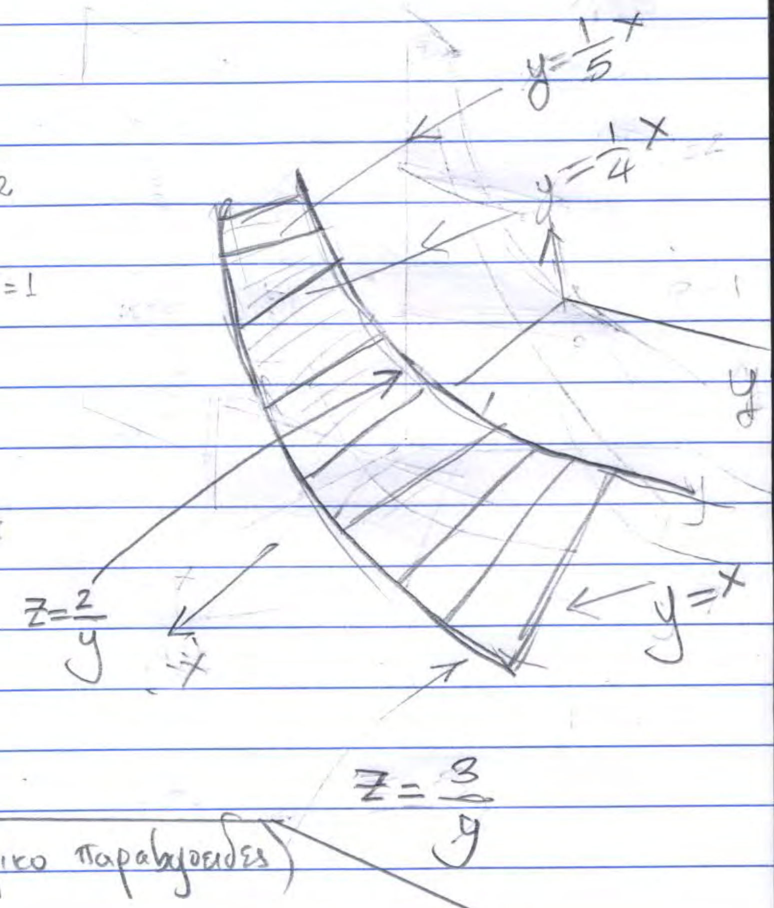
β) $z=f(x,y)=x^2+xy$

γ) $z=f(x,y)=3x-7y$

<u>Λύση</u>

α) $\frac{x}{y}=c \Rightarrow x=cy$

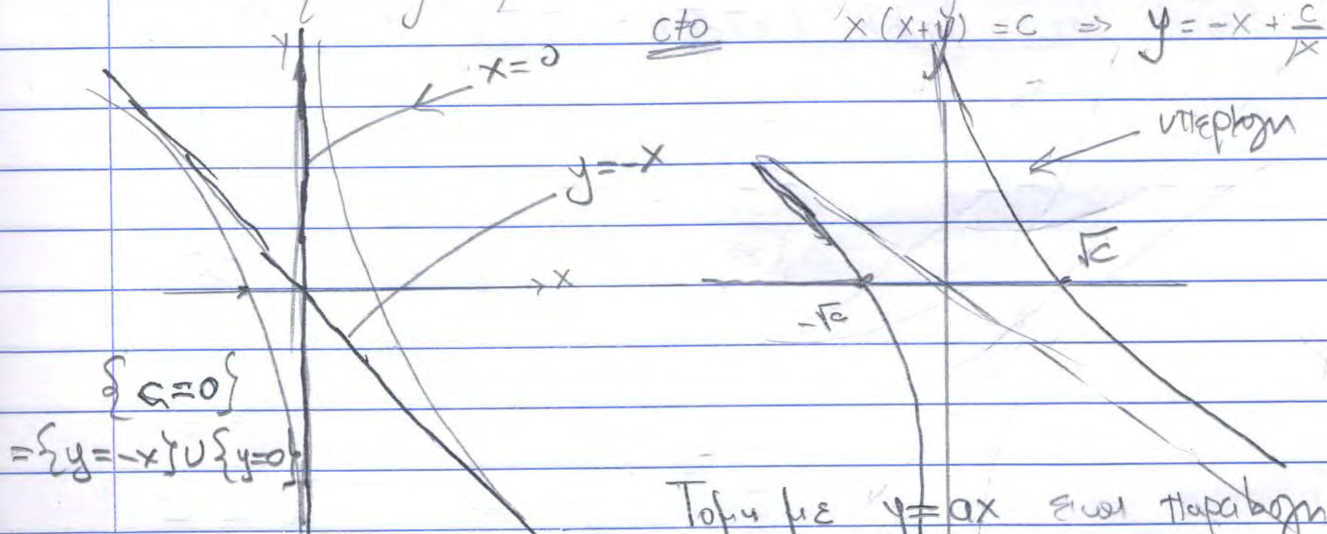




β) $f(x,y)=x^2+xy$ (υπερβολικό παραβολοειδές)

$\Sigma_c=\{x^2+xy=c\}$ $\quad$ $\underline{c=0}$ $\quad x(x+y)=0$

$\underline{c\neq 0}$ $\quad x(x+y)=c \Rightarrow y=-x+\frac{c}{x}$



Τομή με $y=ax$ είναι παραβολή $z=(1+a)x^2$

γ) $f(x,y) = 3x - 7y$

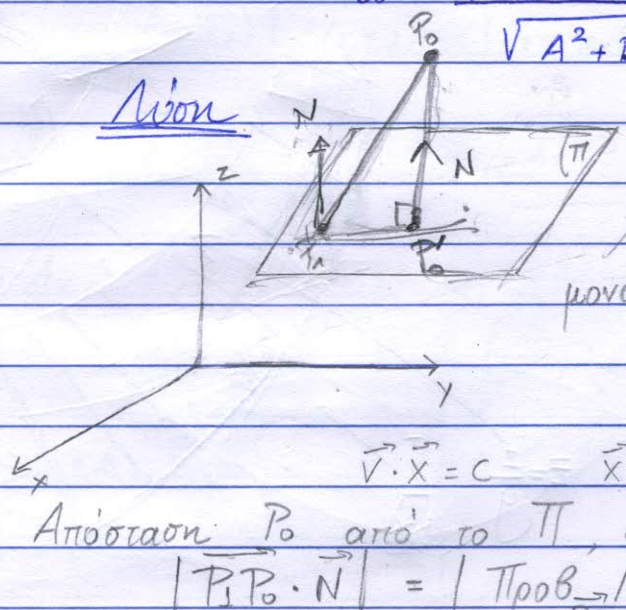
$\Sigma_c = \{ 3x - 7y = c \}$

Στον $\mathbb{R}^2$ ευθεία $\to$ $\mathbb{R}^3$ επίπεδο

8) Δείξτε ότι η απόσταση του $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ από το επίπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ δίνεται από

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

<u>Λύση</u>



$N = \frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ μοναδιαίο

ανήκει στο Π

$\vec{v} \cdot \vec{x} = c$ $\quad \vec{x} = (x,y,z)$ $\quad P_0(x_0,y_0,z_0)$ $\quad P_1(x_1,y_1,z_1)$

Απόσταση P_0 από το Π, $d(\Pi, P_0) =$

$$|\vec{P_1P_0} \cdot \vec{N}| = |\text{Προβ}_{\vec{P_1P_0}} \vec{N}|$$

$$\Rightarrow \left| (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \cdot \frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right| =$$

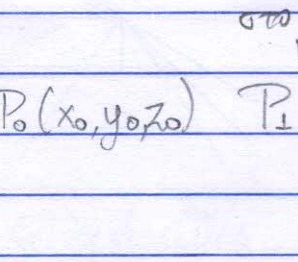
$$= \left| x_1A + y_1B + z_1C - (x_0A + y_0B + z_0C) \right| \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|$$

9) Δείξτε ότι $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x} - \bar{x}_1\| = \|\bar{x} - \bar{x}_2\|\}$ είναι υπερεπίπεδο.

<u>Λύση</u>

Έχουμε $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad \bar{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$ $\quad \bar{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$

$\|\bar{x} - \bar{x}_1\| = \|\bar{x} - \bar{x}_2\| \iff \|\bar{x} - \bar{x}_1\|^2 = \|\bar{x} - \bar{x}_2\|^2 \iff$



$(\vec{x} - \vec{x}_1) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_1) = (\vec{x} - \vec{x}_2) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_2) \iff$

$\cancel{\|\vec{x}\|^2} - 2\vec{x} \cdot \vec{x}_1 + \|x_1\|^2 = \cancel{\|\vec{x}\|^2} - 2\vec{x} \cdot \vec{x}_2 + \|\vec{x}_2\|^2 \iff$

$2(\vec{x} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)) = \|\bar{x}_2\|^2 - \|\bar{x}_1\|^2 \iff \bar{x} \cdot \bar{a} = c$

$\bar{a} = \frac{1}{2}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$, $c = \frac{1}{2}(\|\bar{x}_2\|^2 - \|\bar{x}_1\|^2)$

Όρια - Συνέχεια

$\mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right)^{1/2}$

Σύγκλιση Ακολουθιών

Ορισμός: $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ $\quad x_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn})$

$x_{ji} \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n$

$$x_j \xrightarrow[j\to\infty]{} x_0 \iff \|x_j - x_0\| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

Δηλαδή $\lim_{j\to\infty} x_j = x_0 \iff \lim_{j\to\infty} \|x_j - x_0\| = 0$

Πρόταση: $x_j \to x_0 \iff x_{ji} \to x_{0i} \quad \forall i = 1, \dots, n$
όπου $x_j = (x_{j1}, \dots x_{jn})$, $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$

Απόδειξη:

$(\Rightarrow)$ $|x_{ji} - x_{0i}| \leq \|x_j - x_0\| \quad \forall i$

$\Rightarrow \max_{1\leq i\leq n} |x_{ji} - x_{0i}| \leq \|x_j - x_0\| \to 0$

$(\Leftarrow)$ $\|x_j - x_0\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_{jk} - x_{0k})^2 \leq n \cdot \max_{1\leq i\leq k} |x_{jk} - x_{0k}|^2$

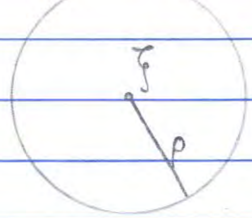
Άρα $\|x_j - x_0\| \leq \sqrt{n} \cdot \max_{0\leq k\leq n} |x_{jk} - x_{0k}| \to 0$

Ανοιχτά - Κλειστά σύνολα στον $\mathbb{R}^n$

$B(\xi;\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-\xi\| < \rho\}$ ανοιχτή μπάλα

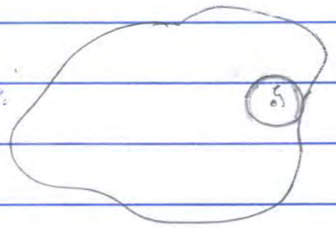
$\overline{B}(\xi;\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-\xi\| \leq \rho\}$ κλειστή μπάλα

$S(\xi;\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-\xi\| = \rho\}$ σφαίρα



Ορισμός: (ανοιχτό σύνολο)

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό σύνολο εάν $\forall \xi \in U$, $\exists B(\xi;\rho(\xi)) \subset U$



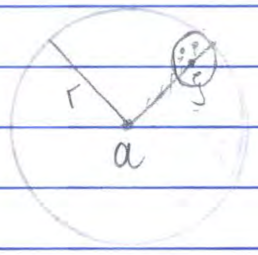
Ορισμός: (κλειστό σύνολο)

$F \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό σύνολο εάν το συμπλήρωμα του $\mathbb{R}^n - F \; (= F^c)$ είναι ανοιχτό.

Π.χ. Η ανοιχτή μπάλα είναι ανοιχτό σύνολο.

Απόδειξη:

Έστω $B(a;r)$



Από ορισμό $B(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| < r\}$

Έστω $\xi \in B(a;r)$

Επιλέγουμε $\rho < r - \|\xi - a\|$

Θα δείξουμε ότι $B(\xi,\rho) \subset B(a;r)$

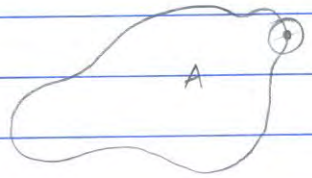
Έστω $x \in B(\xi;\rho) \iff \|\xi - x\| < \rho$.

Όμως
$$\begin{aligned}\|x-a\| &\le \|x-\xi\| + \|\xi - a\| \\ &< \rho + \|\xi - a\| \\ &< \left(r - \|\xi - a\|\right) + \|\xi - a\| = r\end{aligned}$$

Άρα $x \in B(a;r)$ ∎

__Ορισμός: (Σύνορο)__ συμβ ∂A, $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid B(x;r) \cap A \neq \emptyset,\ B(x;r) \cap A^c \neq \emptyset,\ \forall r > 0\}$$

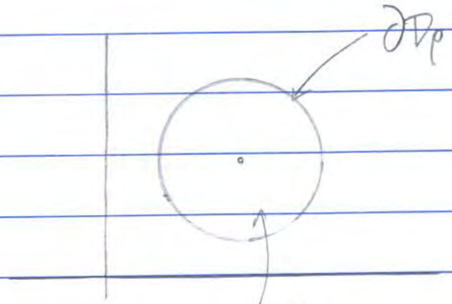


__Παρατήρηση:__ Εάν A ανοικτό $\Rightarrow \partial A \cap A = \emptyset$

__Π.χ__ $A = (a,b) \subset \mathbb{R}$

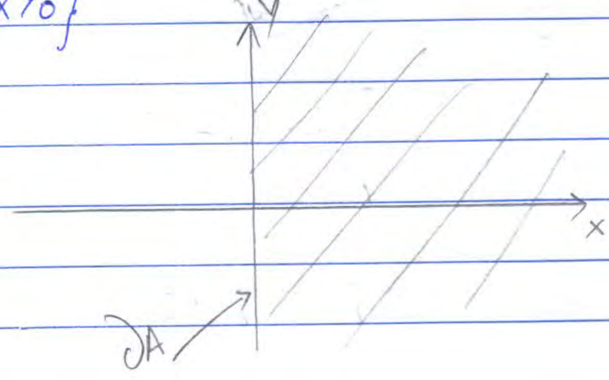
$\partial A = \{a, b\}$

__Π.χ__



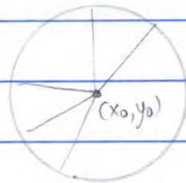
ρ-δίσκος
$$D_\rho(x_0,y_0) = \{(x,y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \rho^2\}$$

__Π.χ__ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$



Π.Χ $D_\rho(x_0,y_0)\setminus\{x_0,y_0\}$

$(x_0,y_0)\in\partial D_\rho$

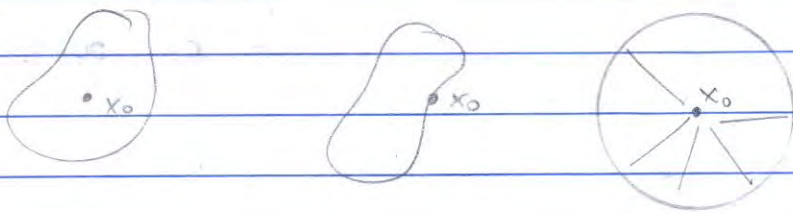


Ορισμός : (Ορίου Συναρτήσεων)

Έστω $f: A\subset R^n \to R$, A ανοιχτό

Έστω $x_0\in A\cup\partial A$ (x_0 όχι αναγκαστικά στο Π.Ο)

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\neq x_0)}} f(x) = \ell$ εάν $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ τέτοιο ώστε $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ όταν $\|x-x_0\|<\delta$.



Σημείωση

1) Το x_0 δεν ανήκει εν γένει στο A

2) $\nexists$ όριο εάν υπάρχουν δύο ακολουθίες $\{x_n\},\{y_n\}$ με $\{x_n\}\to x_0$ και $\{y_n\}\to y_0$ και $\lim f(x_n)\neq\lim f(y_n)$

Αντίστροφα $\exists$ όρια αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\},\{y_n\}$... στο A $\lim f(x_n)=\lim f(y_n)=\dots$

Π.Χ • $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1$

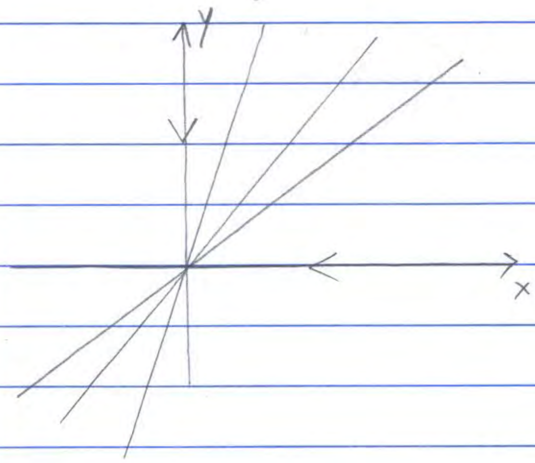
- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$0 \le \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = \frac{|x|^2}{|x|} = |x| \to 0$$

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = ;$$

Δυσκολία

$$\begin{cases} \infty \text{ κατευθύνσεις προσέγγισης του } (0,0) \\ \text{Ύπαρξη ορίου } \forall \text{ κατεύθυνση} \not\Rightarrow \text{Ύπαρξη ορίου} \end{cases}$$



- $y = \lambda x$ $\lambda \neq 0$ (εκτός y-άξονα)

τότε $f(\lambda x, x) = \dfrac{x^2}{x^2+\lambda^2 x^2} = \dfrac{x^2}{x^2(1+\lambda^2)} = \dfrac{1}{1+\lambda^2}$

Άρα $\lim f(\lambda x, x) \to \dfrac{1}{1+\lambda^2}$

- Για τον y-άξονα $\Rightarrow$ $x=0$

τότε $f(0,y) = \dfrac{0}{0+y^2}$

Άρα $\lim f(0,y) = 0$

Επομένως $\nexists$ όριο διότι υπάρχουν δύο διαφορετικά όρια για δύο διαφορετικές κατευθύνσεις. (επιλέξαμε 2 ακολουθίες που τείνουν στο μηδέν, μία επί της μίας ευθείας, και την άλλη επί της άλλης ευθείας.

• $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ (Δείξτε ότι είναι συνεχής)

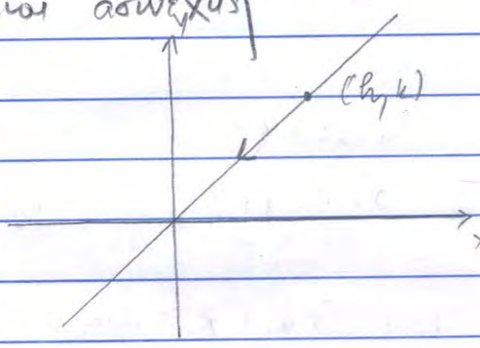
$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \le |y| \to 0$$

(θετική απάντηση: μέσω εκτίμησης)

• $f(x,y) = \dfrac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4}$ $\quad (x,y)\neq(0,0)$

(Δείξτε ότι είναι ασυνεχής)

(αρνητική απάντηση: μέσω δύο διαφορετικών δρόμων)

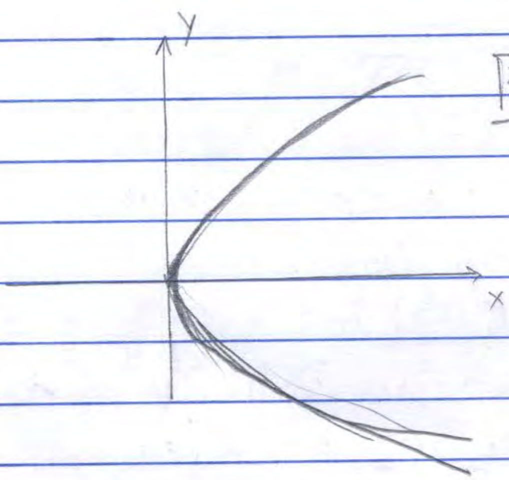


$v=(h,k)$

$$f(tv) = \frac{(t^2k^2-th)^2}{t^2h^2+t^4k^4} = \frac{t^2(tk^2-h)^2}{t^2(h^2+t^2k^4)}$$

$$= \frac{(th^2-h)^2}{(h^2+t^2k^4)}$$

$$\lim_{t\to 0} f(tv) = \frac{h^2}{h^2} = 1$$



$\boxed{x=y^2} \Rightarrow f(y^2,y) = 0$

$$\lim_{y\to 0} f(y^2,y) = 0$$

(Όριο $\nexists$)

• $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ (Δειξτε οτι δεν ειναι συνεχης)

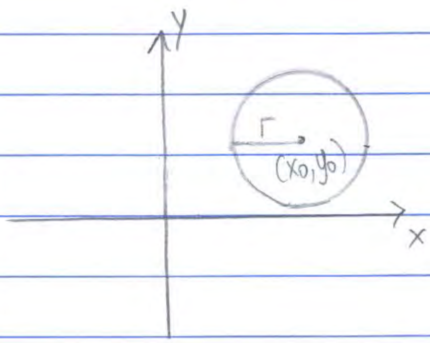
$\vec{v} = (1,\mu)$

$f(t,\mu t) = \dfrac{t+\mu t}{t-\mu t} = \dfrac{1+\mu}{1-\mu}$ ($\nexists$ οριο)

$\lim_{t\to 0} f(t,\mu t) = \dfrac{1+\mu}{1-\mu}$.

10) Δείξτε ότι $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$ είναι ανοιχτό σύνολο.

Λύση



Έστω $(x_0,y_0)\in A$.

Επιλέγω $0<r<y_0$, $B((x_0,y_0),r)\subset A$

Πράγματι, εάν $(x,y)\in B((x_0,y_0),r)$

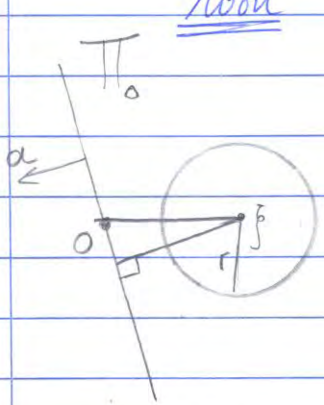
τότε $|x_0-x|^2+|y_0-y|^2<r^2$

$\Rightarrow |y_0-y|^2<r^2 \Rightarrow |y_0-y|<r$

$\Rightarrow |y_0|-|y|<r \Rightarrow |y|>|y_0|-r>0$ ∎

11) Ο ημιχωρος $\Pi_c^- = \{x\in\mathbb{R}^n \mid a\cdot x<c\}$ είναι ανοιχτός.

Λύση $\Pi = \{x\in\mathbb{R}^n \mid a\cdot x = 0\}$



Θα δείξουμε αρχικά την περίπτωση $c=0$

$\Pi_0^- = \{x\in\mathbb{R}^n \mid a\cdot x<0\}$ (περναει μεσω της αρχης των αξονων)

Έστω $\xi\in\Pi_0^-$

Η απόσταση του ξ από το Π_0 είναι ίση με $\left|\text{Προβ}_{\frac{a}{\|a\|}}\xi\right| = \dfrac{|a\cdot\xi|}{\|a\|}$

Επιλέγουμε $0<r<\dfrac{|a\cdot\xi|}{\|a\|}$

Θα δείξουμε ότι $B(\xi,r)\subset\Pi_0^-$

Έστω $x \in B(\xi, r) \iff \|x-\xi\| < r$

$\xi \in \Pi_0^- \iff a\cdot\xi < 0$

Έχουμε
$$\begin{aligned} a\cdot x &= a\cdot(x-\xi+\xi) = a\cdot(x-\xi) + a\cdot\xi \\ &\le |a\cdot(x-\xi)| + a\cdot\xi \\ &\overset{C-S}{\le} \|a\|\,\|x-\xi\| + a\cdot\xi \\ &< \|a\|\, r + a\cdot\xi \\ &= \|a\|\, r + \frac{|a\cdot\xi|}{\|a\|}\|a\| \\ &= \|a\|\left(r - \frac{|a\cdot\xi|}{\|a\|}\right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Άρα $B(\xi, r) \subset \Pi_0^-$

Για την γενική περίπτωση (μεταφορά!)

Θεωρούμε το $\Pi_c^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a\cdot x < c\}$

Έστω x_0 τέτοιο ώστε $a\cdot x_0 = c$

Τότε $\Pi_0^- \equiv \Pi_c^- - x_0$

(μεταφορά ανοιχτού είναι ανοιχτό)

Πράγματι $a\cdot(x-x_0) = a\cdot x - a\cdot x_0 = a\cdot x - c < c - c = 0$!

12) Το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a\cdot x \ge c\}$ είναι κλειστό

Λύση

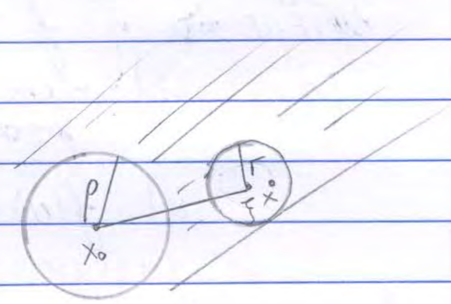
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a\cdot x \ge c\} = \left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid a\cdot x < c\}\right)^c$$

Το συμπλήρωμα του είναι ανοιχτό (ασκ 11)

Από το ορισμό του κλειστού συνόλου έχουμε το ζητούμενο.

13) Η κλειστή μπάλα $\overline{B}(x_0,\rho) = \{x \in R^n \mid \|x - x_0\| \le \rho\}$ είναι κλειστό σύνολο.

Λύση



$\overline{B}(x_0,\rho) = \{x \in R^n \mid \|x - x_0\| \le \rho\}$

Έχουμε $\left(\overline{B}(x_0,\rho)\right)^c = \{x \in R^n \mid \|x - x_0\| > \rho\}$

Έστω $\xi \in (\overline{B}(x_0,\rho))^c$. Θα δείξουμε ότι $B(\xi, r) \subset \left(\overline{B}(x_0,\rho)\right)^c$
όπου $0 < r < \|\xi - x_0\| - \rho$

Έστω $x \in B(\xi, r)$ τότε $\|x - \xi\| < r$

$$\|x - x_0\| = \|x - \xi + \xi - x_0\| > \|\xi - x_0\| - \|x - \xi\| > r + \rho - \|x - \xi\| > r - \rho - r = \rho$$ ∎

14) Το υπερεπίπεδο $\{x \in R^n \mid a \cdot x = c\}$ είναι κλειστό.
Λύση

$\Pi = \{x \in R^n \mid a \cdot x = c\}$

Έχουμε $\Pi^c = \underbrace{\{x \in R^n \mid a \cdot x < c\}}_{\text{ανοιχτό}} \cup \underbrace{\{x \in R^n \mid a \cdot x > c\}}_{\text{ανοιχτό}}$

(ένωση ανοιχτών είναι ανοιχτό)

Άρα Π^c ανοιχτό $\Rightarrow$ Π κλειστό.

Συνέχεια

<u>Ορισμός</u> : $f: A \to \mathbb{R}$, και έστω $a \in A \subset \mathbb{R}^n$, A ανοιχτό.
Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο a
εάν i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ (υπάρχει)

ii) $f(a) = \ell$

$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta_{(x,\varepsilon)} > 0 : \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο A , εάν είναι συνεχής $\forall a \in A$.

<u>Πρόταση</u>: Έστω f,g συνεχείς στο $x=a$. Τότε
1) $f \pm g$, λf , συνεχείς
2) $\frac{1}{g(x)}$ συνεχής , για $g(x) \neq 0$
3) $f: A \to B \subset \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $f(a)$
τότε $g(f(x))$ συνεχής.

• <u>Lipschitz συναρτήσεις</u> : ∃ $k > 0$ σταθερά τέτοια ώστε
$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y| \quad \forall x,y \in A$. διαλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$

• <u>Holder συναρτήσεις</u> : ∃ $k > 0$ σταθερά , $a > 0$ τ.ω
$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|^a$

• $f(x,y) = x \cdot y$: $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχής.

<u>Απόδειξη</u>: $|f(x,y) - f(a,b)| = x \cdot y - a \cdot b$
$= x \cdot y - x \cdot b + x \cdot b - a \cdot b$
$= x \cdot (y-b) + b \cdot (x-a)$
$\overset{C-S}{\leq} \|x\| \cdot \|y-b\| + \|b\| \, \|x-a\|$

• Max-Min : συνεχείς

$f(x,y) = Max(x,y)$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$g(x,y) = Min(x,y)$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Απόδειξη:

$$Max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \left(x>y \Rightarrow Max(x,y) = x \quad \frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x \right)$$

$$Min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} \quad \left(x>y \Rightarrow Min(x,y) = y \quad \frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y \right)$$

$\therefore$ αθροισμα ή διαφορα συνεχων (μεσω της Προτασης)

$\boxed{\text{Διάλεξη 5}}$

Διαφόριση - Εφαπτόμενο Επίπεδο

$\boxed{A}$ Μερικές Παράγωγοι

Ορισμός: $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ οι μέρικές παράγωγοι

όπου $\frac{\partial f(x_i,\dots,x_n)}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}+h\cdot e_j) - f(\vec{x})}{h}$, $e_j = (0,0,\dots,\overset{j\text{-θέση}}{1},0,\dots,0)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+x_2+\dots+x_{j-1}+x_j+h+x_{j+1}+\dots+x_n) - f(\vec{x})}{h}$$

Π.χ $f(x,y) = x^2y+y^3$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy$ και $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2+3y^2$

Π.χ $f(x,y) = y\cos x + x\cos y$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -y\sin x + \cos y \qquad \frac{d f(x,y)}{dy} = \cos x - x\sin y$$

Π.χ $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad (x,y) \neq 0$

$$\frac{d f(x,y)}{dx} = y\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\right) = \dots$$

Π.χ $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$

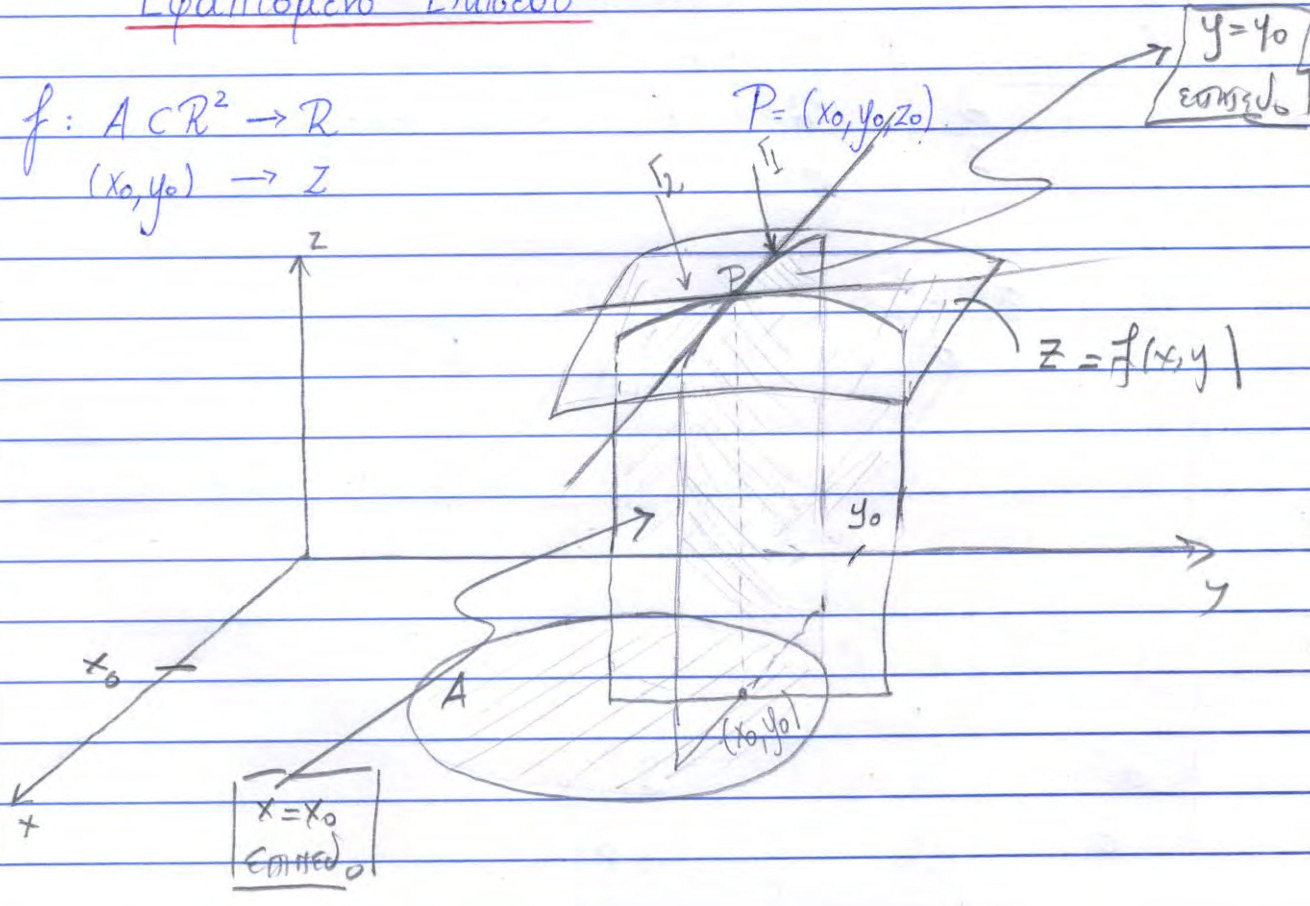
(χρειάζεται ορισμός) $$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+(h,0)) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

Εφαπτόμενο Επίπεδο

$f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x_0,y_0) \to z$



• Τομή επιπέδου $x=x_0$ με επιφάνεια = Γ_1 καμπύλη

• Τομη επιπέδου $y=y_0$ με επιφάνεια = Γ_2 καμπύλη

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$ (κλίση εφαπτομένης στο Γ_1)

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$$ (κλίση εφαπτομένης στο Γ_2)

Η καμπύλη Γ_1 είναι η εξής: $\Gamma_1 = \{x, y_0, f(x,y_0)\}$

Όμοια η Γ_2 είναι η εξής: $\Gamma_2 = \{x_0, y, f(x_0,y)\}$

$v_1 = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}) \quad v_2 = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y})$ εφαπτόμενα διανύσματα

$\vec{v} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$, $P = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{V}$ καθετο (όχι αναγκαστικα μοναδιαιο)

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{df}{dx} \\ 0 & 1 & \frac{df}{dy} \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} 0 & \frac{df}{dx} \\ 1 & \frac{df}{dy} \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{df}{dx} \\ 0 & \frac{df}{dy} \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\frac{df}{dx}, 0, 0\right) - \left(0, \frac{df}{dy}, 0\right) + (0, 0, 1) = \left(-\frac{df}{dx}, -\frac{df}{dy}, 1\right)$$

Άρα η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$ είναι: $(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot \vec{V} = 0$.

$$\boxed{\frac{df}{dx}(x-x_0) + \frac{df}{dy}(y-y_0) = z - z_0}$$

Π.Χ Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα $z = x^2 + y^2 + e^{xy}$ στο σημείο $P = (1,0,2)$.

Λύση

Έχουμε $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y \cdot e^{xy}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y + x \cdot e^{xy}$

$$\left.\frac{\partial z}{dx}\right|_{(1,0)} = 2 \quad \text{και} \quad \left.\frac{\partial z}{dx}\right|_{(1,0)} = 1 \qquad f(1,0) = 2$$

Άρα $$z - z_0 = \frac{dz}{dx}(x - x_0) + \frac{dz}{dy}(y - y_0)$$

$$\Rightarrow \quad z - 2 = 2(x-1) + 1(y-0)$$

$$\Rightarrow \quad 2x \cancel{-2} + y - z \cancel{+2} = 0$$

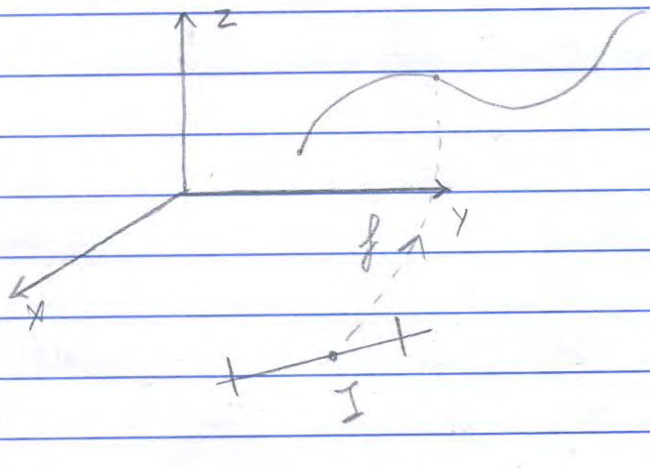
$$\Rightarrow \quad \boxed{2x + y - z = 0}$$

$\boxed{B}$ Η Γενική Περίπτωση Του Μετασχηματισμού

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Ειδικές Περιπτώσεις:

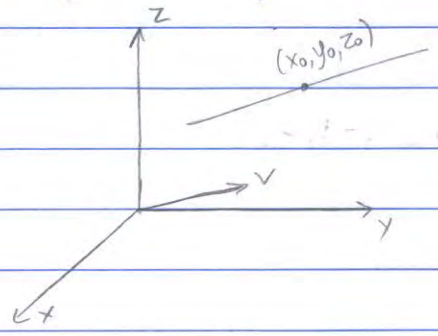
- $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(m=1)$ (συναρτήσεις πολλών μεταβλητών)
- $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ $(n=1)$ (Καμπύλες στο χώρο)



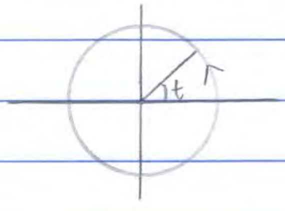
$f: I \to \mathbb{R}^m$

Καμπύλες Στον Χώρο, $\mathbb{R}^n$

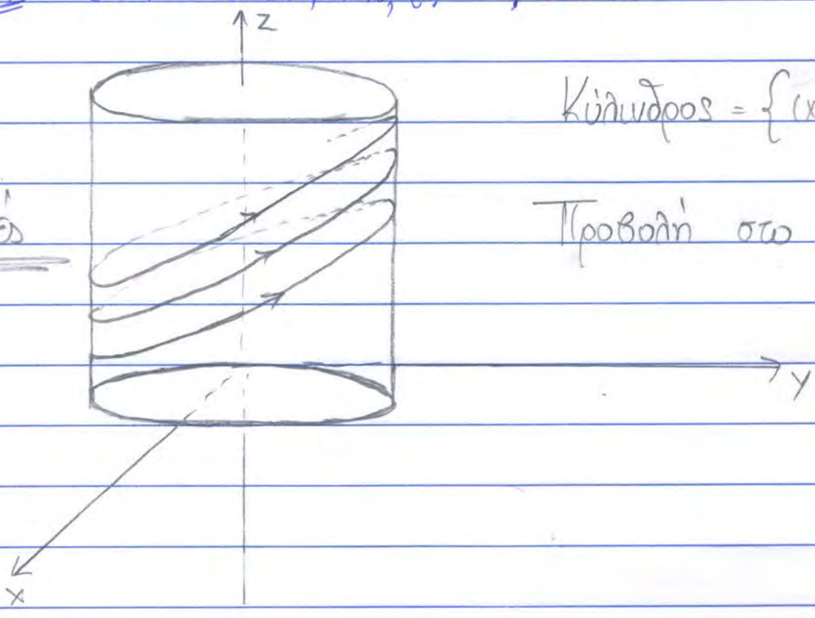
Π.χ $f(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$



Π.χ $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$



Π.χ $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $I = \mathbb{R}$



ελικοειδές

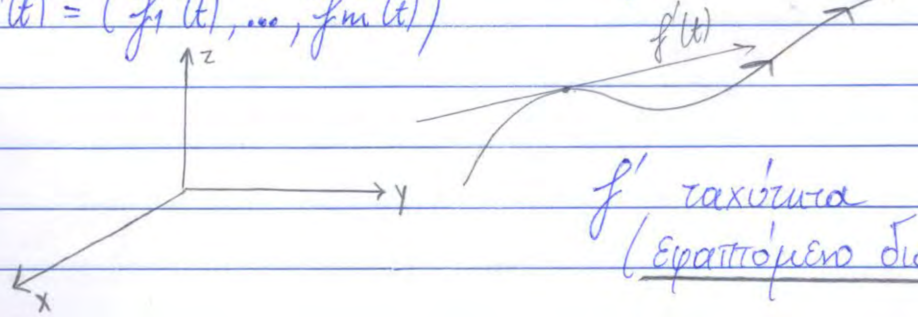
Κύλινδρος $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$

Προβολή στο x-y επίπεδο : $(\cos t, \sin t)$

Παράγωγος

$f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$, $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

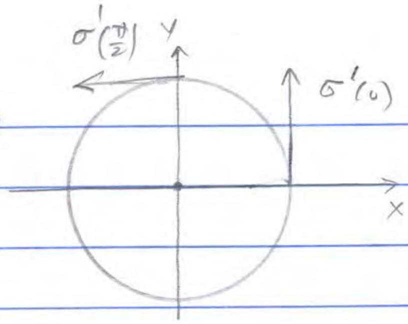
$f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_m'(t))$



f' ταχύτητα

(εφαπτόμενο διάνυσμα)

Π.Χ



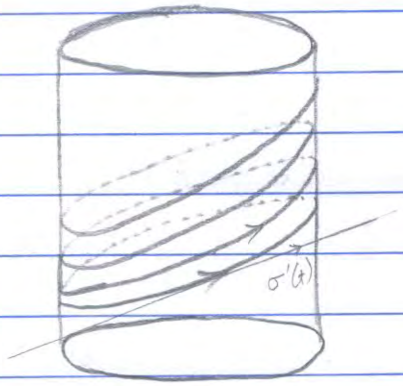
$\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$

Το σ' δείχνει την φορά

$\sigma'(0) = (0,1)$

$\sigma'(\frac{\pi}{2}) = (-1,0)$

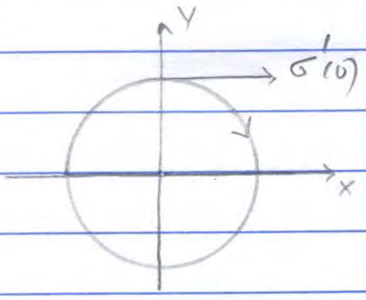
Π.Χ



$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$

$\sigma'(\pi/2) = (-1,0,1)$

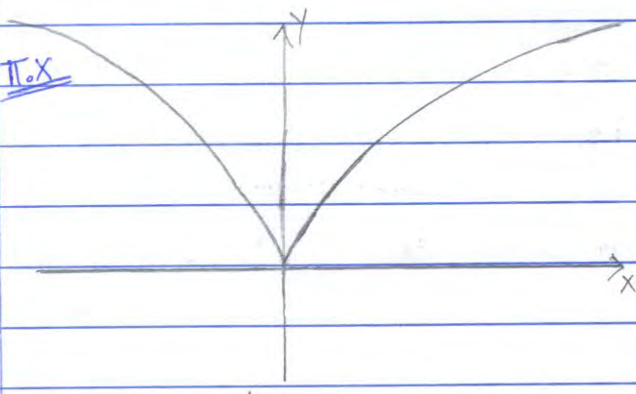
Π.Χ



$\sigma(t) = (\sin t, \cos t)$

$\sigma'(0) = (1,0)$

Π.Χ



$\sigma(t) = (t^3, t^2)$ $t \in \mathbb{R}$

$\left.\begin{matrix} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow y = x^{2/3}$

Σημ: Η $t \to \sigma(t)$ είναι διαφορίσιμη. Η καμπύλη ως γράφημα στο x-y επίπεδο δεν είναι διαφορίσιμη. Πρόβλημα οφείλεται στο ότι $\sigma'(0) = 0$, και κατά συνέπεια το εφαπτόμενο διάνυσμα δεν ορίζεται.

$\boxed{\text{Διάλεξη 6}}$

Όρια - Παραδείγματα Ορίων

1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{1/2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Δείξτε ότι είναι συνεχής.

Λύση

$ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ $\qquad$ $x_n \to 0 \iff |x_n| \to 0$

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right| \leq \left|\frac{1/2\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right| = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{1/2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

(Εκτίμηση)

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy)}{x^2+y^2-1} = \frac{\lim \cos(xy)}{\lim (x^2+y^2-1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sin(x^2+y^2)}$$ Δείξτε ότι δεν είναι συνεχής.

Το $\sin(x^2+y^2)$ συμπεριφέρεται σαν x^2+y^2 κοντά στο $(0,0)$

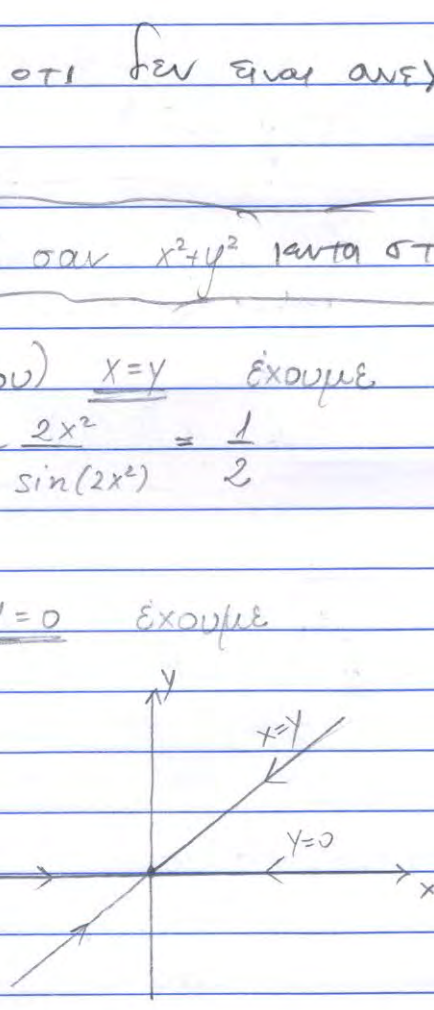
Επιλογή δρόμων:

- (Μέσω της πρώτης διχοτόμου) $x=y$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin(2x^2)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{\sin(2x^2)} = \frac{1}{2}$$

- (Μέσω του x-άξονα) $y=0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{0}{\sin x^2} = 0$$

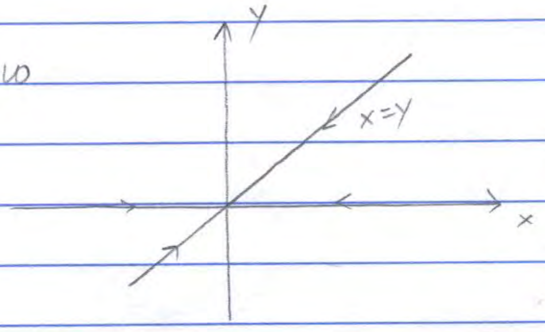


Διαφορετικά όρια

$\Rightarrow$ το όριο $\nexists$.

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x-y}$, Δείξτε ότι $\nexists$ το όριο.

$\nexists$ όριο



$\underline{x=y}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x-y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x-x} = \infty$

$\underline{y=0}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x-0} = 0$

5) (Παλιό Θέμα) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y - y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Εξετάστε την συνέχεια.

$$\left| f(x,y) \right| = \left| \frac{x^2y - y^3}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{x^2y}{x^2+y^2} \right| - \left| \frac{y^3}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{x^2y}{x^2} \right| - \left| \frac{y^3}{y^2} \right| =$$

$$= |y| - |y| \longrightarrow 0$$

(Μέσω εκτίμησης)

• Γενικά: Αν υπάρχει αναίρεση στον παρανομαστή $\exists$ πρόβλημα
(αναίρεση στην (4))

• $f(x,y) = \begin{cases} \dots, & (x,y) \neq (0,0) \\ \ell, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ τότε παίρνουμε $|f(x,y) - \ell|$ ...

Ασκήσεις

27) $f(x,y) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{y}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0. \end{cases}$ Δείξτε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Εξετάστε τα όρια $\lim\limits_{y\to 0} \left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) \right]$

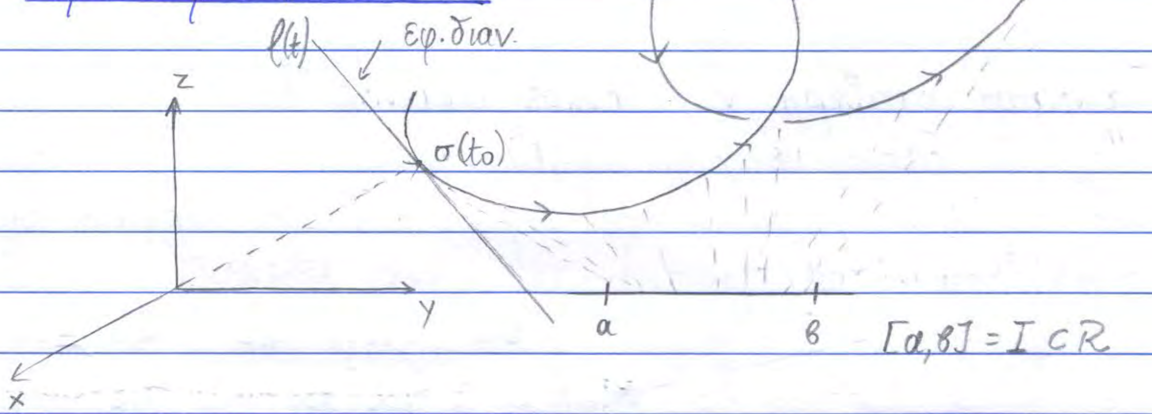
και $\lim\limits_{x\to 0} \left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) \right]$

Λύση

- $|f(x,y)| = |x \cdot \sin(1/y)| \leq |x|\,|\sin(1/y)| \leq |x| \to 0.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left[\cancel{\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)}\right] \nexists$
- $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right] = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$

Καμπύλες (συνέχεια)

Εφαπτόμενη Ευθεία



$[a,\beta] = I \subset R$

$\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

$\sigma : I \subset R \to R^n$

$\sigma'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$

Εξίσωση εφαπτομένης

$\ell(t) = \sigma(t_0) + (t - t_0)\,\sigma'(t_0)$

$\ell(t_0) = \sigma(t_0)$

Π.χ. Καμπύλη $\sigma(t)$ διέρχεται μέσω του $(3,6,5) \in R^3$ στο $t=0$ με εφαπτόμενη $\vec{i} - \vec{j}$ $(= \sigma'(0))$. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο $\sigma(0)$.

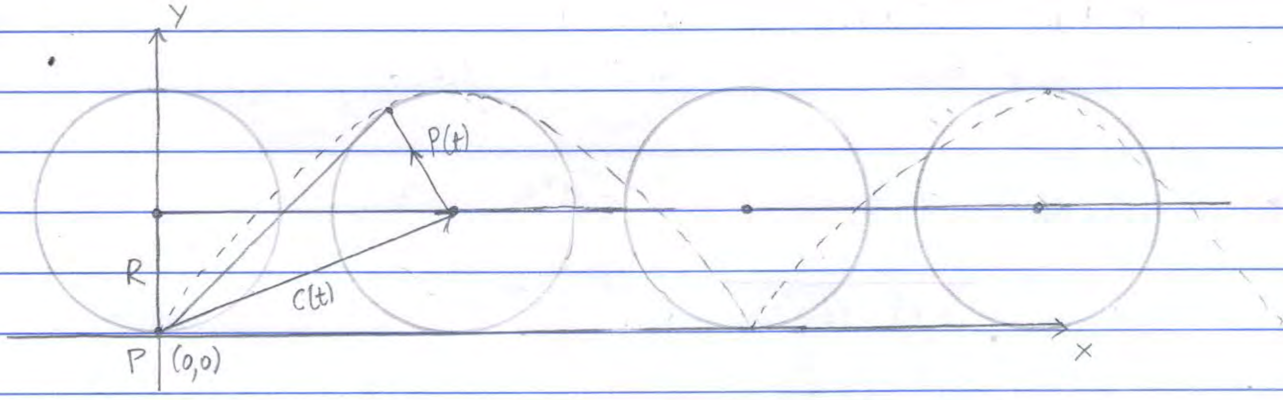
Λύση

$\ell(t) = (3,6,5) + (t-0)(\vec{i} - \vec{j}) = (3,6,5) + (t,0,0) - (0,t,0)$

$= (3+t, 6-t, 5), \quad t \in \mathbb{R}$

Π.χ

Κυκλοειδές



Ταχύτητα σταθερή v, τροχός ακτίνας R

Αρχική θέση κέντρου $(0,R)$

Να βρεθεί η τροχιά του σημείου P που αρχικά βρίσκεται στη θέση $(0,0)$.

Θα είναι $P(x(t), y(t))$. Θα βρούμε τις $x(t) = \dots$, $y(t) = \dots$

Έχουμε 2 κινήσεις : Μεταφορά του κέντρου με ταχύτητα V

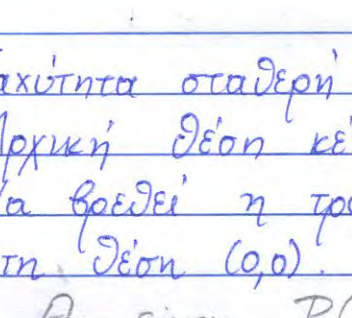
Περιστροφή του τροχού

Κίνηση 1: Η θέση του κέντρου $\bar{c}(t) = (vt, R)$

V = Ταχύτητα του κέντρου (μεταφορά)

Κίνηση 2: $v = \omega \cdot R$, όπου ω = γωνιακή ταχύτητα

Πολικές Συντεταγμένες



$R(\cos\theta, \sin\theta)$

πολικές

αρνητική φορά

$\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{-v}{R}$ (χειριζόμενη)

$\Rightarrow \quad d\theta = -\dfrac{v}{R} dt \Rightarrow \theta = -\dfrac{v}{R} t + C$

$\theta(t) = \theta(0) - \dfrac{v}{R} t, \quad \theta(0) = \dfrac{-\pi}{2}$

$\Rightarrow \theta(t) = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{v}{R} t$

Θέση του $P(t)$ σε σχέση με το κέντρο : $P(t) - C(t) = d(t)$

Άρα $\bar{P}(t) = \bar{C}(t) + \bar{d}(t) = (vt, R) + R\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{v}{R}t\right), \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{v}{R}t\right)\right)$

διότι $d(t) = R\cdot(\cos\theta(t), \sin\theta(t)) = R\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{v}{R}t\right), \sin\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{v}{R}t\right)\right)$

Άρα $\boxed{\begin{aligned} x(t) &= vt - R\cdot\sin\left(\frac{v}{R}t\right) \\ y(t) &= R - R\cdot\cos\left(\frac{v}{R}t\right)\end{aligned}}$

$\left(\cos(\varphi-\frac{\pi}{2}) = \sin\varphi \quad \sin(\varphi-\frac{\pi}{2}) = -\cos\varphi\right)$

Ειδική Περίπτωση: $v=R=1$

$\Rightarrow P(t) = (t-\sin t, 1-\cos t)$ (Εξίσωση κυκλοειδούς)

Βρείτε την ταχύτητα ($\sigma'(t)$) του σημείου P στο χείλος του κυκλοειδούς.

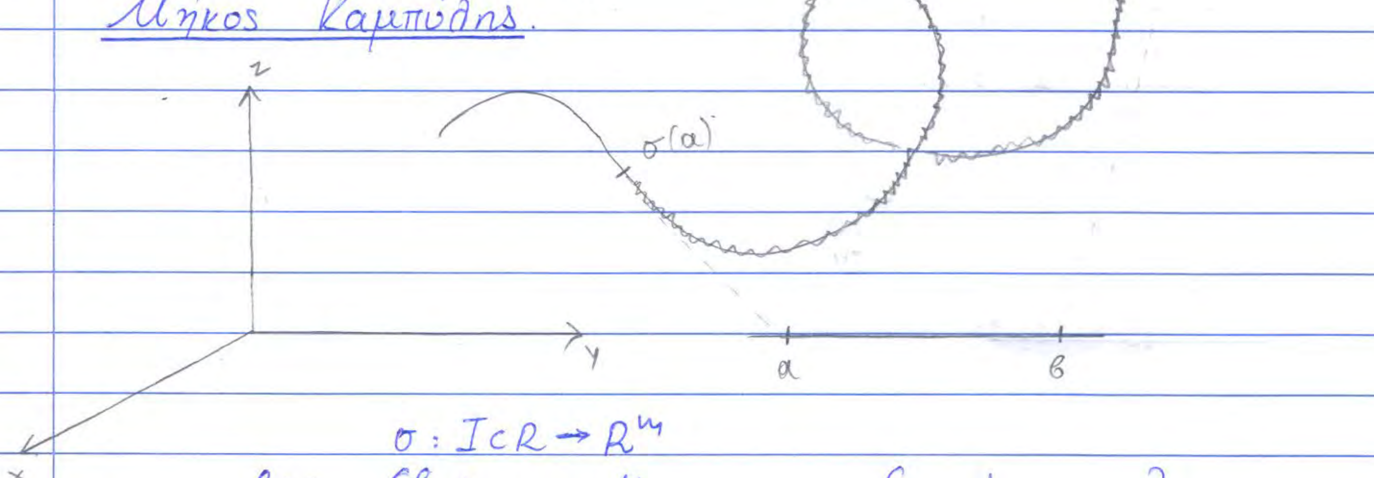
$$\sigma'(t) = \left(\frac{d}{dt}\left(vt - R\sin\frac{vt}{R}\right), \frac{d}{dt}\left(R - R\cos\frac{vt}{R}\right)\right)$$

$$= \left(v - \left(\cancel{R}\cos\frac{vt}{R}\right)\frac{v}{\cancel{R}}, \cancel{R}\left(\sin\frac{vt}{R}\right)\cdot\frac{v}{\cancel{R}}\right)$$

$$= \left(v - v\cos\frac{vt}{R}, v\sin\frac{vt}{R}\right).$$

Σημ: Το κυκλοειδές έχει πολλές ιδιότητες. (Ισοχρονικά)

Μήκος Καμπύλης.

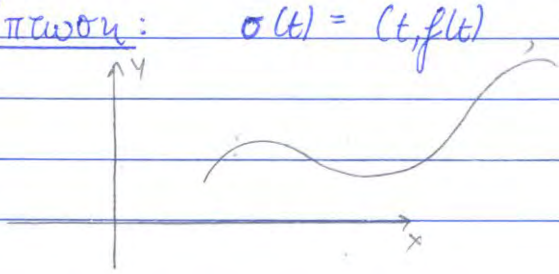


$$\sigma: I \subset R \to R^n$$

$$\ell(\gamma) = \int_a^\beta \|\sigma'(t)\|\, dt \quad , \gamma = \{\sigma(t) \mid a \le t \le \beta\}$$

Ειδική περίπτωση: $\sigma(t) = (t, f(t))$, $f: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$.

γραφήματος στο $\mathbb{R}^2$



$$\ell(\gamma) = \int_a^\beta \sqrt{1+f'(t)^2}\, dt$$

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

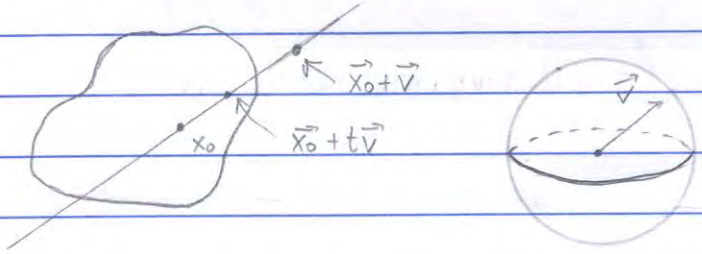
Περιπτώσεις : α) $m=1$, n γενικό. (συναρτήσεις)

β) $n=1$, m γενικό. (καμπύλες)

Κατευθυνόμενη Παράγωγος

Έστω $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A ανοικτό, $x_0 \in A$ και $\vec{v} \in S^{n-1}$

όπου $S^{n-1} = \{ v \in \mathbb{R}^n \,/\, \|\vec{v}\| = 1 \}$



Ευθεία $x_0 + t\vec{v}$, $|t|<\delta$ $\quad (\vec{x_0}+t\vec{v} \in A, \ |t|<\delta)$

Ορισμός: Το όριο (εάν υπάρχει)

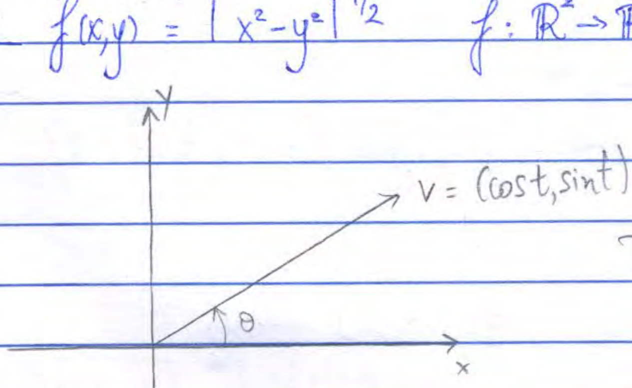
$$D_v f(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = \frac{d}{dt}\Big|_0 f(x_0+tv)$$

ορίζει την κατευθυνόμενη παράγωγο στην κατεύθυνση $\vec{v}$ στο σημείο x_0.

Παρατήρηση: $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_0+te_i)-f(x_0)}{t} = D_{e_i} f(x_0)$

Παράδειγμα

$f(x,y) = |x^2-y^2|^{1/2}$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad (x_0,y_0) = (0,0)$



$f(x_0+tv) = f(tv)$

$$D_v f(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} |t^2\cos^2\theta - t^2\sin^2\theta|^{1/2}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} |t|\,|\cos^2\theta - \sin^2\theta|^{1/2}$$

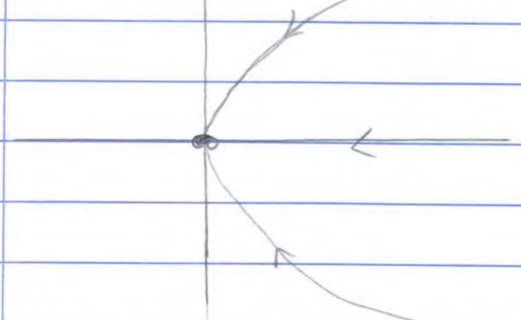
Κατά συνέπεια δεν υπάρχει η κατευθυνόμενη εάν $\theta \neq \frac{\pi}{4}$ και είναι ίση με το μηδέν εάν $\theta = \frac{\pi}{4}$

• Για $n \geq 2$ μπορεί να υπάρχει η κατευθυνόμενη $\forall \vec{v}$ και η f να μην είναι συνεχής. Για $n=1$ Παραγωγισιμότητα $\Rightarrow$ συνέχεια

Παράδειγμα

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

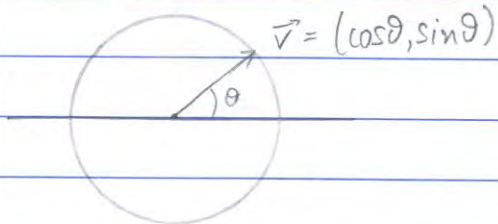
(i) Ασυνέχεια : Επιλέγουμε 2 δρόμους προσέγγισης του $(0,0)$



$f(y^2,y) = \dfrac{2y^2y^2}{y^4+y^4} = 1$ (μέσω παραβολής)

$f(x,0) = \dfrac{0}{x^2} = 0$ (μέσω x-άξονα) ✓

(ii) Θα δείξουμε ότι όλες οι κατευθυνόμενες υπάρχουν στο $(0,0)$.



α) $\cos\theta \neq 0$ $\quad (\theta \neq \frac{\pi}{2})$

Τότε
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t}$$
$$= \lim \frac{2(t\cos\theta)(t\sin\theta)^2}{t^2\cos^2\theta + t^4\sin^4\theta} \cdot \frac{1}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\cos\theta\, t^2\sin^2\theta}{t^2(\cos^2\theta + t^2\sin^4\theta)}$$
$$= \frac{2\sin\theta}{\cos\theta}$$

β) $\cos\theta = 0 \Rightarrow f(0, t\sin\theta) = \dfrac{0}{t^2\sin^2\theta} = 0$

$\square$

Γραμμικές Συναρτήσεις

Ορισμός : $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, είναι γραμμική εάν

α) $L(x+y) = L(x) + L(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

β) $L(ax) = aL(x) \quad \forall a \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$

(α),(β) $\Leftrightarrow$ $L(ax+by) = aL(x) + bL(y) \quad \forall a,b,x,y$

Παρατήρηση: $L\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i L(x_i)$

Θεώρημα (Αναπαράστασης Γραμμικών)

$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γραμμική $\iff \exists a \in \mathbb{R}^n : L(x) = a \cdot x$

Απόδειξη:

($\Leftarrow$) Έστω $L(x) = a \cdot x$. Τότε η L είναι γραμμική

Πράγματι • $L(x+y) = a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y = L(x) + L(y)$

• $L(\beta x) = a \cdot (\beta x) = \beta \cdot (a x) = \beta L(x)$

($\Rightarrow$) Εαν L γραμμική τότε $\exists a \in \mathbb{R}^n : L(x) = a \cdot x$

Πράγματι θέτουμε $a_i = L(e_i)$, $a_i \in \mathbb{R}$

Δοθέντος $x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n$

Άρα $L(x) = L(x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n e_n) = L(x_1 e_1) + \dots + L(x_n e_n)$

$= x_1 \cdot L(e_1) + \dots + x_n L(e_n)$

$= x_1 \cdot a_1 + \dots + x_n \cdot a_n = a \cdot x$

$\boxed{\text{Διάλεξη 7}}$

Ορισμός: (Διαφορισιμότητα)

f διαφορίσιμη στο x_0 εάν $\exists$ γραμμική L (εξαρτώμενη εν γένει από το x_0) τέτοια ώστε

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

$\iff \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τέτοια ώστε
$\|f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)\| \leq \varepsilon \|h\|$, για $\|h\| < \delta$

Συμβ: $L := Df(x_0)$ $\Leftarrow$ ονομάζεται διαφορικό

Θεώρημα: Έστω f διαφορίσιμη. Τότε υπάρχει η κατά κατεύθυνση παράγωγος και μάλιστα είναι ομοιόμορφη ως προς $\vec{v}$.

Δηλαδή ισχύει $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = Df(x_0)(v)$

* (ομοιόμορφα για $\|\vec{v}\|=1$, $D_v f(x_0) = Df(x_0)(v)$)

Απόδειξη:

Θα δείξουμε ότι $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ τέτοιο ώστε

$$\left| \frac{f(x_0+t\vec{v})-f(x_0)}{t} - Df(x_0)(\vec{v}) \right| < \varepsilon \quad , \text{για } |t|<\delta$$

ομοιόμορφα ως προς $\vec{v}$, $\|\vec{v}\|=1$.

f διαφορίσιμη $\Rightarrow \dfrac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-Df(x_0)(h)\|}{\|h\|} < \varepsilon$, $\|h\|<\delta$

Για $h=t\vec{v}$ έχουμε $\dfrac{\|f(x_0+tv)-f(x_0)-Df(x_0)(t\vec{v})\|}{\|t\vec{v}\|} < \varepsilon$
για $|t|<\delta$, $\|\vec{v}\|=1$

$$\Rightarrow \frac{\|f(x_0+t\vec{v})-f(x_0)-tDf(x_0)(\vec{v})\|}{\|t\|} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x_0+t\vec{v})-f(x_0)}{t} - Df(x_0)(\vec{v}) \right| < \varepsilon$$

□

Πόρισμα: Έστω f διαφορίσιμη. Τότε
$\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = Df(x_0)(\vec{e_i}) = D_{e_i} f(x_0)$

Έστω ότι η f διαφορίσιμη στο $x = x_0$.
Τότε

<u>Πρόταση</u>: $Df(x_0)(\vec{v}) = \vec{a} \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{v}$

$$\vec{a} = \left(\frac{df(x_0)}{dx_1}, \dots, \frac{df(x_0)}{dx_n} \right), \quad \bar{a} \text{ η } \underline{\text{κλίση}}$$

<u>Απόδειξη</u>:

θεώρημα αναπαράστασης

$$D_v f(x_0) = Df(x_0)(\vec{v}) = a \cdot v$$

$$Df(x_0)(v) = Df(x_0)(v_1 \cdot e_1 + \dots + v_n \cdot e_n)$$

$$\underset{\text{γραμμικότητα}}{=} v_1 Df(x_0)(e_1) + \dots + v_n Df(x_0) e_n$$

$$= v_1 D_{e_1} f(x_0) + \dots + v_n D_{e_n} f(x_0)$$

$$= v_1 \cdot \frac{df}{dx_1} + \dots + v_n \frac{df}{x_n}$$

$$= \nabla f(x_0) \cdot v \quad , \nabla \text{ κλίση}$$

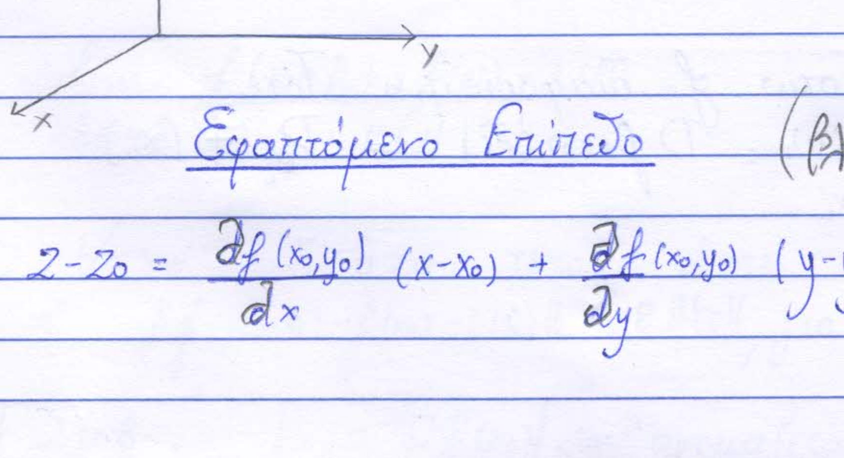
<u>Ορισμός</u>: (Κλίση, grad, ή ανάδελτα)

$$\nabla f(x_0) := \left(\frac{df(x_0)}{dx_1}, \dots, \frac{df(x_0)}{dx_n} \right)$$

Κλίση Και Εφαπτόμενο Επίπεδο

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right)$ κάθετο



$z = f(x,y)$

<u>Εφαπτόμενο Επίπεδο</u> (βλέπε Εφ. Επίπεδο Διάλεξη 5)

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

$\Leftrightarrow \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, -1\right)(x,y,z) = \frac{df}{dx}x_0 + \frac{df}{dy}y_0 - z_0$

$\Leftrightarrow \quad \vec{X}\cdot\vec{a} = c$ με $\vec{a}$ κάθετο.

<u>Θεώρημα:</u> Διαφορισιμότητα $\Rightarrow$ Συνέχεια
('Υπαρξη κατευθυνόμενων παραγώγων $\not\Rightarrow$ Συνέχεια)

<u>Απόδειξη:</u> Δοθέντος $\varepsilon > 0$ έχουμε

Διαφορ $\Rightarrow$ $|f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)| < \varepsilon\|h\|$, $\|h\| < \delta$, $(*)$

Πάντα μπορούμε να επιλέξουμε $\delta \le \varepsilon$ (νέο $\hat{\delta} = \min\{\delta, \varepsilon\}$).

και Χ.Β.Γ., $\varepsilon \le 1$ $|f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)| < \varepsilon\delta$.

$(**)$ $|f(x_0+h) - f(x_0)| < |Df(x_0)(h)| + \varepsilon\delta$

$= |\nabla f(x_0)\cdot h| + \varepsilon\delta$

$\overset{C-S}{\le} \|\nabla f(x_0)\|\delta + \varepsilon\delta \quad (\|h\| \le \delta)$

$= \delta(\|\nabla f(x_0)\| + \varepsilon)$

$< \delta(\|\nabla f(x_0)\| + 1) \quad (\varepsilon \le 1)$

$\le \varepsilon(1 + \|\nabla f(x_0)\|)$

Από την $(**)$ προκύπτει η συνέχεια.

Κανόνας Της Αλυσίδας

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ανοικτό, f διαφορίσιμη
$\sigma: I \to A$, $\sigma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, σ διαφορίσιμη
Ορίζουμε την
$h: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = f(\sigma(t)) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$

(Περιορισμός της f σε καμπύλη)

Πρόταση: Η $h: I \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη και
$$h'(t) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$$

Απόδειξη:

$$h'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(x_1(t), \dots, x_n(t)) - f(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))}{t - t_0}$$

$$= \frac{f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) - f(x_1(t_0), x_2(t), \dots, x_n(t))}{t - t_0}$$
$$+ \frac{f(x_1(t_0), x_2(t), \dots, x_n(t)) - f(x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t), \dots, x_n(t))}{t - t_0}$$
$$+ \frac{f(x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t), \dots, x_n(t)) - f(x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0), x_4(t), \dots)}{t - t_0}$$
$$+ \frac{f(x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0), x_4(t), \dots, x_n(t)) - \dots - f(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))}{t - t_0} \quad (*)$$

Τώρα θα κανουμε χρήση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής:
$g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, διαφορίσιμη στο (α, β)
Τότε $\exists$ $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(\beta) - g(\alpha) = g'(c)(\beta - \alpha)$
Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ στην f ως συνάρτηση του x_1, με σταθερές τις $x_2, \dots, x_n$

$c_1 \in (x_1(t), x_1(t_0))$

Άρα $f(x_1(t), \dots, x_n(t)) - f(x_1(t_0), \dots, x_n(t)) = \left[\frac{d(c_1, x_2, \dots, x_n)}{dx_1}\right](x_1(t) - x_1(t_0))$

Με αυτόν τον τρόπο για κάθε κλάσμα στην $(*)$ παίρνουμε

$$\Rightarrow \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \left[\frac{\partial f}{dx_1}(c_1, x_2(t), \dots, x_n(t))\right] \frac{x_1(t) - x_1(t_0)}{t - t_0} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1(t), c_2, x_3(t), \dots, x_n(t)\right] \frac{x_2(t) - x_2(t_0)}{t - t_0}$$

$$\vdots$$

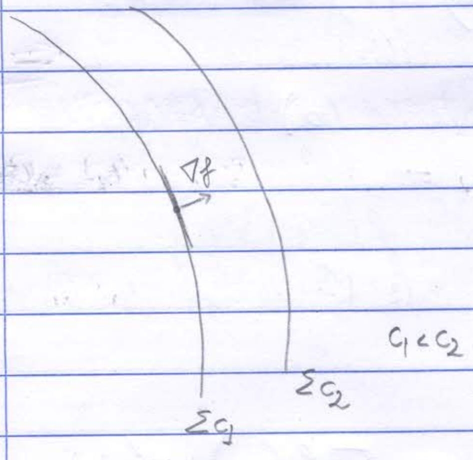
$$+ \left[\frac{\partial}{dx_n}(x_1(t), x_2(t), \dots, c_n)\right] \frac{x_n(t) - x_n(t_0)}{t - t_0}$$

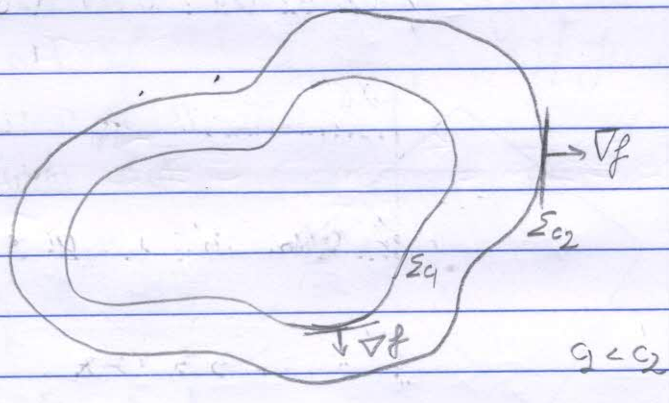
όπου $c_i \in (x_i(t), x_i(t_0))$

Επομένως για $t \to t_0$ έχουμε το ζητούμενο. $\square$

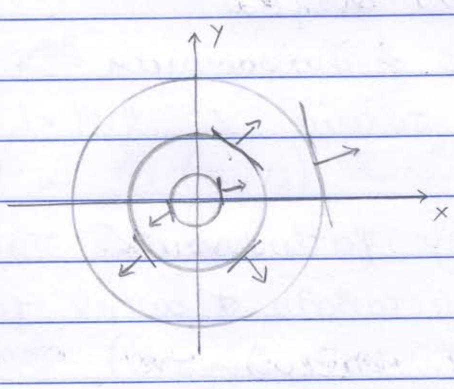
Η κλίση ∇f και τα σύνολα στάθμης $\Sigma_c = \{x \mid f(x) = c\}$

Θα δείξουμε ότι $\nabla f(\xi) \perp \Sigma_c$, $\xi \in \Sigma_c$, f διαφορίσιμη
$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$



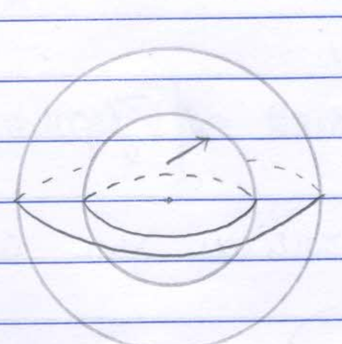


Π.χ $z = f(x,y) = x^2+y^2$, $\Sigma_c = \{(x,y) \mid x^2+y^2=c\}$



$$\nabla f = (2x, 2y) = 2(x,y)$$

Π.χ $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $\Sigma_c = \{x^2+y^2+z^2=c\}$



$$\nabla f = (2x, 2y, 2z) = 2(x,y,z)$$

Πρόταση: Έστω $\Sigma_c = \{x \in A \mid f(x) = c\}$, $\xi \in \Sigma_c$. Τότε ισχύει

1) ______ : $\nabla f(\xi) \perp \Sigma_c$

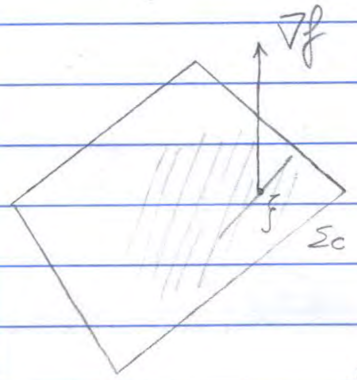
2) Το $\nabla f(\xi)$ κατευθύνεται προς την κατεύθυνση μέγιστης αύξησης της f.

Απόδειξη:

1) Έστω $\xi \in \Sigma_c$, Έστω σ καμπύλη στο Σ_c

Θα δείξουμε ότι εάν $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \Sigma_c$ (σ διαφορίσιμη)

$t \in I$, $\sigma(0) = \xi$, $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$



Τότε ισχύει ότι $\sigma'(0) \perp \nabla f(\xi)$

$\sigma(t) \in \Sigma_c$ άρα $f(\sigma(t)) = c$

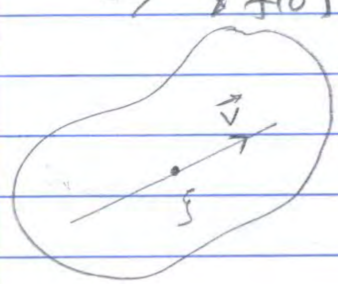
$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(\sigma(t)) = 0$$

Δηλαδή $\nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = 0 \Rightarrow \nabla f(\xi) \cdot \sigma'(0) = 0$

$\Rightarrow \nabla f(0) \perp \forall$ διάνυσμα $\sigma'(0)$, σ καμπύλη στην Σ_c

$\Rightarrow \nabla f(0) \perp$ στον εφαπτόμενο χώρο.

2)



$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f διαφορίσιμη

Θεωρούμε μια τυχαία v, $\|v\| = 1$

Υπολογίζουμε την κατευθυνόμενη παράγωγο (ή την μεταβολή σ' αυτήν την κατεύθυνση).

$$D_v f(\xi) = \frac{d}{dt}\Big| f(\xi + t\vec{v}) = \nabla f(\xi) \cdot \vec{v}$$

Έχουμε $\nabla f(\xi) \cdot \vec{v} = \|\nabla f(\xi)\| \|\vec{v}\| \cos\theta = \|\nabla f(\xi)\| \cdot \cos\theta$ ⊛

Κατά συνέπεια η ⊛ μεγιστοποιείται για $\cos\theta = 1$ $(\theta = 0)$

Άρα $\nabla f(\xi)$ καθορίζει την κατεύθυνση μέγιστης αύξησης □

Εφαρμογή (Εξίσωση Εφαπτόμενου Επιπέδου)

Θεωρούμε την $z = g(x,y)$ που αναδιατυπώνουμε ως $z - g(x,y) = 0$, $z_0 = g(x_0, y_0)$

Θέτουμε

$$f(x,y,z) = z - g(x,y)$$

και θεωρούμε την επιφάνεια $z = g(x,y)$ ως σύνολο στάθμης της f, $\Sigma_0 = \{(x,y,z) \,/\, f(x,y,z) = 0\}$.

Γνωρίζουμε ότι $\nabla f \perp \Sigma_0 \iff$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0}} \perp \Sigma_0$$

$$\left(-\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}, -\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}, 1\right) \perp \Sigma_0$$

$\iff$

$$\left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}, 1\right) \cdot \left(x-x_0, y-y_0, z-z_0\right) = 0$$

$\iff$

$$\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) = z - z_0,$$

συμπίπτει με την γνωστή εξίσωση του εφ. επιπέδου.

$\square$

Παραδειγμα

Υπολογιστε την εξισωση του εφ. επιπεδου στην επιφανεια $3xy + z^2 = 4$ στο $(1,1,1)$

Λυση

$f(x,y,z) = 3xy + z^2 - 4 = 0$

$\nabla f = (3y, 3x, 2z)$, $\quad \nabla f(1,1,1) = (3,3,2)$

Εξισωση Επιπεδου

$\nabla f(1,1,1)\,(x-1,\ y-1,\ z-1) = 0$

$\Rightarrow \boxed{3x + 3y + 2z = 8}$

$\square$

Πακέτο Σημειώσεων 2 / Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Σχόλιο Στην Κατευθυνόμενη Παράγωγο

1.) $$D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x_0 + tv)$$

Επίσης εάν η f είναι διαφορίσιμη τότε

2) $$D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

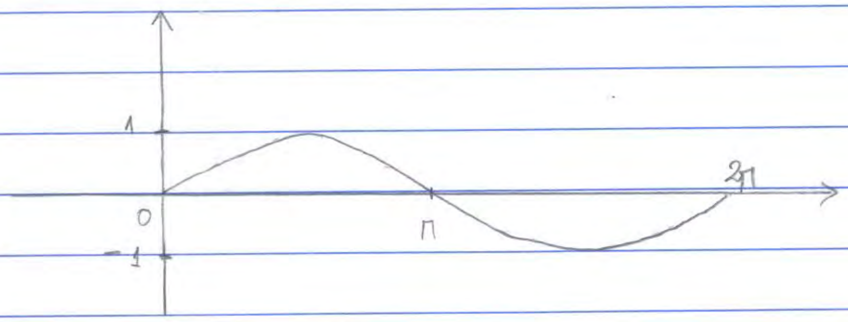
(Η 1,2 ισχύουν $\forall \vec{v}$ κανονικοποιημένο ή μη).

Παραδείγματα

1.) $f(x,y) = xy$, $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$
Βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της f κατά μήκος της τροχιάς $\sigma(t)$.

Λύση

Ορίζουμε $h(t) = f(\sigma(t)) = \cos t \cdot \sin t = \frac{1}{2} \sin 2t$



$\max h = 1/2$

$\min h = -1/2$

$\boxed{}$

2) Δείξτε ότι ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $x^3y^3 + y - z + 2 = 0$ στο $(0,0,2)$ δίνεται από το
$$\vec{\eta} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\vec{j} - \vec{k})$$

Λύση

$F(x,y,z) = x^3y^3 + y - z + 2 = 0$

$$\nabla F\Big|_{(0,0,2)} = \left(2x^2y^3,\ 3y^2x^3 + 1,\ -1\right)\Big|_{(0,0,2)} = (0,1,-1)$$

$$\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \vec{n}$$

3) Βρείτε την ______ τιμή της μέγιστης κατευθυνόμενης παραγώγου στο σημείο $(1,2,-1)$ για την συνάρτηση

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

Λύση

$$\nabla f\Big|_{(1,2,-1)} = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}, \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}, \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)\Bigg|_{(1,2,-1)}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 1, -1 - \frac{1}{4}, 1 - \frac{2}{1}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-5}{4}, -1\right)$$

Άρα το ζητούμενο θα είναι : $\|\nabla f\| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-5}{4}\right)^2 + (-1)^2} = \dots$

Ποια είναι η αντίστοιχη κατεύθυνση;

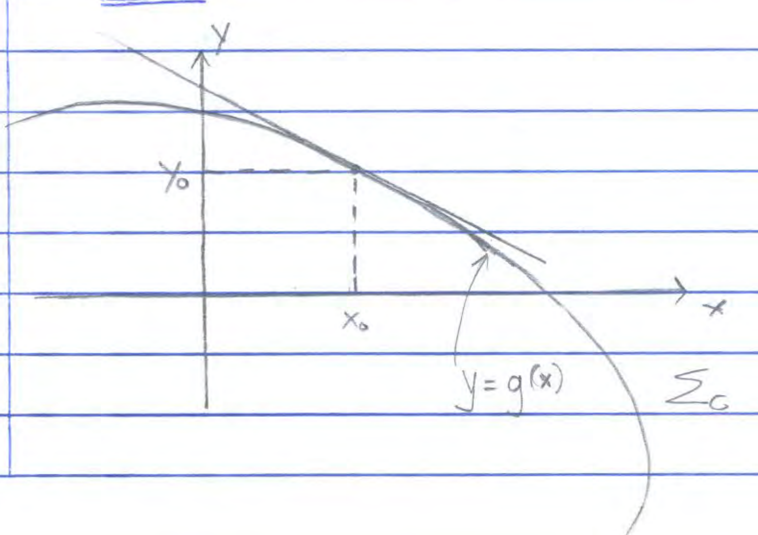
4) Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη και έστω $(x_0, y_0) \in \Sigma_c$

$\Sigma_c = \{(x,y) \mid f(x,y) = c\}$.

Δείξτε ότι εάν η Σ_c τοπικά περί το (x_0,y_0) είναι γράφημα $(x, g(x))$ τότε ισχύει

$$\nabla f(x_0,y_0) \perp \text{Εφαπτόμενη ευθεία στο } (x_0, g(x_0))$$

Λύση



(Υπόθεση) $f(x,g(x)) = c$, $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta > 0$

Άρα έχουμε $\sigma(x) = (x, g(x))$ και $f(x,y) = f$

Ορίζουμε $h(x) = f(\sigma(x)) = f(x,g(x)) = c$

Επομένως $\dfrac{\partial h(x)}{\partial x} = 0$

Όμως $\dfrac{\partial h(x)}{\partial x} = \nabla f(\sigma(x)) \cdot \sigma'(x) = \nabla f(x,g(x)) \cdot (1, g'(x))$

Κατα συνέπεια για $x = x_0$

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (1, g'(x_0)) = 0$$

Παρατηρούμε ότι το $(1, g'(x_0))$ βρίσκεται επι της εφαπτόμενης ευθείας, στο γράφημα στο σημειο $(x_0, g(x_0))$. ☒

Ικανές Συνθήκες Για Διαφορισιμότητα

Γνωρίζουμε ότι η ύπαρξη της κατευθυνόμενης παραγώγου για κάθε κατέυθυνση δεν εγγυάται την ύπαρξη διαφορικού. Ισχύει όμως η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση: $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A ανοιχτό, $x_0 \in A$.
Εάν το όριο $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t} = \nabla f(x_0) \cdot v$

υπάρχει ομοιόμορφα για v στην σφαίρα S^{n-1} (δλδ $\|\vec{v}\| = 1$), τότε η f είναι διαφορίσιμη στο x_0.
Ισχύει και το αντίστροφο

Απόδειξη:

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της διαφορισιμότητος για $f: A \to \mathbb{R}$:
Η f είναι διαφορίσιμη εάν

$$(1) \qquad \lim_{\|h\| \to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot h|}{\|h\|} = 0$$

Γράφουμε το h ως εξής:

$$h = \|h\| \frac{h}{\|h\|} = t v \quad , \quad t = \|h\| , \; v = \frac{h}{\|h\|}$$

$(1) \Leftrightarrow$

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{t} - \nabla f(x_0) v \right| = 0 .$$

Η Πρόταση αποδείχθη. $\square$

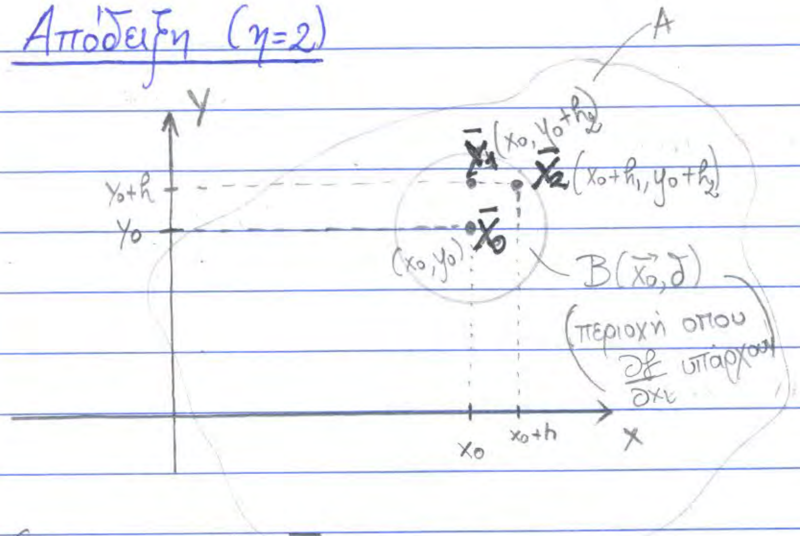
Η προηγούμενη Πρόταση δεν βοηθάει στο να μπορούμε να αναγνωρίσουμε με ευκολία πότε μια f είναι διαφορίσιμη.

Η επόμενη είναι ιδιαίτερα χρήσιμη διότι δίνει ικανές συνθήκες

Θεώρημα: Έστω $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A ανοιχτό, $x_0 \in A$.
Έστω επίσης ότι οι $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ υπάρχουν και είναι και συνεχείς σε μια περιοχή του x_0.
Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο x_0.

Σημ: Η κλάση των συναρτήσεων με συνεχείς μερικές παραγώγους συμβολίζεται ως C^1.

Απόδειξη ($n=2$)



$\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$

$h = (h_1, h_2)$

$\vec{x}_1 = (x_0, y_0) + (0, h_2) = (x_0, y_0+h_2)$

$$\vec{x}_2 = (x_0, y_0) + (h_1, h_2) = (x_0+h_1, y_0+h_2) = \vec{x}_0 + \vec{h}$$

(Γράφουμε $\bar{x}_0$, $\bar{h}$, κ.λ.π. για αποφυγή σύγχυσης με τα x_0, y_0, h_1, h_2)..

Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$(*) \quad \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : \|f(\vec{x}_0+\vec{h}) - f(\vec{x}_0) - \nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{h}\| \leq \varepsilon \|\bar{h}\| \quad \text{για } \|\bar{h}\|<\delta.$$

Έχουμε $\bullet\ f(\vec{x}_0+\vec{h}) = f(\vec{x}_2)$

(1) Επομένως $f(\vec{x}_0+\vec{h}) - f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_0)$

(2) $\bullet\ f(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_1) = f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0+h_2)$

$$\overset{\text{από ΘΜΤ}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, y_0+h_2)\cdot h_1 \ {\scriptstyle = (x_0+h_1-x_0)}, \quad c_1 \in (x_0, x_0+h_1)$$

(3) $\bullet\ f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_0) = f(x_0, y_0+h_2) - f(x_0, y_0) \overset{\text{ΘΜΤ}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, c_2)\cdot h_2$, $\quad c_2 \in (y_0, y_0+h_2)$

Από (1),(2),(3) η (*) γίνεται:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, y_0+h_2)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, c_2)\cdot h_2 - \overbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\, h_2 \right)}^{\nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{h}} \right|$$

$$\leq |h_1| \left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, y_0+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \right| + |h_2| \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, c_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right|$$

$$\leq \|h\| \left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, y_0+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \right| + \|h\| \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, c_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right|$$

$$= \|h\| \left[\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c_1, y_0 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right)}_{\text{συνεχής (υποθ.)}} + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, c_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)}_{\text{συνεχής (υποθ)}} \right]$$

Δοθέντος $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. $\|h\| \leq \delta$ $\Rightarrow$ Άρα $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ Άρα $\leq \frac{\varepsilon}{2}$

$\leq \|h\| \, |\varepsilon|$.

Το θεώρημα αποδείχθη. ☒

Παράδειγμα (Παλιό θέμα / Σεπτ 2014)

Εξηγείστε γιατί η συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2 + 2xy^3 + \ln(x^2+1)$ είναι διαφορίσιμη στον $\mathbb{R}^3$ και υπολογίστε το διαφορικό στο $(1,2,0)$

Λύση

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y^3 + \frac{2x}{x^2+1}$ ($\Rightarrow$ συνεχής)

$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy^2$ ($\Rightarrow$ συνεχής)

$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ ($\Rightarrow$ συνεχής)

Άρα οι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς

Συνεπώς από το παραπάνω θεώρημα f διαφορίσιμη.

- Το διαφορικό είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x, y, z)$$

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2,0)} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 8 + 1 = 20$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2,0)} = 24$, $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,2,0)} = 0$

Άρα $\nabla f(1,2,0) = (20,24,0)$

Άρα $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (20,24,0)\cdot(x,y,z) = 20x + 24y$ ∎

<u>Παράδειγμα</u>: (Παλιό θέμα / Σεπτ 2014)

Έστω $f(x,y) = g(x) + \ell(y)$
g, ℓ διαφορίσιμες στο x_0, y_0 αντίστοιχα.

Δείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο (x_0,y_0)

<u>Λύση</u>

Υπενθυμίζαμε οτι για $n=1$ διαφορισιμοτητα = παραγωγισιμοτητα.
Για να είναι η f διαφορίσιμη πρέπει

$$\left| f(\vec{x_0}+\vec{h}) - f(\vec{x_0}) - L(h) \right| \leq \varepsilon \|h\| \quad \text{για} \quad \|h\| < \delta$$

Δηλαδή $\left| f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) - L\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right| \leq \varepsilon \|h\|$ (*)

- $L\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \nabla f(x_0,y_0)\cdot(h_1,h_2)$

Είναι $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(g'(x), \ell'(y) \right)$

$$\nabla f(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)} = \left(g'(x_0), \ell'(y_0) \right)$$

Άρα $L\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (g'(x_0), \ell'(y_0))\cdot(h_1,h_2) = g'(x_0)\cdot h_1 + \ell'(y_0)\cdot h_2$

Η (*) γίνεται:

$$\left| g(x_0+h_1) + \ell(y_0+h_2) - g(x_0) - \ell(y_0) - g'(x_0)\cdot h_1 - \ell'(y_0)\cdot h_2 \right|$$

$$= \left| \left(g(x_0+h_1) - g(x_0) - g'(x_0)\cdot h_1 \right) + \left(\ell(y_0+h_2) - \ell(y_0) - \ell'(y_0)\cdot h_2 \right) \right|$$

g, ℓ διαφορίσιμες ← Χρήση διαφορισιμότητος g και ℓ

$$\leq \left(\frac{\varepsilon}{2} \cdot |h_1|\right) + \left(\frac{\varepsilon}{2} |h_2|\right)$$

(για $|h_1|<\delta$, $|h_2|<\delta$, άρα αρκεί $\|h\|<\delta$ γιατί $|h_1| \leq \|h\|$, $|h_2| \leq \|h\|$)

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\|h\| + \frac{\varepsilon}{2}\|h\|$$

$$= \varepsilon \|h\|.$$

$\boxtimes$

Παράδειγμα (Συνέχεια θέματος)

Έστω $f(x,y) = \sin x + y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)$, $y \neq 0$
$f(x,0) = \sin x$

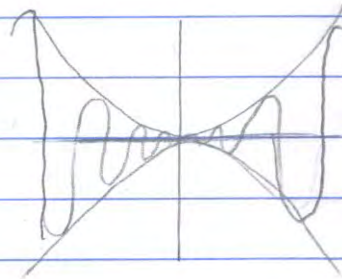
α) Να υπολογιστεί το διαφορικό της f εάν υπάρχει στο $(0,0)$

β) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της $z = f(x,y)$ στο $(0,0,0)$

Λύση

α) $g(x) = \sin x$
$\ell(y) = y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)$, $\ell(0) = 0$ (από υποθ)

Η $\ell(y)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.



$$\ell'(0) = \lim_{y \to 0} \frac{\ell(y) - \ell(0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} y \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

Άρα $\ell'(0)$ υπάρχει, δηλαδή ℓ διαφορίσιμη.
Ομοίως $g'(0) = \cos 0 = 1$, δηλαδή g διαφορίσιμη.

Επομένως (προηγούμενο παράδειγμα) f διαφορίσιμη

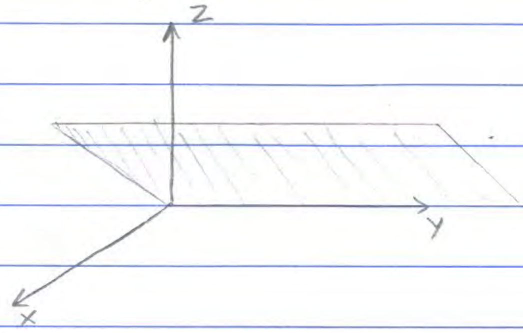
Άρα $L\binom{h_1}{h_2} = \nabla f(0,0)\cdot(h_1,h_2) = (1,0)\cdot(h_1,h_2) = h_1$

β) Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι:

$$z-z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

Άρα $z-0 = 1\cdot x + 0\cdot y$

$\Rightarrow \boxed{z = x}$



38) Δείξτε ότι η $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} &, (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 &, (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$

δεν είναι διαφορίσιμη.

<u>Λύση</u>

Έστω ότι η f είναι διαφορίσιμη, θα οδηγηθούμε σε αντίφαση. Τότε υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος και είναι γραμμική ως προς $\vec{v}$ (βλέπε προηγούμενη πρόταση).

Δηλαδή $D_v f(0) = L(v)$

Έχουμε $D_v f(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(tv)-f(0)}{t-0} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{tv_1\, tv_2\, tv_3}{t(t^2v_1^2+t^2v_2^2+t^2v_3^2)}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^3(v_1v_2v_3)}{t^3(v_1^2+v_2^2+v_3^3)} = \frac{v_1v_2v_3}{v_1^2+v_2^2+v_3^3}$$

η οποία προφανώς δεν είναι γραμμική συνάρτηση του $\vec{v}$. Κατά συνέπεια η f δεν είναι διαφορίσιμη. □

33) Έστω $f(x,y) = f(y,x)$ $\forall (x,y)$.
Δείξτε ότι $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(y,x)}{\partial y}$

Λύση

$$f(x,y) = f(y,x) \Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(y,x)}{\partial x}$$

Λυση (Κανονας Αλυσιδας)

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)] = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial x}[f(y,x)] = \frac{\partial f(y,x)}{\partial y}$$

Άρα $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(y,x)}{\partial y}$.

34) Έστω f ομογενής βαθμού p, $f(tx) = t^p f(x)$, $x \neq 0$, $t > 0$
Έστω f διαφορίσιμη $\forall x \neq 0$. Δείξτε ότι:
(*) $\nabla f(x) \cdot x = p f(x)$ (Euler)
Και αντιστρόφα. Εαν ισχυει η (*) τοτε f ειναι ομογενης.
Αποδειξη
A. Εστω f διαφορισιμη, $x \neq 0$, και $f(tx) = t^p f(x)$.
Τοτε $\dfrac{d}{dt}\left(f(tx)\right) = \dfrac{d}{dt}\left(t^p f(x)\right)$

$$\nabla f(tx) \cdot x = p t^{p-1} f(x) \quad \text{(Κανονας αλυσιδας)}$$

Θετουμε $t=1 \Rightarrow \nabla f(x) \cdot x = p f(x)$

B. Εστω αντιστροφα οτι ισχυει η (*), f διαφορισιμη
Απο τον κανονα αλυσιδας $\dfrac{d}{dt} f(tx) = \nabla f(tx) \cdot x$. (1)
Απο (*) για $y = tx$
$\nabla f(y) \cdot y = p f(y) \Leftrightarrow \nabla f(tx) \cdot tx = p f(tx)$ (2)
Θετουμε $g(t) = f(tx)$. Τοτε (1),(2) $\Rightarrow t \dfrac{dg}{dt} = p g(t)$ (3)

Η (3) ειναι χωριζομενων μεταβλητων:

$$\frac{dg}{g} = \frac{p}{t}$$

Ολοκληρωνουμε

$$\ln|g(t)| = p\ln t + \ln C \qquad (t>0)$$

$$= \ln t^p + \ln C \qquad (C>0)$$

$$= \ln(Ct^p).$$

$\Leftarrow$

(4) $$g(t) = \tilde{C}t^p$$ ($\tilde{C}$ θετικη ή αρνητικη ή μηδεν)

Δηλαδη

(5) $$f(tx) = \tilde{C}t^p, \quad t>0.$$

Θετουμε τωρα $t=1$ στην (5):

(6) $$f(x) = \tilde{C}.$$

Κατα συνεπεια η (5) γραφεται στην μορφη

$$f(tx) = f(x)t^p,$$

που ειναι και το ζητουμενο. $\square$

Περί της αναγκαιότητος της συνέχειας των μερικών παραγώγων για διαφορισιμότητα

Στο προηγούμενο θεώρημα, η συνέχεια των $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1,\dots,n$ δεν είναι αναγκαία για διαφορισιμότητα.
Είναι απλώς μια ικανή συνθήκη.

Για $n=1$ διαφορισιμότητα $\equiv$ παραγωγισιμότητα
Είναι εύκολο κατά συνέπεια να δώσουμε παράδειγμα παραγωγίσιμης συνάρτησης, αλλά χωρίς συνεχή παράγωγο.

Παράδειγμα:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

1) Είναι διαφορίσιμη: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot h^2 \sin\frac{1}{h} = 0$

2) Η f' δεν είναι συνεχής στο $x=0$

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) \nexists$$

3) Κατασκευάζουμε εύκολα τώρα αντιπαράδειγμα για $n=2$ κάνοντας χρήση του προηγούμενου παραδείγματος

Ορίζουμε $g(x,y) = f(x) + f(y)$, Διαφορίσιμη

αλλά μερικές παράγωγοι $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = f'(x)$ $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = f'(y)$

όχι συνεχείς.

Το διαφορικό μετασχηματισμού $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$.

$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, $f_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$

Παραδείγματα Μετασχηματισμών

1) $f(x) = Ax$, $A = m \times n$ πίνακας

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

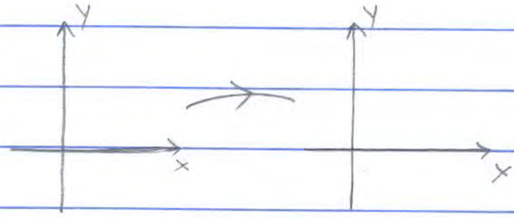
$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$f_1(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$

$\vdots$

$f_m(x_1, \dots x_n) = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n$

2) $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$



$z = x + iy \leftrightarrow (x, y)$

$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$

$f(z) = (x^2 - y^2, 2xy)$

Ορίζουμε $F(x,y) = f(x+iy) = (x^2 - y, 2xy)$

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

<u>Ορισμός</u>: $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A ανοιχτό

Το διαφορικό της f στο $x_0 \in A$, $Df(x_0)$, ορίζεται ως ο πίνακας $m \times n$

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j}\right), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Ο μετασχηματισμός f λέγεται <u>διαφορίσιμος</u> στο x_0 εάν ισχύει:

$$(1) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0) \|}{\| x - x_0 \|} = 0$$

Δηλαδή $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(2) \quad \| f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0) \| < \varepsilon \| x - x_0 \|, \quad \text{για } \| x - x_0 \| < \delta$$

<u>Συμβολισμός</u>:

- $$Df(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{df_1(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_{\cancel{1}}} & \dots & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{bmatrix}$$

- Στην περίπτωση $m = 1$ η (1) παίρνει τη μορφή

$$(3) \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{\| x - x_0 \|} \left| f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \right| = 0$$

Εάν καλέσουμε $h = x - x_0$, τότε η (3) γίνεται

$$(4) \quad \lim_{\| h \| \to 0} \left| f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot h \right| = 0$$

Παρατήρηση: Προκύπτει εύκολα ότι ο μετασχηματισμός f είναι διαφορίσιμος $\iff \forall f_i : A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση διαφορίσιμη στο x_0.

Παραδείγματα:

α) $f(x,y) = (e^{x+y} + y, y^2 x) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y}+1 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$

β) $f(x,y) = (x^2 + \cos y, ye^x) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -\sin y \\ ye^x & e^x \end{pmatrix}$$

γ) $f(x_1, \dots, x_n) = Ax \qquad A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

$$Ax = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)$$

$$= (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \nabla f_2(x) \\ \vdots \\ \nabla f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι $Df(x) = A$, δηλαδή στην περίπτωση των γραμμικών μετασχηματισμών το διαφορικό συμπίπτει με τον εαυτό του.

Μικρό Θεώρημα Τοπικής Αντιστρεψιμότητας

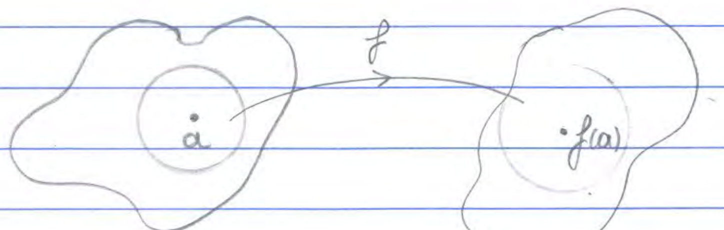
Έστω $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(m=n)$, διαφορίσιμη στο $a \in A$
και έστω ότι το διαφορικό $L = Df(a)$ ($n \times n$ πίνακας)
έχει $\det L \neq 0$. (ορίζουσα $\neq 0$)
Τότε $\exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε
"Αν $x \in B(a;\delta)$ και $f(x) = f(a)$, τότε $x = a$"

Δηλαδή: Εάν $f(x) = f(a)$ και $\|x-a\| < \delta \Rightarrow x = a$

Απόδειξη:

Ορίζουμε $E(h) := f(a+h) - f(a) - L(h)$ (*)

Διαφορισιμότητα $\iff \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|E(h)\|}{\|h\|} = 0$ ⊛



Υπενθυμίζουμε ότι $\det L \neq 0 \Rightarrow L$ αντιστρέψιμος
δηλαδή ο L^{-1} υπάρχει.

- Οι γραμμικοί μετασχηματισμοί είναι συνεχείς (μόλις αποδείξαμε ότι είναι διαφορίσιμοι) και συνεπώς ο L^{-1} είναι συνεχής.

Με εις άτοπον απαγωγή:

(1) Έστω $f(x) = f(a)$, $\|x-a\| < \delta$ και $x \neq a$.
Από την (*) έχουμε

(2) $f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + E(h)$, $h = x-a$, $h \neq 0$

(1) $\overset{(2)}{\Longrightarrow} \cancel{f(a)} = \cancel{f(a)} + L(h) + E(h)$

(3) $L(h) = -E(h)$

$\Rightarrow L^{-1}(L(h)) = -L^{-1}(E(h))$

$\Rightarrow h = -L(E(h))$, $h \neq 0$

$\Rightarrow \|h\| = \|L(E(h))\|$

χρηση της γραμμικοτητος του L^{-1}

(4) $\xrightarrow{/\|h\|} 1 = \dfrac{\|L^{-1}(E(h))\|}{\|h\|} = \left\| \dfrac{L^{-1}(E(h))}{\|h\|} \right\| = \left\| L^{-1}\left(\dfrac{E(h)}{\|h\|}\right) \right\|$, $h \neq 0$

$x-a=h$, έχουμε υποθ ότι $x \neq a$

<u>Επιλογή του δ</u>

Ο L^{-1} είναι συνεχής και $L^{-1}(0)=0$

Κατα συνέπεια δοθέντος $\bar{\varepsilon}>0$, $\exists\ \varepsilon>0$ τέτοιο ώστε

$$\|x\| < \varepsilon \Rightarrow \|L^{-1}(x)\| < \bar{\varepsilon}$$

Ειδικα για $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}$ $\exists\ \varepsilon>0$ τέτοιο ώστε

(5) $\|x\| < \varepsilon \Rightarrow \|L^{-1}(x)\| < \frac{1}{2}$

Από την (*) έχουμε ότι δοθέντος ε $\exists\ \delta>0$ τέτοιο ώστε

(6) $\|h\| < \delta \Rightarrow \dfrac{\|E(h)\|}{\|h\|} < \varepsilon$

$\Rightarrow \left\| L^{-1}\left(\dfrac{E(h)}{\|h\|}\right) \right\| < \frac{1}{2}$ Άτοπο (λόγω 4)

Άρα $x=a$. □

39) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμος αν και μόνο αν κάθε μια απο τις συνιστώσες $h_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη, $h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$

Υπόδειξη:

$$(*) \quad \left[\frac{\| h(x) - h(x_0) - Dh(x_0)(x-x_0)\|}{\| x - x_0 \|}\right]^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{| h_i(x) - h_i(x_0) - \nabla h_i(x_0)(x-x_0)|^2}{\| x - x_0\|^2}$$

$$Dh(x_0)(x-x_0) = \begin{pmatrix} \nabla h_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla h_m(x_0) \end{pmatrix} (x-x_0) = \begin{pmatrix} \nabla h_1(x_0)\cdot(x-x_0) \\ \vdots \\ \nabla h_m(x_0)\cdot(x-x_0) \end{pmatrix}$$

$(*) \Rightarrow$ Διαφορισιμότητα h_i, $i=1,\dots,m$ $\Leftrightarrow$ Διαφορισιμότητα h

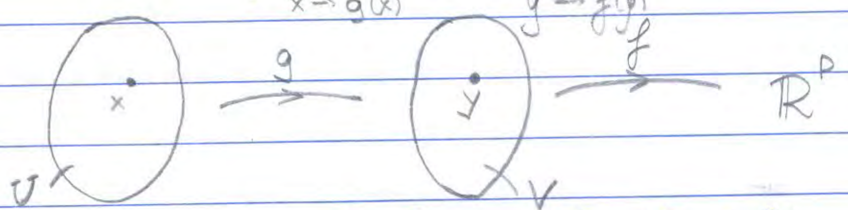
$\square$

Ο Κανόνας Της Αλυσίδας - Γενική Περίπτωση.

Θεώρημα: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτά σύνολα

Έστω $g: U \to V$, $f: V \to \mathbb{R}^p$

$x \to g(x)$ $\quad$ $y \to f(y)$



Θεωρούμε την $h = f \circ g$, $h: U \to \mathbb{R}^p$

Αν g διαφορίσιμη στο x_0, και f διαφορίσιμη στο $g(x_0)$ τότε η $h = f(g(x))$ είναι διαφορίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(*) \quad \underset{(p\times n)}{Dh}\Big|_{x=x_0} = \Big(\underset{(p\times m)}{Df}\Big|_{y_0=g(x_0)}\Big)\Big(\underset{m\times n}{Dg}\Big|_{x=x_0}\Big) \quad \text{(γινόμενο πινάκων)}$$

$\blacksquare$

$h: U \to \mathbb{R}^p$	$f: V \to \mathbb{R}^p$	$g: U \to \mathbb{R}^m$
Dh ($p \times n$ πίνακας)	Df $p \times m$ πίνακας)	Dg ($m \times n$ πίνακας)
	$Df = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_p \end{pmatrix}$	$Dg = \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \vdots \\ \nabla g_m \end{pmatrix}$
	όπου $\nabla f_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m}\right)$ $\vdots$ κλπ	όπου $\nabla g_1 = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)$ $\vdots$
	p-σειρές, m-στήλες	m-σειρές, n-στήλες

Ειδικη περιπτωση $(p=1, \ m=n=3)$

1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$g(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)) \in \mathbb{R}^3$$

$$f(u,v,w) \in \mathbb{R}$$

$$h(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)) \in \mathbb{R}$$

$$(1) \quad \underset{(1\times 3)}{Dh} = \underset{(1\times 3)}{(Df)}\ \underset{(3\times 3)}{(Dg)}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \nabla h = \nabla f \begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \\ \nabla w \end{pmatrix}$$

Θα αποδείξουμε την (1) απευθείας για να προετοιμαστεί ο αναγνώστης για την απόδειξη της ⊛

<u>Θα υποθέσουμε περαιτέρω ότι οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς.</u>

<u>Απόδειξη της (1):</u>

$\sigma(x) := (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ y, z σταθεροποιημένα

Έχουμε $x \to h(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)) = f(\sigma(x))$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας για καμπύλες παίρνουμε :

(2)
$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f(\sigma(x))}{\partial x}$$
$$= \nabla f(\sigma(x)) \cdot \sigma'(x)$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w}\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

Ομοίως

(3)
$$\frac{\partial h}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w}\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

(4)
$$\frac{\partial h}{\partial z} = \dots = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}$$

Βλέπουμε ότι (2), (3), (4) $\Rightarrow$ (1) ▨

Απόδειξη του γενικού κανόνα της αλυσίδας:

$$g(x_1, \dots, x_n) = \left(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)\right)$$

$$f(y_1, \dots, y_m) = \left(f_1(y_1, \dots, y_m), \dots, f_p(y_1, \dots, y_m)\right)$$

$$h_j(x_1, \dots, x_n) = f_j\left(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)\right) \quad j = 1, \dots, p$$

(Εφαρμόζοντας την ιδέα, όπως στο προηγούμενο Παράδειγμα $x_j \neq x_i$, "φιξαρισμένα" (2), (3), (4))

$$\boxed{\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}} \iff \underset{(p \times n)}{Dh} = \underset{(p \times m)}{(Df)} \underset{(m \times n)}{(Dg)}$$

Πράγματι

| Χρήσιμη μορφή |

$$Dh = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} - (p \times n)$$

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_m} \end{pmatrix} - (p \times m)$$

$$Dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} - (m \times n)$$

$\square$

Παραδείγματα :

1) $g(x,y) = (x^2+1, y^2)$, $f(u,v) = (u+v, u, v^2)$

Να υπολογιστεί το διαφορικό της σύνθεσης $f\circ g$ στο $(x,y)=(1,1)$

Λύση

$(f\circ g)(x,y) = f(g_1(x,y), g_2(x,y))$

$h = f\circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$g(1,1) = (2,1)$ $f(2,1) = (3,2,1)$

$$\underset{3\times 2}{Dh} = \underset{3\times 2}{(Df)}\underset{2\times 2}{(Dg)}$$

$$= \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \nabla f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

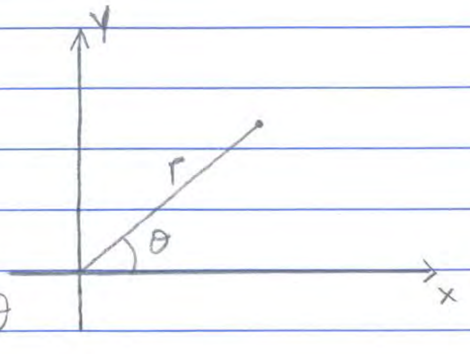
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 0 \\ 0 & 4vy \end{pmatrix} \underset{\substack{u=2 \\ v=1}}{\overset{\substack{x=1 \\ y=1}}{=\!=}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Πολικές Συντεταγμένες

$f(x,y)$ $\quad x = g_1(r,\theta) = r\cos\theta \quad y = g_2(r,\theta) = r\sin\theta$

$h(r,\theta) = f\circ g \quad g = (g_1, g_2)$

$h(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$



$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(r\cdot(-\sin\theta)\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(r\cdot\cos\theta\right)$$

3) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h(x) = \sin \|f(x)\|^2$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \cos\|f(x)\|^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(x)\cdot f(x)\right)$$

$$= \cos\|f(x)\|^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_1^2(x) + \dots + f_m^2(x)\right]$$

$$= \cos\|f(x)\|^2 \left(2 f_1(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + 2 f_m(x)\frac{\partial f_m}{\partial x_i}\right)$$

$$= 2\cos\|f(x)\|^2 f \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \blacksquare$$

4) <u>Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης I</u>

Η σχέση $G(x,y)=0$ ορίζει έμμεσα το y σαν συνάρτηση του x (και το x σαν συνάρτηση του y) κάτω από κάποιες προϋποθέσεις.

Έστω ότι $y = y(x)$

(1) $G(x,y(x)) = 0$ $\left(G \text{ διαφορίσιμη}, \frac{\partial G}{\partial y} \neq 0\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} G(x,y(x)) = 0 \iff \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

(2) $\Rightarrow \dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}$

<u>Σημ.</u>: Η παράγωγος της $y(x)$ υπολογίζεται χωρίς να έχει προηγηθεί ο υπολογισμός της $y(x)$.

Παραδείγματα:

5) $f(x,y) = \log(x^2+2y+1) + \int_0^x \cos(t^2)\,dt \quad , \; y > -1/2$

Βρείτε το $\nabla f(x,y)$

Λύση

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2+2y+1}(2x) + \cos(x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2+2y+1}(2)$$

6) Έστω $T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$

Βρείτε την κατεύθυνση της μέγιστης μείωσης της T στο σημείο $(1,1,1)$

Λύση

$$\frac{\partial T}{\partial x} = e^{-x^2-2y^2-3z^2}\frac{\partial}{\partial x}(-x^2-2y^2-3z^2) = (-2x)\,e^{-x^2-2y^2-3z^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = e^{-x^2-2y^2-3z^2}\frac{\partial}{\partial y}(-x^2-2y^2-3z^2) = (-4y)\,e^{-x^2-2y^2-3z^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = e^{-x^2-2y^2-3z^2}\frac{\partial}{\partial z}(-x^2-2y^2-3z^2) = (-6z)\,e^{-x^2-2y^2-3z^2}$$

$$-\nabla T(1,1,1) = -\left(-2e^{-6}, -4e^{-6}, -9e^{-6}\right) = e^{-6}(2,4,9)$$

Άρα $\dfrac{-\nabla T(1,1,1)}{\|\nabla T(1,1,1)\|}$ είναι η κατεύθυνση της μέγιστης μείωσης

7) Έστω $z = f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$, $f=f(\xi)$, C^1 συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Δείξτε ότι ισχύει $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

<u>Λύση</u>

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

$$=f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2}\right)=f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{-2y}{(x-y)^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

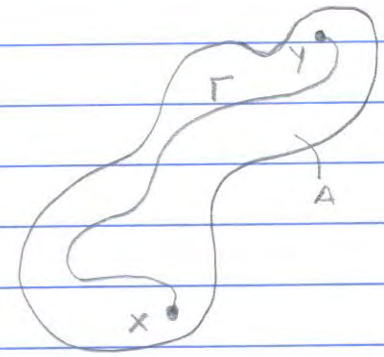
$$=f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{(x-y)+(x+y)(-1)}{(x-y)^2}\right)=f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\frac{2x}{(x-y)^2}$$

Άρα $x\frac{dz}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\left[-\frac{2xy}{(x-y)^2}+\frac{2xy}{(x+y)^2}\right]\cdot f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=0$ ▨

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f: A\to\mathbb{R}$, διαφορίσιμη συνάρτηση
A ανοιχτό, συνεκτικό σύνολο. Τότε
Αν $\nabla f(x)=0$, $x\in A$ $\Rightarrow$ $f(x)\equiv$ σταθερά

* <u>Ορισμός συνεκτικότητας</u>

A ανοιχτό, λέγεται συνεκτικό, αν
"$\forall x,y\in A$ $\exists$ καμπύλη, διαφορίσιμη
$\Gamma=\{\xi(t) \mid t\in[\alpha,\beta]\}$
$\xi(\alpha)=x$, $\xi(\beta)=y$, $\xi(t)\in A$ $\forall t\in(\alpha,\beta)$"



Απόδειξη του θεωρήματος

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x)=f(y)$, x,y αυθαίρετα στο A.

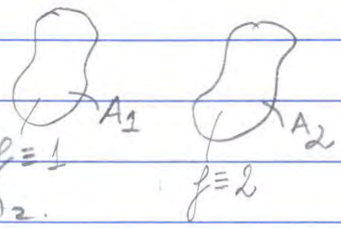
Θεωρούμε την $h(t)=f(\gamma(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$.

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)=0 \quad \forall t\in[\alpha,\beta]$$

Δηλαδή $h(t)\equiv$ σταθερή $\Rightarrow h(\alpha)=h(\beta)\Leftrightarrow f(x)=f(y)$ $\boxed{\checkmark}$

Σχόλιο: Η συνεκτικότητα του A είναι αναγκαία.

Αντιπαράδειγμα:



$A=A_1\cup A_2$

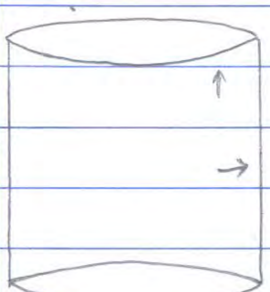
$\nabla f(x)=0$ στο $A_1\cup A_2$.

Παρα ταυτα $f\not\equiv$ σταθερα. ▨

Παράδειγμα: Ένας ορθός κύλινδρος μεταβάλλεται έτσι ώστε η ακτίνα r της μέσης αυξάνεται με ρυθμό $3cm/min$ και το ύψος h μειώνεται με ρυθμό $5cm/min$.
Με τι ρυθμό μεταβάλλεται ο όγκος (V) την χρονική στιγμή t^* όπου $r=10cm$, $h=8cm$

Λύση:

$r=r(t)$, $h=h(t)$, $V=V(r,h)\Rightarrow V(t)=V(r(t),h(t))$



$V=\pi r^2 h$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial t}$$
$$=2\pi r h\frac{\partial r}{\partial t}+\pi r^2\frac{\partial h}{\partial t}$$

Απο υποθ $\frac{\partial r}{\partial t}=3$, $\frac{\partial h}{\partial t}=-5$, $r=10$, $h=8$

Αρα $\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=t^*}=-20\pi$

44) Έστω $C = (c_{ij})$ συμμετρικός $n \times n$ πίνακας, $c_{ij} = c_{ji}$, $i,j = 1, \dots, n$
θετικά ορισμένος $xCx > 0 \quad \forall x \neq 0$
Έστω $f(x) = [Q(x)]^{p/2}$ όπου $Q(x) = x \cdot Cx$
Υπολογίστε την $\nabla f(x)$ και επαληθεύσατε ότι ισχύει
ο τύπος του Euler $\nabla f(x) \cdot x = p\, f(x)$

Λύση

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{p}{2}\left[Q(x)\right]^{p/2-1} \cdot \frac{\partial Q(x)}{\partial x_k} \qquad \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}\right)$$

Έχουμε $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$ διότι $xCx = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial x_k} \overset{\circledast}{=} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \frac{\partial (x_i x_j)}{\partial x_k} = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \left(x_i \delta_{jk} + \delta_{ik} x_j\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i \delta_{jk} + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \delta_{ik} x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_{ik} x_i + \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j$$

$$\overset{\text{συμμετρία}}{=} \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i + \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j = 2 \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j$$

Άρα $\nabla Q(x) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial x_n}\right) = 2Cx$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \frac{p}{2}\left[Q(x)\right]^{p/2-1} \cdot \nabla Q(x)$$

$$= \frac{p}{\cancel{2}}\left[xCx\right]^{p/2-1} \cdot \cancel{2}Cx$$

Πρόχειρο $\circledast$

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial x_k} = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \frac{\partial x_i x_j}{x_k}$$

όπου

$$\frac{\partial x_i x_j}{\partial x_k} = x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = x_i \delta_{jk} + \delta_{ik} x_j$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Άρα $\nabla f(x) \cdot x = p\left[x \cdot Cx\right]^{p/2}$
$= p\, f(x)$.

Παρατήρηση: $f(tx) = [Q(tx)]^{p/2}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(tx) &= [Q(tx)]^{p/2} \\ &= [tx \cdot Ctx]^{p/2} \\ &= [t^2 \cdot Q(x)]^{p/2} = t^p [Q(x)]^{p/2} = t^p f(x) \end{aligned}$$

$\square$

43) Εάν $y(x)$ ορίζεται μέσω της διαφόρισης $G(x,y(x))=0$ γνωρίζουμε ότι $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial y}$ (παράδειγμα 4)

Έστω ότι $y_1(x)$, $y_2(x)$ ορίζονται μέσω των εξισώσεων

$$G_1(x,y_1,y_2) = 0 \quad (1), \qquad G_2(x,y_1,y_2) = 0 \quad (2)$$

Βρείτε ανάλογους τύπους για $y_1'(x)$ και $y_2'(x)$.

Λύση

Παραγωγίζουμε ως προς x τις σχέσεις (1) και (2)

Για την (1) έχουμε κάνοντας χρήση τον κανόνα της αλυσίδας

$$0 = \frac{\partial G_1(x,y_1(x),y_2(x))}{\partial x} = \frac{\partial G_1}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial G_1}{\partial y_1}\cdot y_1' + \frac{\partial G_1}{\partial y_2}\cdot y_2'$$

Για την (2) έχουμε αντίστοιχα

$$0 = \frac{\partial G_2(x,y_1(x),y_2(x))}{\partial x} = \frac{\partial G_2}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial G_2}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial G_2}{\partial y_2} y_2'$$

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$x \to \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \to G_1(x,y_1,y_2)$$

$$\varphi'(x) = \nabla G_1(x,y_1,y_2)\begin{pmatrix} 1 \\ y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$$

Οπότε έχουμε το σύστημα με αγνώστους y_1' και y_2'

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial G_1}{\partial y_2} y_2' &= -\frac{\partial G_1}{\partial x} \\ \frac{\partial G_2}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial G_2}{\partial y_2} y_2' &= -\frac{\partial G_2}{\partial x} \end{aligned}\right\} \text{Cramer}$$

$$y_1' = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y_2} \\ -\frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \frac{\partial G_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial G_2}{\partial y_1} & \frac{\partial G_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}} \quad \text{και} \quad y_2' = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & -\frac{\partial G_1}{\partial x} \\ \frac{\partial G_2}{\partial y_1} & -\frac{\partial G_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \frac{\partial G_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial G_2}{\partial y_1} & \frac{\partial G_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}$$

$\square$

45) Στη θερμοδυναμική οι ποσότητες x = θερμοκρασία y = πίεση και z = όγκος ικανοποιούν μια σχέση της μορφής $F(x,y,z)=0$ όπου F διαφορίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -1 \quad (*)$$

Λύση

Η σχέση $F(x,y,z)=0$ ορίζει κάθε μεταβλητή x,y,z συναρτήσει των άλλων δύο, δηλαδή έχουμε $x=f(y,z)$, $y=g(x,z)$, $z=h(x,y)$

(1) $\quad F(f(y,z),y,z)=0$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot 1 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}}} \quad (i)$$

Ομοίως ισχύει

(2) $\quad F(x,y,h(x,y))=0$ και $F(x,g(x,z),z)=0$ (3)

Δηλαδή $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,h(x,y)) = 0 = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial y}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}} \quad (ii)$$

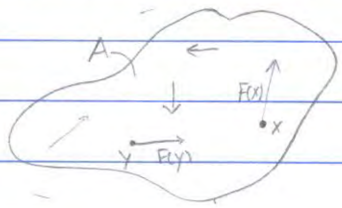
και $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$ όπου $\boxed{\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}}$ (iii)

Συμπέρασμα: $\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial h}{\partial y} = -1$

Παρατήρηση: Δεν ισχύει η "απλοποίηση" $\frac{\cancel{\partial y}}{\cancel{\partial x}}\frac{\cancel{\partial z}}{\cancel{\partial y}}\frac{\cancel{\partial x}}{\cancel{\partial z}} = 1$! □

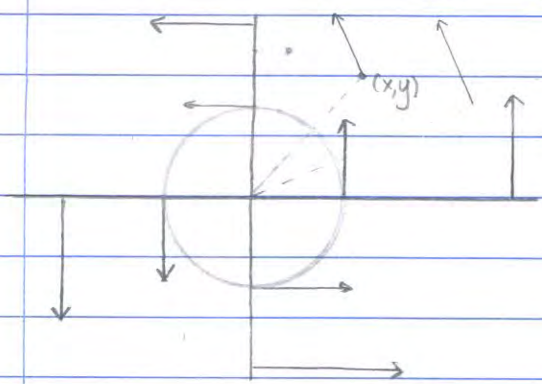
Διανυσματικά Πεδία

Ορισμός: $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(m=n)$ λέγεται διανυσματικό πεδίο. Σε κάθε x αντιστοιχούμε το διάνυσμα $F(x)$.



Παραδείγματα:

1) $V(x,y) = (-y,x) = -y\vec{i} + x\vec{j}$

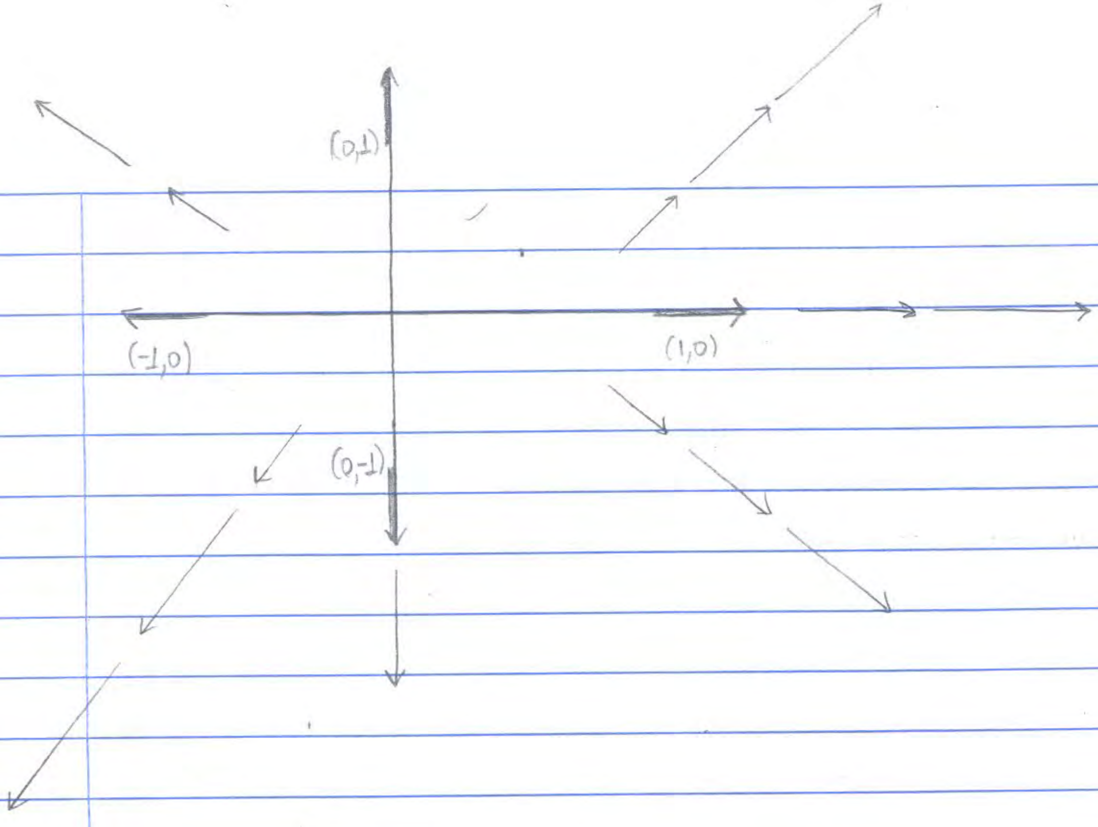


(στροφή)

2) Διανυσματικά Πεδία Κλίσης.

$V(x,y) = \nabla F(x,y)$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, διαφορίσιμη συνάρτηση.

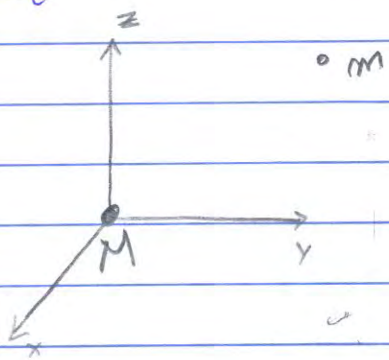
π.χ. $F(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \Rightarrow V(x,y) = (x,y)$



3) Νόμος του Newton

$$F = -\frac{mMG}{\|r\|^3} r$$

$r = (x,y,z)$

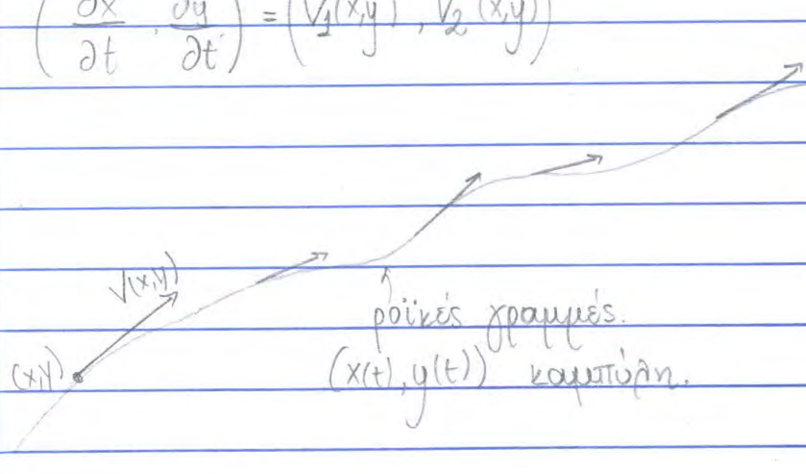


4) Ροή

Δοθέντος διανυσματικού πεδίου V στο $\mathbb{R}^2$ βρείτε τις καμπύλες που εφάπτονται στο $V(x,y)$ σε κάθε (x,y) (ροϊκές γραμμές)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}\right) = \left(V_1(x,y), V_2(x,y)\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V_1(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = V_2(x,y) \end{cases}$$



ροϊκές γραμμές.

$(x(t), y(t))$ καμπύλη.

Παραδείγματα

1) $V(x,y) = (x,y)$

α) $\frac{dx}{dt} = x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \Rightarrow x(t) = x(c)e^t$

β) $\frac{dy}{dt} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \Rightarrow y(t) = y(c)e^t$

Απαλοιφή του t : $\frac{x}{y} = \frac{x(c)}{y(c)} \Rightarrow \boxed{y = cx}$

Άρα οι ροϊκές γραμμές είναι ευθείες

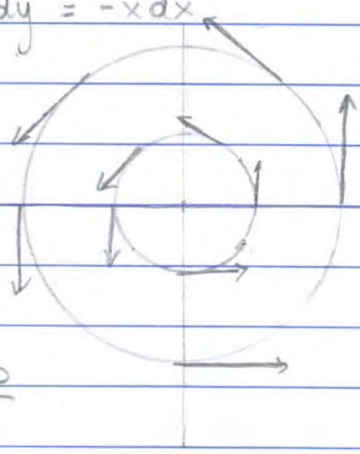
2) $V(x,y) = (-y,x)$

$$\left.\begin{aligned} &\text{α) } \frac{dx}{dt} = -y \\ &\text{β) } \frac{dy}{dt} = x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = -x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = c'}$$



Οι ροϊκές γραμμές είναι περιφέρειες

Απόκλιση Και Στροβιλισμός.

Έστω $f(x,y,z)$ διαφορίσιμη συνάρτηση ορισμένη σε ανοιχτό $A \subset \mathbb{R}^3$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \vec{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial f}{\partial z}$$

Αντίστοιχα και για $f(x,y)$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y}$$

<u>Ορισμός</u> : (Απόκλιση)
Έστω $F(x_1,\dots,x_n)$ διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^n$

$F = (F_1,\dots,F_n)$, $F_i(x_1,\dots,x_n)$

$$\operatorname{div} F(x) := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

<u>Σημείωση</u>: Το F είναι διανυσματικό
Το $\operatorname{div} \vec{F}$ είναι βαθμωτό.

<u>Π.χ</u> $F = x^2y\vec{i} + z\vec{j} + xyz\vec{k}$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial (x^2y)}{\partial x} + \frac{\partial (z)}{\partial y} + \frac{\partial (xyz)}{\partial z}$$

$$= 2xy + 0 + xy = 3xy$$

□

<u>Συμβολισμός</u>: $\operatorname{div} F(x) = \nabla \cdot F$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Άρα $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

Μερικές Παράγωγοι Υψηλότερης Τάξης

Έστω $f(x,y,z) \in C^2$, δηλαδή έχει μερικές παραγώγους $1^{ης}$ τάξης,

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$$

οι οποίες ως συναρτήσεις, έχουν και αυτές μερικές παραγώγους $1^{ης}$ τάξης, οι οποίες είναι συνεχείς

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

κ.λ.π

Παράδειγμα: Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης της $f(x,y) = xy + (x+2y)^2$

Λύση

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2(x+2y)\underbrace{(x+2y)'}_{1} = y + 2x + 4y = 2x + 5y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2(x+2y)(x+2y)' = x + 4(x+2y) = 5x + 8y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 5 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 5$$

Παράδειγμα: Βρείτε τις παραγώγους $2^{ης}$ τάξης της $f(x,y) = \sin x \sin^2 y$

Λύση

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \sin^2 y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x \sin^2 y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\sin y \cos y \sin x = \sin x \sin(2y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\sin x \cos(2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos x \, 2\sin y \cos y = \cos x \sin 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \sin(2y) \cos x$$

Παράδειγμα: Βρείτε τις παραγώγους $2^{ης}$ τάξης της $f(x,y,z) = e^{xy} + z\cos x$.

Λύση

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy} - z\sin x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \cos x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} - z\cos x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + yx e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\sin x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = xy e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -\sin x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

Θεώρημα: (Clairaut)

Έστω $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, A ανοιχτό.
Τότε ισχύει:

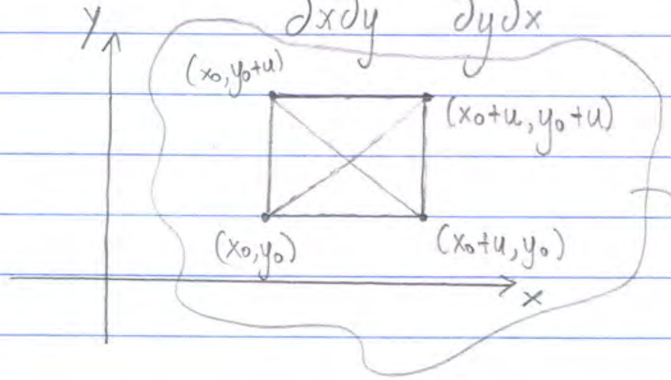
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i,j = 1, \dots, n$$

(C^2: οι παράγωγοι $2^{ης}$ τάξης υπάρχουν και είναι συνεχείς στο A)

Απόδειξη: ($n=2$)

Θα δείξουμε ότι εάν $f(x,y)$, $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τότε ισχύει

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \forall (x,y) \in A$$



Βήμα 1ο

$2^{ον}$ πηλίκο διαφορών.

(1) $A(u) := \frac{1}{u^2}\left[f(x_0,y_0) + f(x_0+u, y_0+u) - \left(f(x_0, y_0+u) + f(x_0+u, y_0) \right) \right]$
(Διαγώνιοι όροι)

$|u|$ μικρό ώστε να βρίσκεται εντός του A.

Ορίζουμε,

(2) $g(x) := f(x, y_0+u) - f(x, y_0)$, C^1 ως προς x, (οριζόντιες πλευρές)

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0+u) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$$

(3) Άρα έχουμε, $A(u) = \frac{1}{u^2}\left[g(x_0+u) - g(x_0) \right]$

$$= \frac{1}{u^2} g'(\xi) \cdot u \quad , (\text{ΘΜΤ}) \quad \xi \in (x_0, x_0+u)$$

$$= \frac{1}{u}\left[f_x(\xi, y_0+u) - f_x(\xi, y_0)\right] \quad , \text{ όπου } \left(f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Ορίζουμε $y \to h(y) := \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)$, C^1 ως προς y.

Άρα $h'(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi, y) = f_{xy}(\xi, y)$

Κατα συνέπεια έχουμε από την (3)

(4) $$A(u) = \frac{1}{u}\left[h(y_0+u) - h(y_0)\right]$$

$$= \frac{1}{u} h'(\eta) \cdot u \quad (\text{ΘΜΤ}) \quad , \eta \in (y_0, y_0+u)$$

$$= f_{xy}(\xi, \eta)$$

<u>Βήμα 2.</u>

Αντιστρέφουμε τους ρόλους των x και y ως εξής:
Αντί της $g(x)$ που ορίσαμε, ορίζουμε την

$$\hat{g}(y) = f(x_0+u, y) - f(x_0, y) \quad (\text{κάθετες πλευρές})$$

Έχουμε

(5) $$A(u) = \frac{1}{u^2}\left[\hat{g}(y_0+u) - \hat{g}(y_0)\right]$$

Τελείως ανάλογα εξάγουμε από την (5) την αντίστοιχη της (4)

(6) $$A(u) = f_{yx}(\xi^*, \eta^*)$$

(7) Έχουμε λοιπόν ότι $f_{xy}(\xi, \eta) = f_{yx}(\xi^*, \eta^*)$

Παίρνουμε το όριο καθώς $u \to 0$ και κάνουμε χρήση της συνέχειας των 2ων παραγώγων στο (x_0,y_0):

(8) $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$

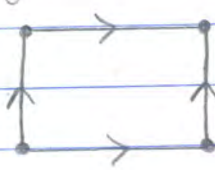
$\square$

Σχόλιο 1 (Εξήγηση της Απόδειξης)
Θεωρούμε δύο διαφορετικές ομαδοποιήσεις του $A(u)$ που αντιστοιχούν στους δύο δρόμους στο σχήμα

$$\frac{1}{u^2}\Big[f(x_0,y_0) + f(x_0+u, y_0+u) - \big(f(x_0,y_0+u) + f(x_0+u,y_0)\big)\Big]$$

$1^η$: $$\frac{1}{u^2}\Big[\big(f(x_0,y_0) - f(x_0,y_0+u)\big) + \big(f(x_0+u,y_0+u) - f(x_0+u,y_0)\big)\Big]$$

$2^η$: $$\frac{1}{u^2}\Big[f(x_0,y_0) - f(x_0+u,y_0) + \big(f(x_0+u,y_0+u) - f(x_0,y_0+u)\big)\Big]$$



$1^η$: $$\frac{1}{u^2}\Big[\big(-f_y(x_0,y^*)u + f_y(x_0+u,y^{**})u\Big] \to f_{yx}$$

$2^η$: $$\frac{1}{u^2}\Big[\big(-f_x(x^*,y_0)u + f_x(x^{**},y_0+u)u\Big] \to f_{xy}.$$

Σχόλιο 2 (Πηλίκο Διαφορών – 1 διάσταση)
Έστω $f \in C^3$, $f(x)$, $x \in (\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$. Τότε ισχύει

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} = f''(x).$$

Υπόδειξη (Taylor)

$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x)(\Delta x)^2 + O(\Delta x)^3$

$f(x) = f(x-\Delta x) + f'(x-\Delta x)(\Delta x) + \frac{1}{2} f''(x-\Delta x)(\Delta x)^2 + O(\Delta x)^3$

Ορισμός (Στροβιλισμός)

Έστω F διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^3$.

$$F(x_1,x_2,x_3) = (F_1(x_1,x_2,x_3), F_2(x_1,x_2,x_3), F_3(x_1,x_2,x_3))$$
$$= \vec{i}\,F_1 + \vec{j}\,F_2 + \vec{k}\,F_3$$

$$\operatorname{curl} F := \nabla \times F$$
$$:= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_2 & F_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

Σημείωση: Η απόκλιση είναι βαθμωτό μέγεθος (αριθμός)
Ο στροβιλισμός είναι διανυσματικό μέγεθος.

Παράδειγμα: $F(x,y,z) = (x, xy, 1)$

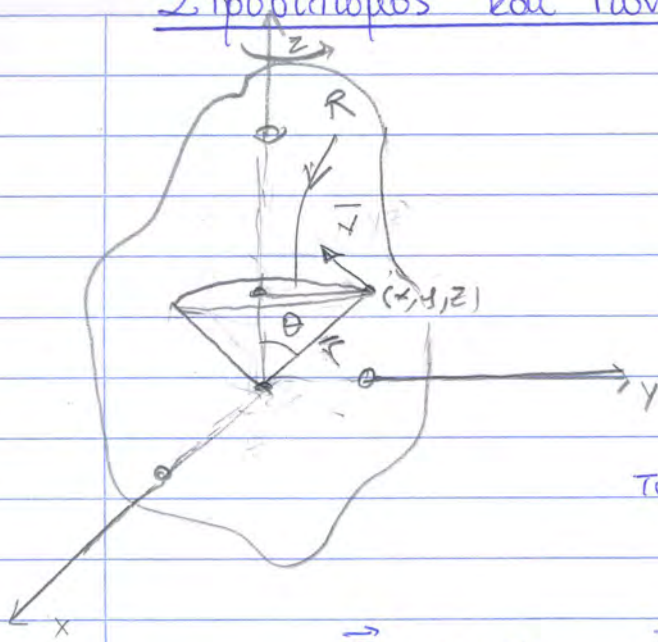
$$\operatorname{curl} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x & xy \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(\cancel{\frac{\partial 1}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial xy}{\partial z}}\right) - \vec{j}\left(\cancel{\frac{\partial 1}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial x}{\partial z}}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial xy}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial x}{\partial y}}\right)$$

$$= \vec{k}\cdot y = (0,0,y)$$

$\square$

Στροβιλισμός και Γωνιακή Ταχύτητα



$\underline{\Omega}$ = διάνυσμα γωνιακής ταχύτητας $= \omega(0,0,1) = \omega\vec{k}$

θ = γωνία επιβατικής ακτίνος $\vec{r}$ με τον z-άξονα.

$\vec{v} = \underline{\Omega} \times \vec{r}$, $|\vec{v}| = |\underline{\Omega}||\vec{r}|\sin\theta = |\Omega| R$

ταχύτητα

$$\vec{r} = (x,y,z) \quad , \quad \underline{\Omega} = \omega(0,0,1)$$

$$\underline{\Omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & \omega \\ y & z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & \omega \\ x & z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix}$$

$$= -\vec{i}\,\omega y - \vec{j}\,x\omega = (-\omega y, -x\omega, 0)$$

$$\operatorname{curl}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & -x\omega & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\vec{k} = 2\underline{\Omega}$$

Ορισμός (Αστρόβιλο Πεδίο)

$$V(x,y,z) = (V_1(x,y,z), V_2(x,y,z), V_3(x,y,z))$$

λέγεται αστρόβιλο διανυσματικό πεδίο, εάν

$$\operatorname{curl} V = 0 \quad , \quad \forall (x,y,z) \in A$$

Θεώρημα: $Curl(\nabla f) = 0 \quad , f \in C^2$

Απόδειξη:

$$Curl(\nabla f) = \nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) - \vec{j}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$$

$$\overset{\text{από θεώρημα}}{\underset{\text{Clairaut}}{=}} 0$$

$\square$

Παράδειγμα: Επαληθεύσατε ότι το Δ.Π

$$V(x,y,z) = \frac{y\vec{i} - x\vec{j}}{x^2+y^2}$$

είναι αστρόβιλο για $(x,y) \neq (0,0)$

Λύση

$$curl V = \nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{-x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{-x}{x^2+y^2} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\cdot 0 - \vec{j}\cdot 0 + \vec{k}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$$

$$= -\frac{(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(x^2+y^2) - y(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2+y^2) + 2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$\square$

<u>Παράδειγμα</u>: Δείξτε ότι το Δ.Π $V(x,y,z) = y\vec{i} - x\vec{j}$ δεν είναι Δ.Π κλίσης, δηλαδή δεν είναι της μορφής $\vec{V} = \nabla f$.

<u>Λύση</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι το $\vec{v}$ δεν είναι αστρόβιλο.

$$\nabla\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{k} \neq \vec{0}$$

$\square$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $\vec{F} \in C^2$ διανυσματικό πεδίο. Τότε:

$$\operatorname{div}\operatorname{curl}\vec{F} \;(= \nabla\cdot(\nabla\times F)) = 0$$

Δηλαδή, η απόκλιση του στροβιλισμού είναι ίση με το 0.

<u>Απόδειξη</u>:

$$\operatorname{div}\operatorname{curl}\vec{F} = \nabla\cdot(\nabla\times F) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial z \partial y}$$

$$\overset{\text{Clairaut}}{=} 0$$

□

<u>Παράδειγμα</u>: Δείξτε ότι το Δ.Π $\vec{V}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ δεν παράγεται μέσω του στροβιλισμού κάποιου Δ.Π.

<u>Λύση</u>

Εάν το $\vec{V} = \text{curl}\vec{F}$ τότε $\text{div}\vec{V} = 0$

Έχουμε όμως:

$$\text{div}\vec{V} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \neq 0$$

□

<u>Ορισμός</u> (Τελεστής Laplace)

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^2 συνάρτηση.

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

$\Delta \to$ Λαπλασιανός Τελεστής ή Λαπλασιανή

<u>$n=3$</u> $f(x,y,z)$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

<u>Η εξίσωση του Laplace</u>

$\Delta u = 0$ (L), $u = u(x)$, $x \in A$, $u \in C^2$, $u : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Οι λύσεις της (L) καλούνται Αρμονικές Συναρτήσεις.

Παράδειγμα: (Άσκηση 51)

Δείξτε ότι το Νευτώνιο Δυναμικό

$$V(x,y,z) = -\frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Λύση

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -GmM\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right)' = -GmM\left(\frac{0\cdot(x^2+y^2+z^2)^{1/2} - \frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\cdot\cancel{2}x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2\cdot 2}}\right)$$

$$= -GmM\left(\frac{-x(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}}{(x^2+y^2+z^2)}\right) = -GmM\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -GmM\left(\frac{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - (-x)\frac{3}{\cancel{2}}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\,\cancel{2}x}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right)$$

$$= -GmM\,\cancel{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\left(\frac{-(x^2+y^2+z^2)+3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3\ 3-1/2}}\right)$$

$$= -GmM\left(\frac{-(x^2+y^2+z^2)+3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right)$$

Όμοια βρίσκουμε $\displaystyle\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -GmM\left(\frac{-(x^2+y^2+z^2)+3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right)$

και $\displaystyle\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -GmM\left(\frac{-(x^2+y^2+z^2)+3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right)$

Για να ικανοποιείται η εξίσωση του Laplace πρέπει

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Έχουμε $\displaystyle -GmM\left(\frac{-(x^2+y^2+z^2)+3x^2-(x^2+y^2+z^2)+3y^2-(x^2+y^2+z^2)+3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right)$

$$= \frac{-3(x^2+y^2+z^2)+3x^2+3y^2+3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0 \qquad \square$$

54) Δείξτε ότι $\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$. , $f(x,y,z) : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$

Λύση

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\operatorname{div}V(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

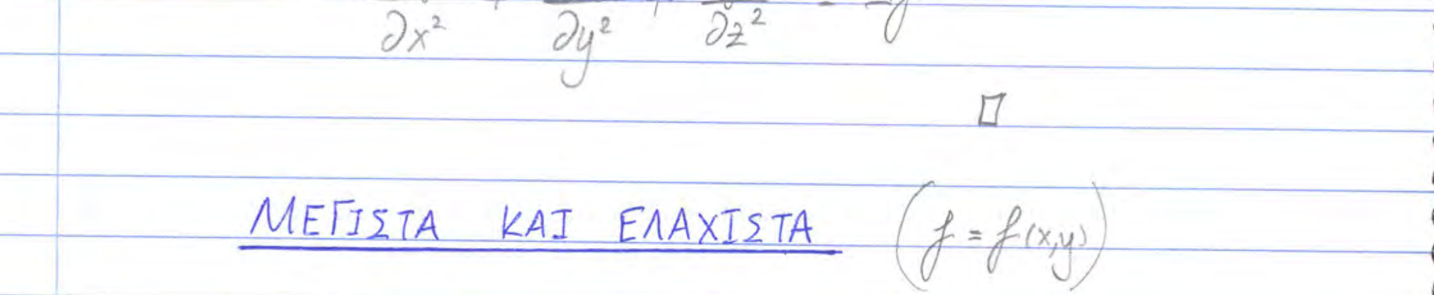
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$$

$\square$

ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ $(f = f(x,y))$

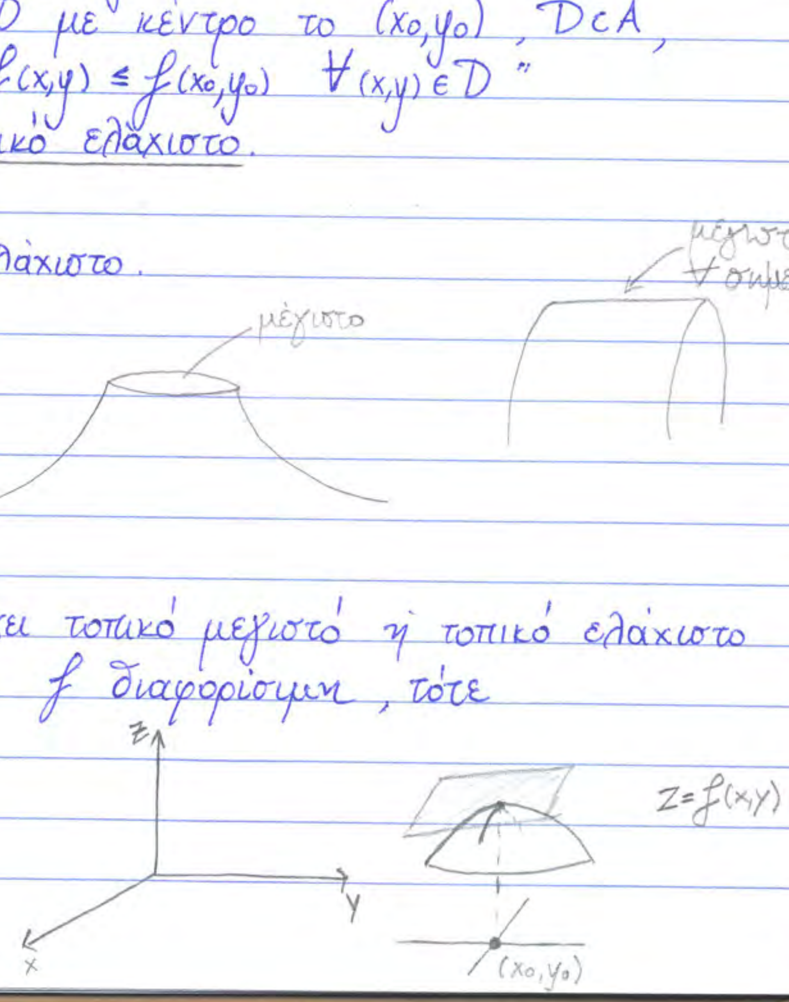
$\boxed{A}$ Ορισμός: Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, διαφορίσιμη, έχει τοπικό μέγιστο στο $(x_0,y_0) \in A$
εάν "υπάρχει δίσκος D με κέντρο το (x_0,y_0) , $D \subset A$,
τέτοιος ώστε : $f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \quad \forall (x,y) \in D$ "
Ανάλογα ορίζεται το τοπικό ελάχιστο.

Ακρότατο := μέγιστο ή ελάχιστο.



ΛΗΜΜΑ : Εάν η f έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο $(x_0,y_0) \in A$, και η f διαφορίσιμη , τότε

$$\nabla f(x_0,y_0) = 0$$



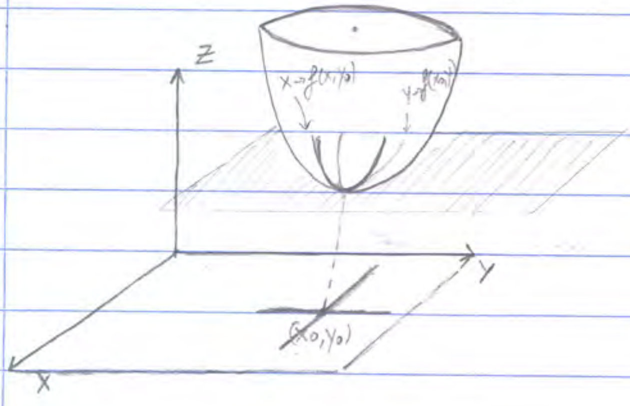
Απόδειξη:

Εάν $f(x,y)$ έχει τοπικό μέγιστο στο (x_0,y_0) τότε η συνάρτηση $x \to f(x,y_0)$ έχει τοπικό μέγιστο στο $x=x_0$.

Κατα συνέπεια $f_x(x_0,y_0)=0$

Ομοίως και για την $y \to f(x_0,y)$ οπότε $f_y(x_0,y_0)=0$

□



Σημείωση: (Εφαπτόμενο Επίπεδο)

Εάν $f(x,y)$ έχει τοπικό ακρότατο στο (x_0,y_0), τότε το εφαπτόμενο επίπεδο έχει την εξίσωση:

$$z = z_0 = f(x_0,y_0)$$

δηλαδή παράλληλο στο x-y επίπεδο.

Απόδειξη:

Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Απο το προηγούμενο ΛΗΜΜΑ $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$ οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

□

$\boxed{B}$ Παράγωγοι Υψηλότερης Τάξης

Συμβολισμός:

$f \in C^1$ σημαίνει f, f_x, f_y συνεχείς

$f \in C^2$ σημαίνει $f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$ συνεχείς

Γνωρίζουμε ότι $f \in C^2 \xRightarrow{\text{Clairaut}} f_{xy} = f_{yx}$

Συμπέρασμα: $f \in C^2$ έχει 3 το πολύ διαφορετικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης.

$f \in C^n$ σημαίνει ότι όλες οι παράγωγοι μέχρι και n-τάξης είναι συνεχείς.

Σημείωση: Εάν f_x, f_y συνεχείς $\Rightarrow$

f διαφορίσιμη $\Rightarrow$

f συνεχής.

Παρόμοια f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} συνεχείς $\Rightarrow$

f_x, f_y συνεχείς $\Rightarrow$

f συνεχής.

Κατα συνέπεια η κλάση C^n θα μπορούσε να οριστεί αποκλειστικά μέσω των παραγώγων n-τάξης που απαιτούμε να είναι συνεχείς.

$$C^n \subset C^{n-1} \subset C^{n-2} \subset \ldots \subset C^0$$

όπου C^0 = συνεχείς συναρτήσεις.

Από το θεώρημα Clairaut προκύπτει ότι εάν $f \in C^n$ η σειρά της διαφόρισης δεν παίζει ρόλο.

$$\frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^l}, \quad k+l=n$$

είναι όλες οι παράγωγοι n-τάξης, $k=0,1,\ldots,n$ άρα $n+1$

Π.χ. Υπάρχουν 4 παράγωγοι $3^{ης}$ τάξης.

$$f_{xxx},\ f_{xxy},\ f_{xyy},\ f_{yyy}$$

Παράδειγμα: $f(x,y) = xe^y$

$f_x = e^y$, $f_y = xe^y$, $f_{xy} = e^y$, $f_{xxy} = 0$

$f_{xx} = 0$, $f_{yy} = xe^y$, $f_{xyy} = e^y$,

$f_{xxx} = 0$, $f_{yyy} = xe^y$, .

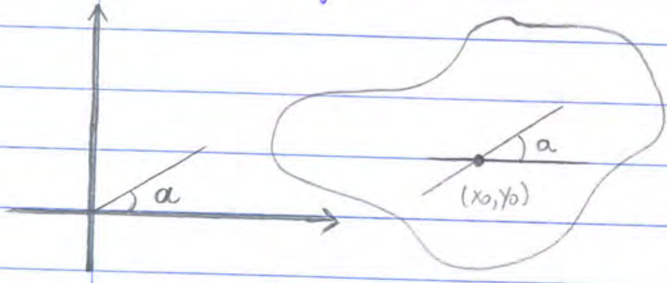
$\vdots \qquad \vdots$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = 0, \quad \frac{\partial^n f}{\partial y^n} = xe^y,$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^n f}{\partial x^2 \partial y^{n-2}} = 0, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x\, \partial y^{n-1}} = e^y$$

□

$\boxed{\Gamma}$ Έστω $f \in C^2$ στο $A \subset \mathbb{R}^2$, και έστω $(x_0,y_0) \in A$

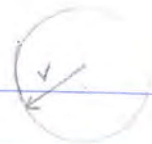


$$C: \begin{cases} x = x_0 + t\cos a \\ y = y_0 + t\sin a \end{cases} \quad |t|<\delta,\ a \in [0,2\pi)$$

$$f_C(t) := f(x_0 + t\cos a,\ y_0 + t\sin a)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} f_C(t) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot (\cos a, \sin a)$$

κατευθυνόμενη παράγωγος, $D_v f(x_0,y_0)$

$v = (\cos a, \sin a)$  $\|\vec{v}\| = 1$

Εισάγουμε το συμβολισμό : $D_a f(x_0,y_0) = f_c'(0)$

(1) Έχουμε
$$f_c'(t) = f_x(x_0 + t\cos a, y_0 + t\sin a)\cos a + f_y(x_0 + t\cos a, y_0 + t\sin a)\sin a$$

Διαφορίζουμε ξανά:

(2)
$$f_c''(t) = f_{xx}(x_0 + t\cos a, y_0 + t\sin a)\cos^2 a + f_{yx}(x_0 + t\cos a, y_0 + t\sin a) \cdot \cos a \sin a + f_{xy}(\ )\cos a \sin a + f_{yy}(\ )\sin^2 a$$
$$= f_{xx}\cos^2 a + 2 f_{xy}\sin a \cos a + f_{yy}\sin^2 a$$

Για $t=0$

$$f''(0) = f_{xx}(x_0,y_0)\cos^2 a + 2 f_{xy}(x_0,y_0)\sin a \cos a + f_{yy}(x_0,y_0)\sin^2 a.$$

Έστω $a = f_{xx}(x_0,y_0)$, $b = f_{xy}(x_0,y_0)$, $c = f_{yy}(x_0,y_0)$

(3) $D_a^2 f(x_0,y_0) = f_c''(0) = a v_1^2 + 2 b v_1 v_2 + c v_2^2$ $\quad \vec{V} = (v_1, v_2)$

όπου $v_1 = \cos a$ και $v_2 = \sin a$

Έχουμε την τετραγωνική μορφή

(4)
$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

όπου $\langle v, w \rangle = v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2$, Ευκλείδειο.

Θεώρημα (Σάγμα)

Έστω (x_0,y_0) κρίσιμο σημείο της $f\in C^2$, δηλαδή

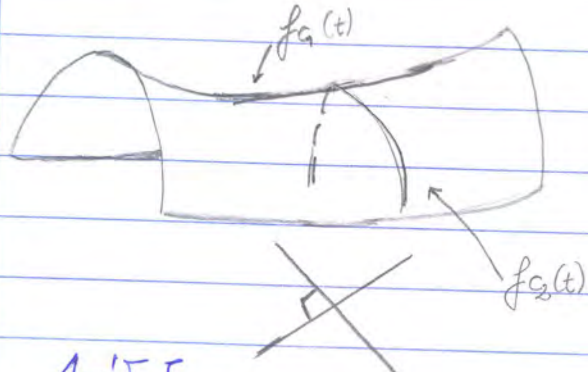
$$\nabla f(x_0,y_0)=0 \quad , (x_0,y_0)\in A$$

Έστω ότι

$$f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0)<0$$

Τότε η $f(x,y)$ δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο, αλλά ούτε τοπικό ελάχιστο.

Σημείωση: Δεν υπάρχει αντίστοιχο θεώρημα 1-μεταβλητής.



σάγμα

Απόδειξη:

$$(4) \iff ac-b^2<0 \iff \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}<0.$$

Γνωρίζουμε ότι η ορίζουσα ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του πίνακα.

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix} = \lambda_1\lambda_2<0$$

Έστω $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$ και έστω $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2\end{pmatrix}$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_i \\ y_i\end{pmatrix} \quad , x_i^2+y_i^2=1 \quad i=1,2$$

Έχουμε $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a_1 \\ \sin a_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a_2 \\ \sin a_2 \end{pmatrix}$

με c_1, c_2 τα αντοίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα:

$f'_{c_1}(0) = 0$ από (1)

$$f''_{c_1}(0) = a x_1^2 + 2b x_1 y_1 + c y_1^2 =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda_1 > 0$$

και παρόμοια

$$f''_{c_2}(0) = \lambda_2 < 0$$

Εάν η $f(x,y)$ έχει τοπικό ελάχιστο τότε θα πρέπει η $t \to f_{c_1}(t)$, στο $t=0$ να έχει τοπικό ελάχιστο $\forall$ κατεύθυνση a.
Προφανώς αυτό δεν ισχύει για την $f_{c_2}(t)$.
Ανάλογα δείχνουμε ότι η f δεν έχει τοπικό μέγιστο στο (x_0, y_0) μέσω της $f_{c_1}(t)$.

<u>Σημείωση:</u> Η συμμετρία του πίνακα της τετραγωνικής μορφής προκύπτει από την $f_{xy} = f_{yx}$.
Υπενθυμίζουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1 \neq \lambda_2$, είναι κάθετα μεταξύ τους.

<u>Υπενθύμιση:</u> Έστω A συμμετρικός, v, w ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Τότε $\langle v, w\rangle = 0$

<u>Απόδειξη:</u> ① $Av = \lambda_1 v$

② $Aw = \lambda_2 w$

$$\left.\begin{array}{l} ① \Rightarrow \langle Av, w\rangle = \lambda_1 \langle v, w\rangle \\ ② \Rightarrow \langle Aw, v\rangle = \lambda_2 \langle w, v\rangle \end{array}\right\} ③$$

Συμμετρία $\Rightarrow \langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle = \langle Aw, v\rangle$ ④

④, ③ $\Rightarrow \lambda_1 \langle v, w\rangle = \lambda_2 \langle v, w\rangle \xRightarrow{\lambda_1 \neq \lambda_2} \langle v, w\rangle = 0$

<u>Συμβολισμός:</u>

Εισάγαμε τον συμβολισμό $D_a^2 f(x_0, y_0) := f_c''(0)$

και ανάλογα $D_a^k f(x_0, y_0) := f_c^{(k)}(0)$

$\square$

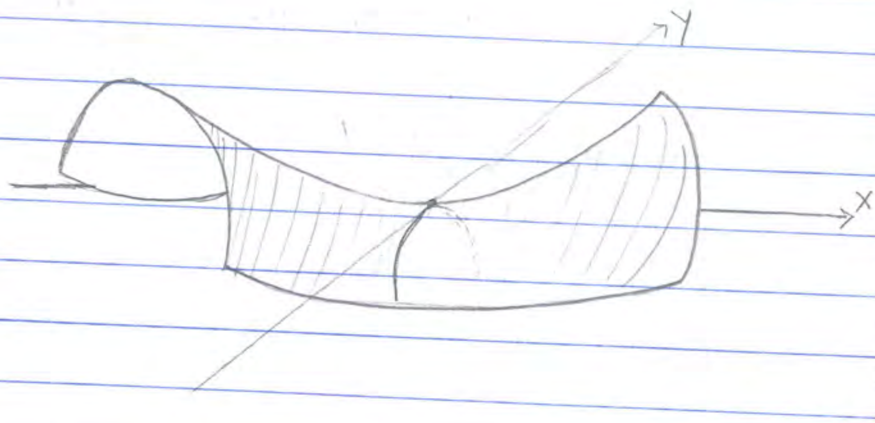
<u>Παράδειγμα:</u> $f(x,y) = x^2 - y^2$

$f_x = 2x$, $f_y = -2y$ $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = -2$, $f_{xy} = 0$

$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$

$x \to f(x,y)$ κυρτή

$y \to f(x,y)$ κοίλη



$\square$

Το Θεώρημα Του Taylor

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της διαφορισιμότητας στο (x_0,y_0) εξειδικεύοντας σε συναρτήσεις 2 μεταβλητών.
(Έστω $f\in C^1$ στο $A\subset\mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0)\in A$)

(1) $$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\nabla f(x_0,y_0)\cdot h}{\|h\|}=0$$

όπου $h=(x-x_0,y-y_0)$

Επαναδιατύπωση της (1)

(2) $$\boxed{f(x,y)=f(x_0,y_0)+\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)+R(x,y)}$$

όπου $R(x,y):=f(x,y)-f(x_0,y_0)-\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)$

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{R(x,y)}{\|h\|}=0 \iff \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{R(x,y)}{d(x,y)}=0$$

όπου $d(x,y)=\|h\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

Κεντρικό Αλγεβρικό Νόημα της (2):

Η $f(x,y)$ προσεγγίζεται από μια γραμμική συνάρτηση.

(3) $$\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Ιδέα του Taylor

Η γραμμική είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού.
Επέκταση σε προσέγγιση μέσω πολυωνύμου υψηλότερου βαθμού.

Taylor $1^{ας}$ Μεταβλητής

$f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ — (α,β) γενικότερα — , f $n+1$ συνεχείς παραγώγους.

(4) $f(t) = f(0) + f'(0)t + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{f^{(n+1)}(t_1)}{(n+1)!}t^{n+1}$

για κάποιο t_1 μεταξύ του t και του 0.

(5) (4) $\iff f(t) = \underbrace{P_n(t)}_{\text{πολυώνυμο } n\text{-βαθμού}} + \underbrace{R_n(t)}_{\text{υπόλοιπο}}$

$P_n(t) = f(0) + f'(0)t + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n$

<u>Κρίσιμο:</u> $R_n(t) \to 0$ πιο γρήγορα από το t^n καθώς $|t| \to 0$

(6) Έστω ότι ισχύει $f(t) = a_1 + a_2 t + \dots + a_n t^n + R_n(t)$
όπου $\lim_{t\to 0} \frac{R_n(t)}{t^n} = 0$

Τότε αναγκαστικά:
$a_1 = f(0)$, $a_2 = f'(0)$, …, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (Μοναδικότητα Πολ.)

<u>Υπόδειξη:</u>

<u>Βήμα 1:</u> Για $t=0$ παίρνουμε αμέσως $f(0) = a_1$

<u>Βήμα 2:</u> $\frac{f(t) - a_1}{t - 0} = a_2 + \dots + \frac{R_n(t)}{t}$

$\iff \frac{f(t) - f(0)}{t} = a_2 + \dots + \frac{R_n(t)}{t}$

$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(t)-f(0)}{t}\right) = a_2$. Δηλαδή $f'(0) = a_2$

Βήμα 3: $f(t) - (a_1 + a_2 t) = a_2 t^2 + \dots + R_n(t)$

$$\Leftrightarrow \frac{f(t) - (a_1 + a_2 t)}{t^2} = a_2 + \dots + \frac{R_n(t)}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t}\left[\frac{f(t) - f(0)}{t} - f'(0)\right] = a_2 + \dots + \frac{R_n(t)}{t^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0}\left\{\frac{1}{t}\left[\frac{f(t)-f(0)}{t}\right] - f'(0)\right\} = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{\left(\frac{f(t)-f(0)}{t}\right) - f'(0)}{t}\right\}$$

$$f''(0)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left\{a_2 + \dots + \frac{R_n(t)}{t^2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow f''(0) = a_2$$

Με επαγωγή παίρνουμε το ζητούμενο. □

Θα θεωρήσουμε τον περιορισμό της f στο ευθύγραμμο τμήμα

$$C : \begin{cases} x = x_0 + t\cos a \\ y = y_0 + t\sin a \end{cases}$$

$$f_C(t) = f(x_0 + t\cos a, y_0 + t\sin a)$$

<u>Υπενθυμίζουμε τον συμβολισμό:</u>

$$D_a f(x_0, y_0) = f_C'(0)$$

$$D_a^2 f(x_0, y_0) = f_C''(0)$$

$$\vdots$$

$$D_a^n f(x_0, y_0) = f_C^{(n)}(0)$$

Εφαρμόζοντας Taylor $1^{ας}$ μεταβλητής στην $f_c(t)$ έχουμε:

(6) $$f_c(t) = f_c(0) + f_c'(0)\,t + \frac{f_c''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{f_c^{(n+1)}(t_1)}{(n+1)!}t^{n+1}$$

$\Leftrightarrow$

(7) $$f(x,y) = f(x_0,y_0) + D_a f(x_0,y_0)\,t + \frac{D_a^2 f(x_0,y_0)}{2!}t^2 + \dots$$
$$+ \frac{D_a^n f(x_0,y_0)}{n!}t^n + \frac{D_a^{n+1} f(x_1,y_1)}{(n+1)!}t^{n+1}$$

<u>Υπολογισμός των $D_a^{(k)} f(x_0,y_0) := f_c^{(k)}(0)$</u>

<u>ΛΗΜΜΑ:</u>

$$D_a^n f = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\cos^n a + n\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}\cos^{n-1}a\,\sin a + \dots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}\sin^n a$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\cos^{n-k}\sin^k a$$

όπου $$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

<u>Απόδειξη:</u>

$f_c(t) = f(x_0 + t\cos a,\ y_0 + t\sin a)$

Έχουμε ήδη δείξει ότι:
$$f_c''(t) = f_{xx}\cos^2 a + 2f_{xy}\sin a\cos a + f_{yy}\sin^2 a$$

Υπολογίζουμε το $f_c'''(t)$:

Είναι $f_c'''(t) = \frac{\partial}{\partial t} f_c''(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} f_{xx}\right)\cos^2 a + 2\left(\frac{\partial}{\partial t} f_{xy}\right)\sin a\cos a$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial t} f_{yy}\right)\sin^2 a$$

$\bullet$ $\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(f_{xx}(x_0+t\cos a, y_0+t\sin a)\right)\right)\cos^2 a = \left(\nabla f_{xx}\cdot(x_0+t\cos a, y_0+t\sin a)'\right)\cos^2 a$

$$= \left((f_{xxx}, f_{xxy})\cdot(\cos a, \sin a)\right)\cos^2 a$$

$$= \left(f_{xxx}\cos a + \underline{f_{xxy}\sin a}\right)\cos^2 a$$

$\bullet$ $2\left(\frac{\partial}{\partial t} f_{xy}\right)\sin a\cos a = 2\sin a\cos a\left(\nabla f_{xy}\cdot(x_0+t\cos a, y_0+t\sin a)'\right)$

$$= 2\sin a\cos a\left((f_{xxy}, f_{xyy})\cdot(\cos a, \sin a)\right)$$

$$= 2\sin a\cos a\left(\underline{f_{xxy}\cos a} + \underline{f_{xyy}\sin a}\right)$$

Όμοια

$\bullet$ $\left(\frac{\partial}{\partial t} f_{yy}\right)\sin^2 a = \dots = \left(\underline{f_{yyx}\cos a} + f_{yyy}\sin a\right)\sin^2 a$

Άρα $f_c'''(0) = \frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^3}\cos^3 a + \frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^2\partial y}\left(\sin a\cos^2 a + 2\cos^2 a\sin a\right)$

$$+\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y^2}\left(2\sin^2 a\cos a + \cos a\sin^2 a\right)$$

$$+\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial y^3}\sin^3 a.$$

Μέσω επαγωγής καταλήγουμε στο ζητούμενο. $\square$

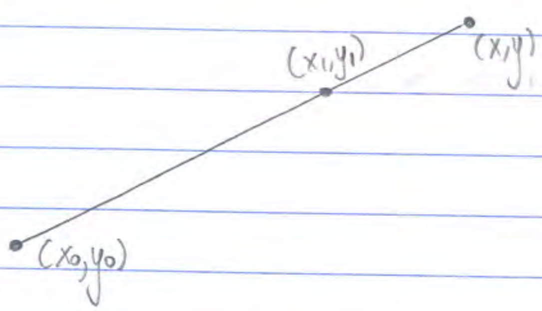
(Taylor μιας μεταβλητης)

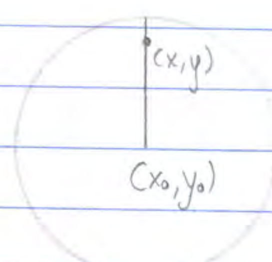
Κάνοντας χρήση του Λήμματος στην (6) έχουμε από (7)

(8) $$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left[f_x(x_0,y_0)\cos a + f_y(x_0,y_0)\sin a\right]\cdot t + $$
$$+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)\cos^2 a + 2f_{xy}(x_0,y_0)\cos a\sin a + f_{yy}(x_0,y_0)\sin^2 a\right]t^2$$
$$+ \dots + \frac{1}{n!}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(x_0,y_0)\cos^{n-k}a\sin^k a\right]t^n$$
$$+ R_n(x,y)$$

όπου,

(9) $$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k}\partial y^k}(x_1,y_1)\cos^{n+1-k}a\sin^k a\right]t^{n+1}$$





και έχουμε την εκτίμηση $n+1$

(10) $$|R_n(x,y)| \le Mt^{n+1}$$

Κάνοντας χρήση

$$t\cos a = x - x_0$$
$$t\sin a = y - y_0$$

Η (8) γίνεται :

$$(11) \quad f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \right]$$
$$+ \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial y^n}(y-y_0)^n + R_n(x,y)$$
$$= P_n(x,y) + R_n(x,y)$$

Το P_n είναι πολυώνυμο βαθμού n,
και το R_n ικανοποιεί την εκτίμηση (10).

$\square$

<u>Παράδειγμα:</u> Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της $f(x,y) = \sin xy$ στο $(\pi,0)$ μέχρι όρων $2^{ης}$ τάξης.

<u>Λύση</u>

$f_x = y\cos(xy)$, $f_y = x\cos(xy)$

$f_{xx} = -y^2 \sin xy$, $f_{xy} = \cos xy - xy\sin xy$

$f_{yy} = -x^2 \sin xy$,

Θα είναι :

$f(\pi,0) = 0$

$f_x(\pi,0) = 0$ $\quad f_y(\pi,0) = \pi$

$f_{xx}(\pi,0) = 0$

$f_{yy}(\pi,0) = 0$

$f_{xy}(\pi,0) = 1$

Άρα
$$f(x,y) = 0 + 0\cdot(x-\pi) + \pi(y-0) + \frac{1}{2}\left[0(x-\pi)^2 + 2\cdot 0(x-\pi)(y-0) + 0(y-0)^2\right] + R_n(x,y)$$
$$= \pi y + R_n(x,y)$$

<u>Σημείωση</u>: Εάν θέσουμε $P(x,y) = xy$ (πολυώνυμο)
τότε θα έχουμε:

$$P_x = y \;,\quad P_y = x$$
$$P_{xx} = 0 \;,\quad P_{yy} = 0 \;,\quad P_{xy} = 1$$

$$P(\pi,0) = 0 \;,\quad P_x(\pi,0) = 0 \;,\quad P_y(\pi,0) = \pi$$

Βλέπουμε ότι

$$f(\pi,0) = P(\pi,0)$$
$$f_x(\pi,0) = P_x(\pi,0)$$
$$f_y(\pi,0) = P_y(\pi,0)$$
$$f_{xx}(\pi,0) = P_{xx}(\pi,0)$$
$$f_{yy}(\pi,0) = P_{yy}(\pi,0)$$
$$f_{yx}(\pi,0) = P_{xy}(\pi,0)$$

<u>ΓΕΝΙΚΩΣ ΕΧΟΥΜΕ</u>

Το πολυώνυμο $P_n(x,y)$ στο ανάπτυγμα Taylor είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού n που οι τιμές του και οι παράγωγοι του μέχρι τάξης n, στο (x_0,y_0), <u>συμπίπτουν</u> με της $f(x,y)$

Πακέτο Σημειώσεων 4 / Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

63) Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor στο $(1,-2)$ μέχρι $n=3$
Φ1 της $f(x,y) = x^4 + 3x^2y^2 - xy + 2$

Λύση

$$f(1,-2) = 1 + 12 + 2 + 2 = 17.$$

Παράγωγοι 1ης τάξης

- $f_x = 4x^3 + 6y^2x - y$ τότε, $f_x(1,-2) = 30$
- $f_y = 6x^2y - x$ τότε, $f_y(1,-2) = -13$

Παράγωγοι 2ης τάξης

- $f_{xx} = 12x^2 + 6y^2$ τότε, $f_{xx}(1,-2) = 36$
- $f_{yy} = 6x^2$ τότε, $f_{yy}(1,-2) = 6$
- $f_{xy} = f_{yx} = 12xy - 1$ τότε, $f_{xy}(1,-2) = -25$

Παράγωγοι 3ης τάξης

- $f_{xxx} = 24x$ τότε, $f_{xxx}(1,-2) = 24$
- $f_{yyy} = 0$ τότε, $f_{yyy}(1,-2) = 0$
- $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx} = 12x$ τότε, $f_{xyy}(1,-2) = 12$
- $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx} = 12y$ τότε, $f_{yxx}(1,-2) = -24$

$\Longrightarrow$

Γνωρίζουμε ότι το ανάπτυγμα Taylor (για $n=3$) στο σημείο (x_0,y_0) δίνεται από:

σημείωση β

$$f(x,y) = \boxed{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]$$

$$+ \frac{1}{3!}\Big[f_{xxx}(x_0,y_0)(x-x_0)^3 + 3f_{xxy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0) +$$

$$3f_{yyx}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + f_{yyy}(x_0,y_0)(y-y_0)^3\Big]$$

$$+ R(x,y)$$

Επομένως, μετά από αντικατάσταση, θα έχουμε:

$$f(x,y) = 17 + 30(x-1) - 13(y+2) + \frac{1}{2}\left[36(x-1)^2 - 50(x-1)(y+2) + 6(y+2)^2\right]$$

$$+ \frac{1}{6}\left[24(x-1)^3 + 3(-24)(x-1)^2(y+2) + 3\cdot 12(x-1)(y+2)^2\right]$$

$$+ R(x,y)$$

$$=: P_3(x,y) + R(x,y)$$

Σημείωση:

α) Το ανάπτυγμα είναι πιο πολύπλοκο από την f

β) Το γραμμικό μέρος είναι η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο (x_0,y_0)

γ) Το υπόλοιπο $R(x,y)$ είναι η διαφορά των δύο πολυωνύμων $f(x,y) - P_3(x,y)$

ΜΕΓΙΣΤΑ - ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΙΙ

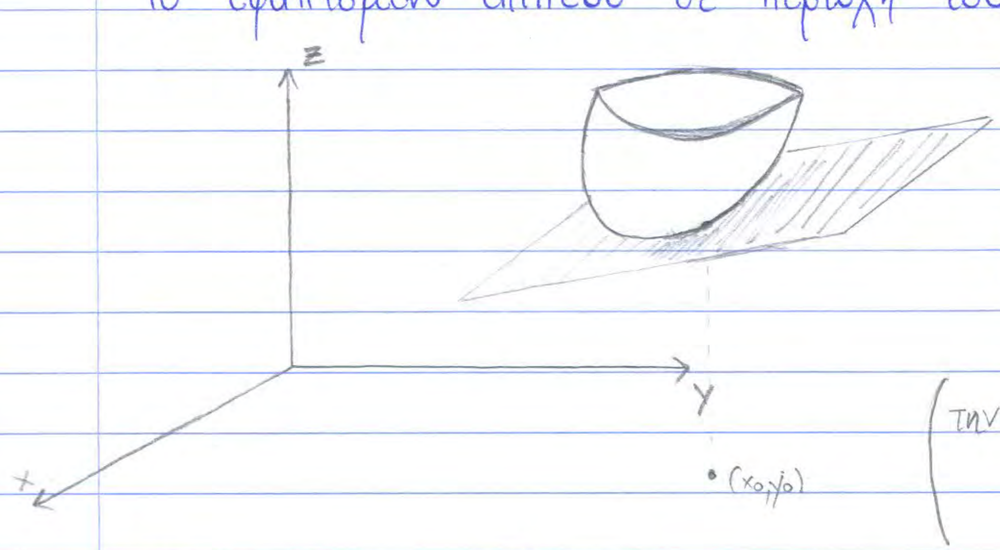
Θεώρημα: Έστω $f(x,y) \in C^2$ σε ανοικτό $A \subset \mathbb{R}^2$ και έστω $(x_0,y_0) \in A$, και έστω

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0 \text{ στο } (x_0,y_0).$$

Έχουμε 3 περιπτώσεις:

1) $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, $f_{xx} > 0$
2) $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, $f_{xx} < 0$
3) $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$

Περίπτωση 1: Η $z = f(x,y)$ επιφάνεια είναι επάνω από το εφαπτόμενο επίπεδο σε περιοχή του (x_0,y_0)

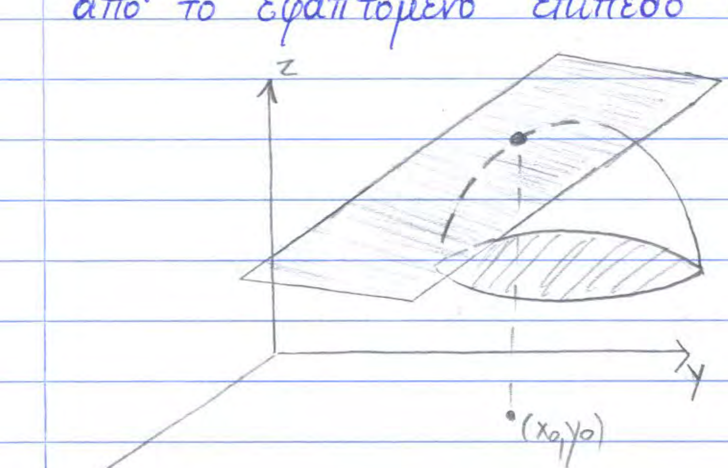


$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$

$f_{xx} > 0$

(την επιφάνεια την "βλέπω" κυρτή από το εφαπτόμενο σημείο)

Περίπτωση 2: Η $z = f(x,y)$ επιφάνεια είναι από κάτω από το εφαπτόμενο επίπεδο σε περιοχή του (x_0,y_0).

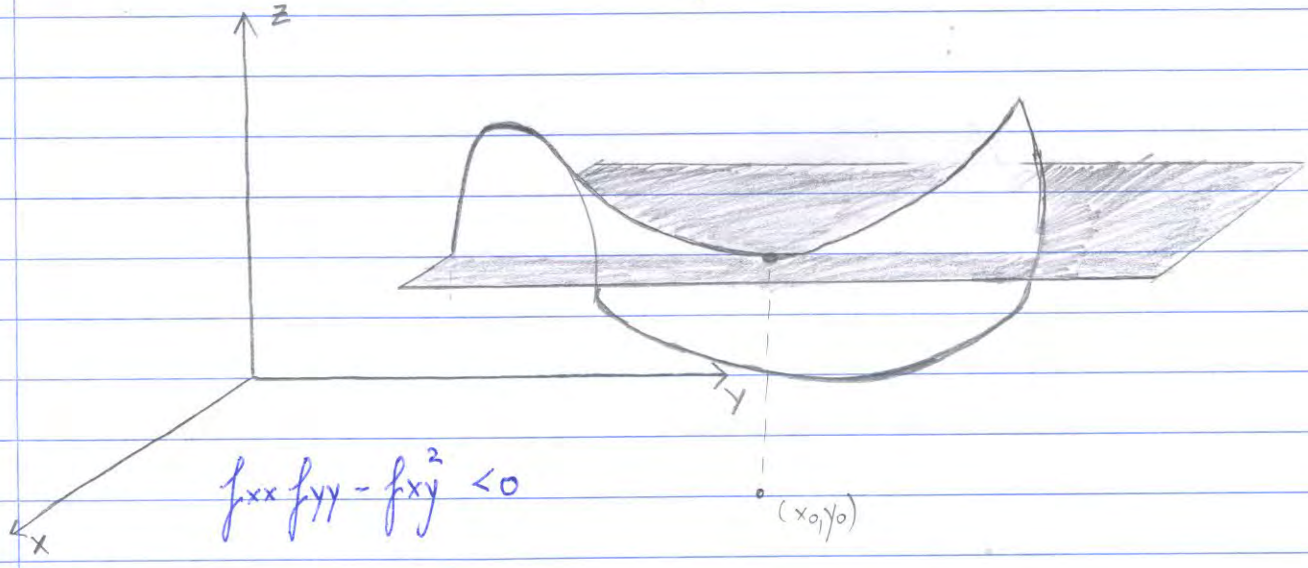


$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$

$f_{xx} < 0$

(την επιφάνεια την "βλέπω" κοίλη από το εφαπτόμενο σημείο)

Περίπτωση 3: Η $z = f(x,y)$ επιφάνεια τέμνει το εφαπτόμενο επίπεδο σε περιοχή του (x_0,y_0).



$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$$

Απόδειξη:

Παρατήρηση 1: Αυτές είναι όλες οι περιπτώσεις.

Πράγματι, $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0 \iff \begin{cases} f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 & (a) \\ f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0 & (β) \end{cases}$

a) $\Rightarrow f_{xx} > 0$ ή $f_{xx} < 0$ $\quad (f_{xx} = 0 \Rightarrow f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \leq 0)$

Παρατήρηση 2: Εάν ισχύει το (a) τότε $f_{xx} > 0 \Rightarrow f_{yy} > 0$

και $f_{xx} < 0 \Rightarrow f_{yy} < 0$

άρα δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ x και y.

Η τετραγωνική μορφή

(1) $Q(\xi,\psi) = A\xi^2 + 2B\xi\psi + C\psi^2$, $\quad \xi,\psi \in \mathbb{R}$

$A = f_{xx}(x_0,y_0)$, $B = f_{xy}(x_0,y_0)$, $C = f_{yy}(x_0,y_0)$

Έχουμε την αντιστοιχία

Περίπτωση (1) $\iff$ Q θετικά ορισμένη
Περίπτωση (2) $\iff$ Q αρνητικά ορισμένη
Περίπτωση (3) $\iff$ Q παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές.

(2) $$Q(\xi,\psi) = \left\langle \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \psi \end{pmatrix} \right\rangle$$

(3) $$\begin{cases} \det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} > 0, \quad tr\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} > 0, & \text{θετικός } (\lambda_1, \lambda_2 > 0) \\ \det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} > 0, \quad tr\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} < 0, & \text{αρνητικός } (\lambda_1, \lambda_2 < 0) \\ \det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} < 0 \iff \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0, & \text{αόριστη μορφή.} \end{cases}$$

Το ανάπτυγμα Taylor για $n=2$

(4) $$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[f_x(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \right.$$
$$\left. + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \right] + R_2(x,y)$$

- Οι γραμμικοί όροι γράφονται:

$$L(x,y) = a(x-x_0) + b(y-y_0) + c, \quad a = f_x, \ b = f_y, \ c = f$$

- Οι τετραγωνικοί όροι γράφονται:

$$Q(x-x_0, y-y_0) = \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

A, B, C όπως στην (2).

$z = L(x,y)$, το εφαπτόμενο επίπεδο στο (x_0,y_0)

Q δίνει την σχετική σχέση γραφήματος ως προς το εφαπτόμενο επίπεδο.

Εάν $s^2 := (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$ τότε έχουμε την εξής εκτίμηση για $n=2$

$$|R_2(x,y)| \leq M\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^3 = M s^3$$

(5) $$\frac{|R_2(x,y)|}{s^2} \longrightarrow 0 \quad \text{όπως} \quad (x,y) \to (x_0,y_0)$$

Περίπτωση 1:

Η τετραγωνική μορφή $Q(\xi,\psi)$ είναι θετικά ορισμένη, $Q(\xi,\psi)>0$ για $(\xi,\psi)\neq(0,0)$. Κατα συνέπεια

(6) $$Q(\xi,\psi) \geq \lambda \quad \text{για} \quad \xi^2+\psi^2 = 1, \quad \lambda>0$$

Άρα $\forall (\xi,\psi)\neq(0,0)$

(7) $$Q(\xi,\psi) = Q\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\psi^2}}, \frac{\psi}{\sqrt{\xi^2+\psi^2}}\right)(\xi^2+\psi^2) \geq \lambda(\xi^2+\psi^2)$$

Από την (5) έχουμε ότι $\exists\ s_0>0$, αρκετά μικρό, τέτοιο ώστε:

(8) $$\frac{R_2(x,y)}{s^2} \leq \frac{\lambda}{3}, \quad s<s_0$$

Κατα συνέπεια, $s = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ και για $s<s_0$ έχουμε

(9) $$\frac{f(x,y)-L(x,y)}{s^2} = \frac{1}{2}\,\frac{Q(x-x_0,y-y_0)}{s^2} + \frac{R_2(x,y)}{s^2}$$

$$\overset{(7)}{\geq} \frac{1}{2}\lambda + \frac{R_2(x,y)}{s^2}$$

(8)

$$\geq \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{3}\lambda = \frac{\lambda}{6} > 0$$

Άρα για $s < s_0$ $f(x,y) > L(x,y)$, το γράφημα είναι πάνω από το εφαπτόμενο επίπεδο.

Περίπτωση 2:

Πλήρως ανάλογη με την περίπτωση 1.

Περίπτωση 3:

Εδώ θα εφαρμόσουμε το θεώρημα του σάγματος στην $g(x,y) = f(x,y) - L(x,y)$.

Πρώτον $$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - \frac{\partial L}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) - \frac{\partial L}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

Δεύτερον

$$g_{xx}g_{yy} - g_{xy}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} < 0$$

Επίσης $g(x_0,y_0) = f(x_0,y_0) - L(x_0,y_0) = 0$.

Κατα συνέπεια το θεώρημα του σάγματος δίνει ότι η g παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές σε περιοχή του (x_0,y_0)

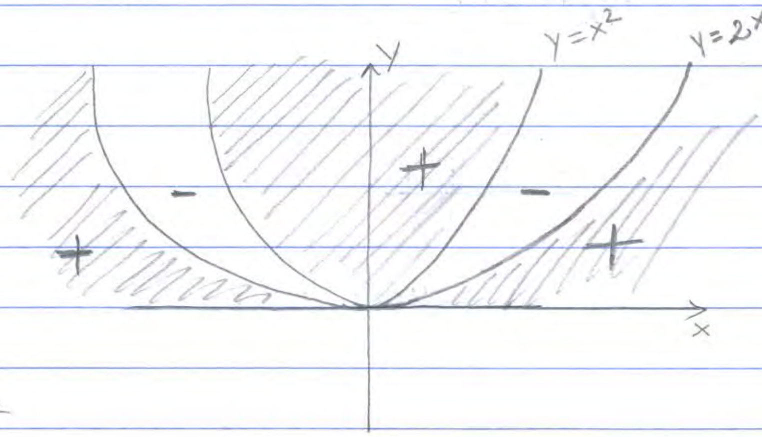
$\square$

__Προσοχή:__ Περιορισμός των συναρτήσεων 2-μεταβλητών σε ευθύγραμμα τμήματα θα μπορούσε να δώσει λανθασμένη πληροφορία (όταν υπάρχει έλλειψη ομοιομορφίας των μηκών τους).

Είναι δυνατόν η $f(x,y) \geq 0$ $\forall$ ευθεία γύρω από το $(0,0)$, __σε μια περιοχή της ευθείας__, και παρα ταυτα σε κάθε περιοχή του $(0,0)$ η $f(x,y)$ να παίρνει αρνητικές τιμές.

__Παράδειγμα__

$$f(x,y) = (x^2-y)(2x^2-y)$$
$$= y^2 - 3x^2y + 2x^4$$



$f>0$ εντός της $y=x^2$

$f>0$ εκτός της $y=2x^2$

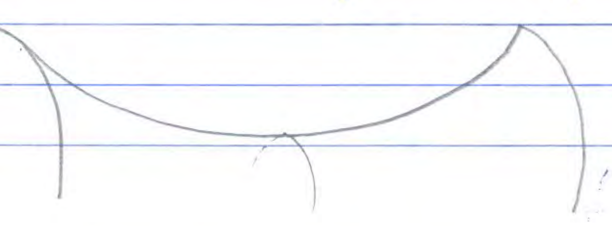
$f<0$ μεταξύ, δηλαδή $x^2 < y < 2x^2$

__Σημείωση:__ $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ στο $(0,0)$

Υπενθυμίζουμε το ΛΗΜΜΑ, ότι εάν στο (x_0,y_0) έχουμε ακρότατο (τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο), τότε

(1) $$\nabla f(x_0,y_0) = 0$$

Η (1) ισχύει και για το σάγμα.



Θεώρημα (Μέγιστα - Ελάχιστα)

Έστω $f(x,y) \in C^3$ στο $A \subset \mathbb{R}^2$, A ανοιχτό και έστω $\nabla f(x_0,y_0) = 0$.

Τότε στο (x_0,y_0) έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

Περίπτωση 1

$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, $f_{xx} > 0$ $\Rightarrow$ f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο

Περίπτωση 2

$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, $f_{xx} < 0$ $\Rightarrow$ f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο

Περίπτωση 3

$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$, $\Rightarrow$ ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε ελάχιστο.

Απόδειξη:

Το εφαπτόμενο επίπεδο είναι:

$$z - f(x_0,y_0) = \underbrace{f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{=0}$$

δηλαδή $z = f(x_0,y_0)$, παράλληλο στο x-y επίπεδο.

Το θεώρημα προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο θεώρημα. $\square$

Παράδειγμα: Για x,y,z θετικούς αριθμούς με άθροισμα s
$x+y+z=s$
βρείτε την μέγιστη τιμή του γινομένου.

Λύση:

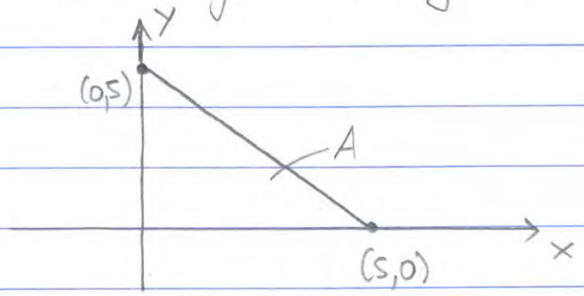
$$x+y+z=s \Rightarrow z = s-(x+y)$$

$$f(x,y) = xy(s-x-y) = sxy - x^2y - xy^2$$

$$A = \{ (x,y) \mid x>0 , y>0 , s-x-y>0 \}$$

f είναι συνεχής στο $\bar{A}$. Κατα συνέπεια παίνει το μέγιστο της στη θήκη του A:

$x \geq 0 \quad , y \geq 0 \quad , x+y \leq s$



Στο ∂A (σύνορο του A)

$x=0 \Rightarrow f=0$

$y=0 \Rightarrow f=0$

$x+y=s \Rightarrow f=0$

Κατα συνέπεια το μέγιστο πιάνεται εντός του A.

$$\Rightarrow \nabla f(x_0,y_0) = 0$$

$$f_x = sy - 2xy - y^2 = y(s-2x-y) = 0.$$

$$f_y = sx - x^2 - 2xy = x(s-2y-x) = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_0 + y_0 = s \\ 2y_0 + x_0 = s \end{array}\right] \Rightarrow x_0 = y_0 = \frac{s}{3}$$

Άρα $f(x,y) \leq f\left(\frac{s}{3}, \frac{s}{3}\right) = \left(\frac{s}{3}\right)^3$

$$\Rightarrow xyz \leq \left(\frac{s}{3}\right)^3 = \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow (xyz)^{1/3} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

(Γεωμετρικός μέσος $\leq$ Αριθμητικού Μέσου) $\square$

Παράδειγμα:

Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x,y)=5+y-x^2-y^2+x^2y$ και ταξινομήστε τα.

Λύση

$f_x = -2x+2xy = 2x(y-1) = 0 \iff x=0$ ή $y=1$

$f_y = 1-2y+x^2 = 0 \iff 2y = 1+x^2$

Άρα $(0,\frac{1}{2})$, $(1,2)$, $(-1,2)$ τα κρίσιμα σημεία.

$\Delta := f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 = -4(-1+y)-4x^2 = 4(1-y-x^2)$

$(0,\frac{1}{2})$ $\Delta=2$ $f_{xx}=-1$ $\Rightarrow$ Ελάχιστο.

$(\pm 1,2)$: $\Delta=-4$ $\Rightarrow$ Σάγμα.

$\square$

Η περίπτωση $\Delta=0$ (Η αρχή του μεγίστου)

Θεώρημα: (Η Monge-Ampere, $\det D^2 f = \Delta = 0$)

Έστω A ανοιχτό και συνεκτικό, φραγμένο στον $\mathbb{R}^2$.
Έστω f συνεχής στο $\bar{A}$ και $f(x,y)\in C^3$ στο A.

(1) Υποθέτουμε ότι $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 \leq 0$ στο A.

Τότε το μέγιστο και το ελάχιστο της f στο $\bar{A}$ πιάνονται στο ∂A.

Σημείωση: Εάν στην (1) έχουμε αυστηρή ανισότητα τότε το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το θεώρημα του Σάγματος. Η δυσκολία είναι λοιπόν ότι επιτρέπουμε $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$.

Σημείωση: Η περίπτωση $A = \{(x,y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < R^2\}$ αρκεί για πολλές εφαρμογές του θεωρήματος.

Απόδειξη:

Δίνουμε την απόδειξη για το μέγιστο. Η απόδειξη για το ελάχιστο προκύπτει εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα για το ελάχιστο στην $-f$.

(1) $M = \max f$ στο $\bar{A}$, $m = \max f$ στο ∂A.

Προφανώς $m \leq M$. Θα δείξουμε ότι $m = M$
Θα επιχειρηματολογήσουμε με εις άτοπον απαγωγή.

(2) Έστω $m < M$
Εάν λοιπόν $(x_0,y_0) \in \bar{A}$, με $f(x_0,y_0) = M$, τότε $(x_0,y_0) \in A$.
Θεωρούμε την συνάρτηση

(3) $$g(x,y) = M - \varepsilon\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right], \quad \varepsilon > 0$$

Επιλέγουμε το $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό έτσι ώστε.

(4) $g(x,y) > m$ στο ∂A.

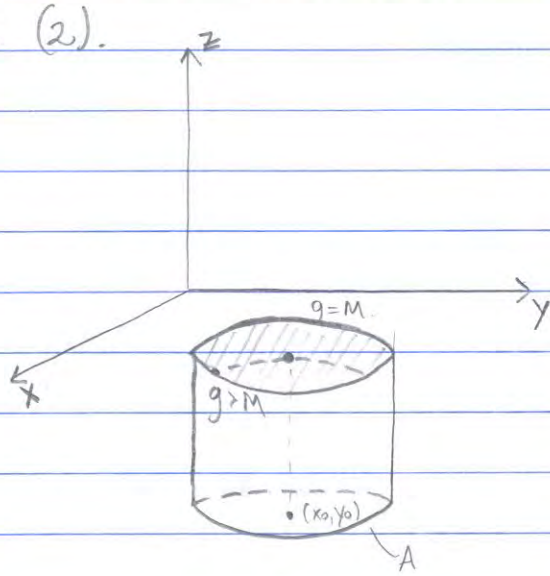
κάτι που είναι εφικτό λόγω της (2).

Κατα συνέπεια,

(5) $f(x,y) < g(x,y)$, $(x,y) \in \partial A$

Επίσης,

(6) $M = f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0)$



Θεωρούμε τώρα την διαφορά

(7) $\Phi(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$ που είναι συνεχής στο $\bar{A}$ και έχει μέγιστο μ σε κάποιο (x_1,y_1) του $\bar{A}$.

(8) $\mu = \Phi(x_1,y_1) \geq \Phi(x_0,y_0) = 0$

Επίσης γνωρίζουμε ότι

(9) $\Phi(x,y) < 0$ στο ∂A (από (1) και (4))

Κατά συνέπεια το (x_1,y_1) πρέπει να βρίσκεται εντός του A. Εφ' όσον στο (x_1,y_1) η Φ έχει μέγιστο, θα πρέπει να έχει τοπικό μέγιστο κατα μήκος κάθε ευθύγραμμου τμήματος διερχομένου μέσω του (x_1,y_1) και κατα συνέπεια $\forall a$.

(10) $D_a\Phi(x_1,y_1) = 0 \quad , \quad D_a^2\Phi(x_1,y_1) \leq 0$

Υπολογίζουμε

$g_{xx} = -2\varepsilon \quad , \quad g_{xy} = 0 \quad , \quad g_{yy} = -2\varepsilon$

(11) $D_a^2 g(x_1,y_1) = g_{xx}\cos^2 a + g_{yy}\sin^2 a = -2\varepsilon$

Κατα συνέπεια

(12) $$\begin{aligned} D_a^2 f(x_1,y_1) &= f_{xx}\cos^2 a + 2f_{xy}\cos a \sin a + f_{yy}\sin^2 a \\ &\overset{(7)}{=} (\Phi_{xx}+g_{xx})\cos^2 a + 2(\Phi_{xy}+g_{xy})\cos a \sin a \\ &\quad + (\Phi_{yy}+g_{yy})\sin^2 a \\ &\leq -2\varepsilon \quad (\text{μέσω } (10), (11)) \end{aligned}$$

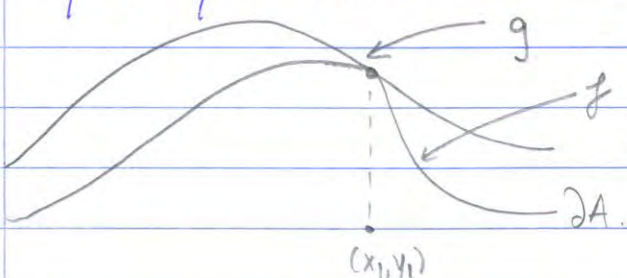
Έπεται ότι η τετραγωνική μορφή $D_a^2 f(x_1,y_1)$ είναι αρνητικά ορισμένη, άρα

(13) $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, $f_{xx} < 0$, στο (x_1,y_1)

Αυτό όμως συγκρούεται με την (1). Άρα η υπόθεση (2) δεν μπορεί να ισχύει.
Η απόδειξη είναι πλήρης.

□

<u>Σημείωση:</u> (Η Γεωμετρική ιδέα της απόδειξης)
Θέλουμε να δείξουμε ότι εάν η f ικανοποιεί την (1) σε όλο το A, τότε η $z=f(x,y)$ δεν μπορεί να προεξέχει περισσότερο επάνω από το A, σε κάποιο σημείο στο A.



Διότι αν πράγματι συνέβαινε κάτι τέτοιο, επιλέγοντας ένα παραβολοειδές αρκετά επιπεδοποιημένο ($\varepsilon > 0$ μικρό), που ανοίγει προς τα κάτω, και κατεβάζοντας το σιγά σιγά θα ακουμπήσει το γράφημα της f σε κάποιο σημείο επάνω από το $(x_1,y_1) \in A$.
Κοντά λοιπόν σε αυτό το σημείο οι δύο επιφάνειες θα έχουν το ίδιο εφαπτόμενο επίπεδο, και η $z=f(x,y)$ θα κείται κάτω από την $z=g(x,y)$.
Αυτό όμως σημαίνει ότι η $z=f(x,y)$ θα πρέπει να είναι αυστηρά κοίλη στο (x_1,y_1), <u>Άτοπο</u>.

□

Η περίπτωση των n - μεταβλητών

Διατυπώνουμε χωρίς απόδειξη το αντίστοιχο θεώρημα για συναρτήσεις $f(x_1, \dots, x_n) \in C^3(A)$

$$f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\vec{x}$ κρίσιμο σημείο στο A, ανοιχτό στο $\mathbb{R}^n$

Θεώρημα:

Εάν $\vec{x}$ κρίσιμο σημείο τότε

$$\nabla f(\vec{x}) = \vec{0} \iff \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = 0 \quad , i = 1, \dots, n$$

Ο πίνακας Hess στο $\vec{x}$ ορίζεται ως

$$Hf(\vec{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad , i,j = 1, \dots, n$$

Περιπτώσεις

1) Εάν ο $Hf(\vec{x})$ είναι θετικά ορισμένος $\Rightarrow$ Τοπικό ελάχιστο.

2) Εάν ο $Hf(\vec{x})$ είναι αρνητικά ορισμένος $\Rightarrow$ Τοπικό μέγιστο.

3) Εάν ο $Hf(\vec{x})$ είναι αόριστος $\Rightarrow$ σάγμα

Σημείωση: (Κριτήριο Sylvester)

Ο συμμετρικός πίνακας

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

1) Είναι θετικά ορισμένος εάν όλες οι υποορίζουσες (ελασσόνες) είναι θετικές.

$$|a_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$$

$$\dots \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

2) Είναι αρνητικά ορισμένος εάν για όλες τις υποορίζουσες εναλλάσονται τα πρόσημα.

$$|a_{11}| < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0 \quad \dots$$

$\square$

Συνεχείς συναρτήσεις λαμβάνουν το sup και το inf σε συμπαγή σύνολα.

Θεώρημα: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, φραγμένο, και έστω ότι η f είναι συνεχής στο $\bar{A}$ (θήκη του A)
Τότε υπάρχει $x_M \in \bar{A}$ τέτοιο ώστε:

(1) $\sup_{x \in \bar{A}} f(x) = f(x_M)$

Όμοια υπάρχει $x_m \in \bar{A}$ τέτοιο ώστε

(2) $\inf_{x \in \bar{A}} f(x) = f(x_m)$

Δηλαδή $\sup_{x \in \bar{A}} f(x) = \operatorname{Max}_{x \in \bar{A}} f(x)$

$$\inf_{x \in \bar{A}} f(x) = \min_{x \in \bar{A}} f(x)$$

Σημείωση 1: Η υπόθεση ότι η f είναι συνεχής στο $\bar{A}$, σημαίνει ότι $\forall \xi \in \bar{A}$ η $f(\xi)$ ορίζεται (άρα $|f(\xi)| < \infty$) και επίσης ότι η f είναι συνεχής στο ξ.

Σημείωση 2: (Bolzano - Weierstrass)
Έστω ότι D είναι ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Τότε δοθείσης ακολουθίας $\{x_k\} \subset D$, υπάρχει υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο στο D.

$\{x_k'\} \subset \{x_k\}$, τ.ω

$$x_k' \to \xi, \quad \xi \in D.$$

Απόδειξη:

Θα δείξουμε το (1). Από τον ορισμό του supremum υπάρχει ακολουθία $\{f(x_n)\}$, $\{x_n\} \subset \bar{A}$, με

(3) $$f(x_n) \longrightarrow \sup_{x \in \bar{A}} f(x)$$

Από Bolzano-Weierstrass υπάρχει υπακολουθία $\{x_n'\} \subset \{x_n\}$ τέτοια ώστε

(4) $$x_n' \longrightarrow x_M \in \bar{A}.$$

Από συνέχεια (αρχή της μεταφοράς)

(5) $$f(x_n') \longrightarrow f(x_M)$$

Κατα συνεπεια (3), (5) $\Longrightarrow$

$$f(x_M) = \sup_{x \in \bar{A}} f(x).$$

Η περίπτωση 2) είναι πανομοιότυπη

$\square$

Παράδειγμα: Βρείτε τα κρίσιμα σημεία και ταξινομήστε τα για την

$$f(x,y,z) = x^3 + xz^2 + 3x^2 + y^2 + 2z^2, \quad A = \mathbb{R}^3$$

Λύση

$$\nabla f = \left(3x^2 + z^2 + 6x,\ 2y,\ 2xz + 4z\right) = 0$$

Αν και μόνο αν

$$3x^2+z^2+6x=0$$
$$2y=0 \quad \Rightarrow y=0$$
$$2xz+4z=0 \quad \Rightarrow z=0,\ x=-2$$

Άρα $(0,0,0)$, $(-2,0,0)$ τα κρίσιμα σημεία.

$$Hf=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x+6 & 0 & 2z \\ 0 & 2 & 0 \\ 2z & 0 & 2x+4 \end{pmatrix}$$

a) $$Hf(0,0,0)=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Sylvester:

$$|6|>0 \quad \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}>0$$

$\Rightarrow$ $Hf(0,0,0)$ είναι θετικά ορισμένος

Άρα $(0,0,0)$ τοπικό ελάχιστο.

b) $$Hf(-2,0,0)=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-6<0 \quad \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}<0 \quad \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

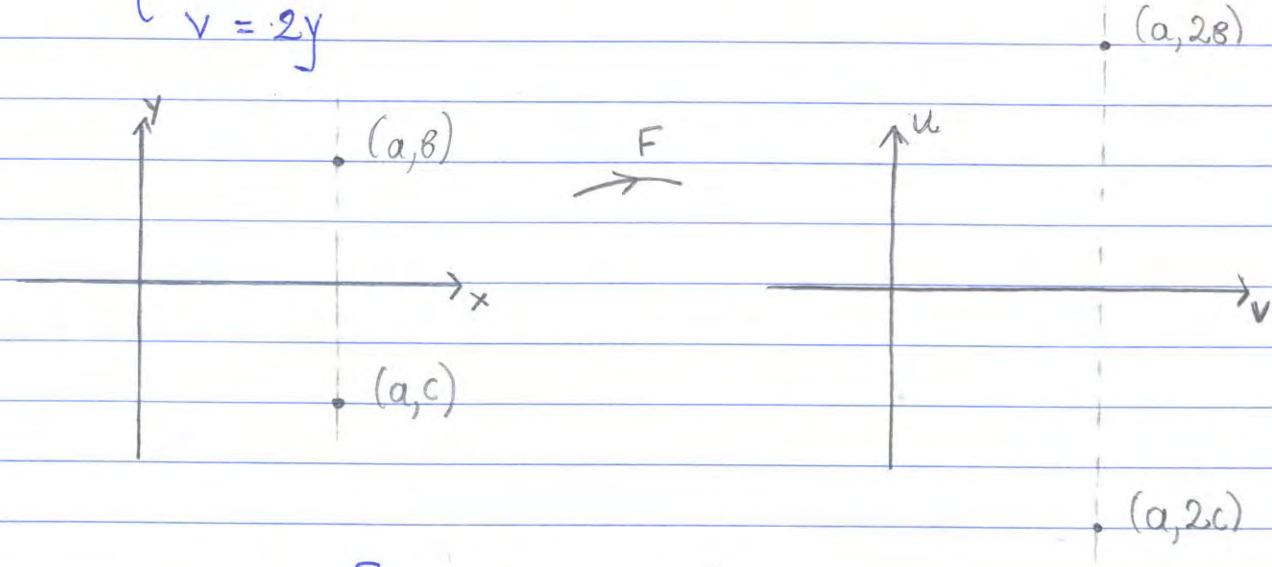
$\Rightarrow$ $(-2,0,0)$ σάγμα.

$\square$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Παραδείγματα

1) $F : \begin{cases} u = x \\ v = 2y \end{cases}$



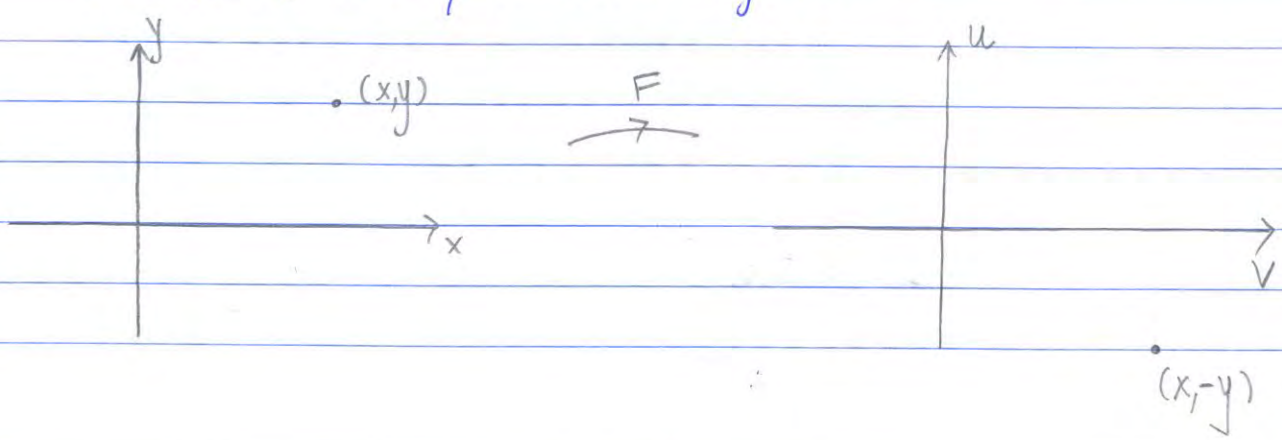
$$(x,y) \xrightarrow{F} (x,2y)$$

κάθετες ευθείες $\longrightarrow$ κάθετες ευθείες.
οριζόντιες ευθείες $\longrightarrow$ οριζόντιες ευθείες.

2) $F : \begin{cases} u = x \\ v = -y \end{cases}$

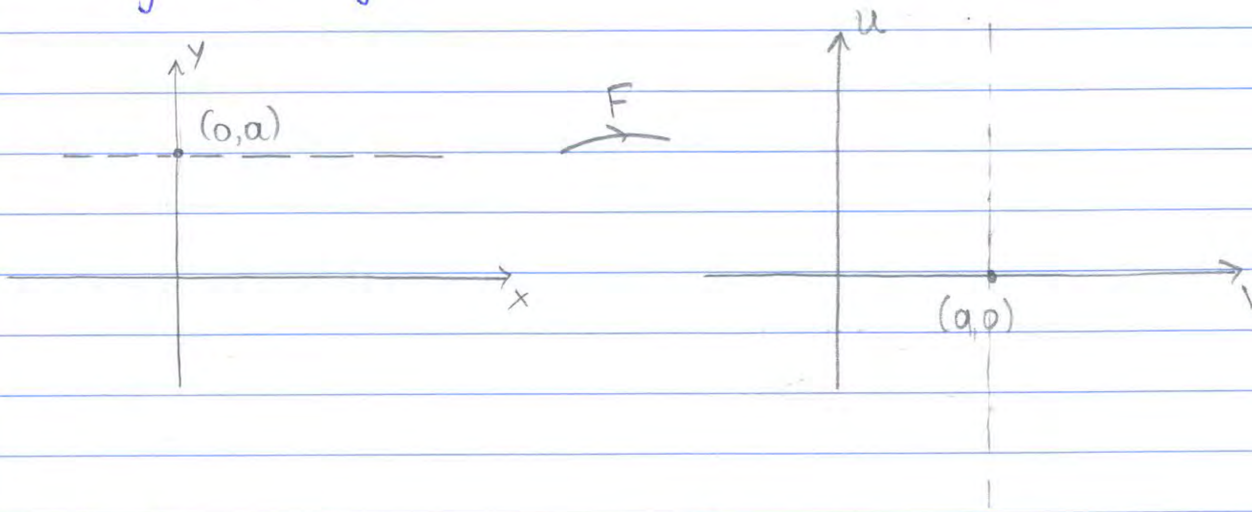
$$(x,y) \xrightarrow{F} (x,-y)$$

ανάκλαση ως προς τον x-άξονα.



3) $F : \begin{cases} u = y \\ v = x \end{cases}$

$$(x,y) \xrightarrow{F} (y,x)$$



Οριζόντιες ευθείες απεικονίζονται σε κάθετες.
Κάθετες -//- -//- οριζόντιες.
Ανάκλαση ως προς την πρώτη διχοτόμο $x=y$.

4). <u>Ο Γενικός Γραμμικός Μετασχηματισμός.</u>

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix}$$

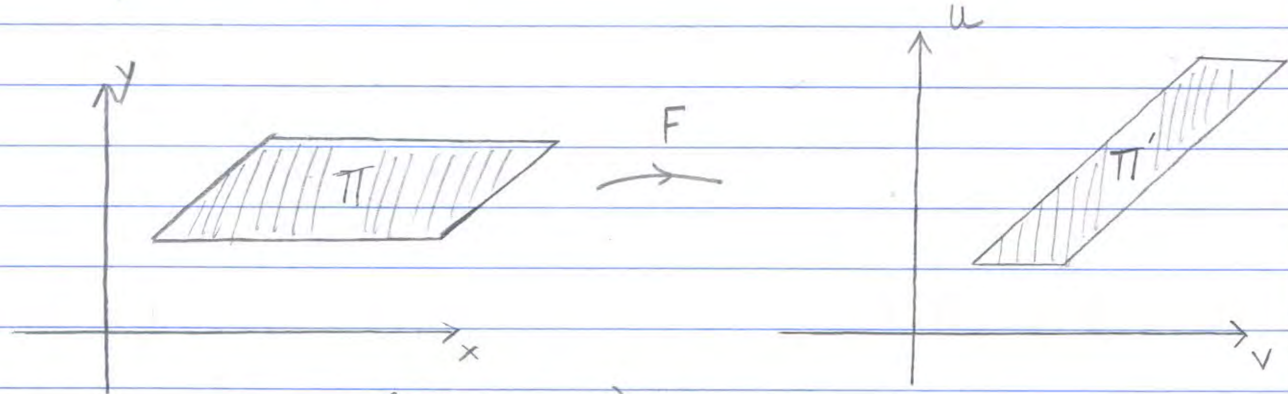
$$(x,y) \xrightarrow{F} (a_{11}x + a_{12}y \, , \, a_{21}x + a_{22}y)$$

Θεώρημα: Ο γραμμικός μετασχηματισμός απεικονίζει ευθείες σε ευθείες, παραλληλόγραμμα σε παραλληλόγραμμα.
Εάν,

$$\Pi' = F(\Pi)$$

Π, παραλληλόγραμμο, τότε ισχύει

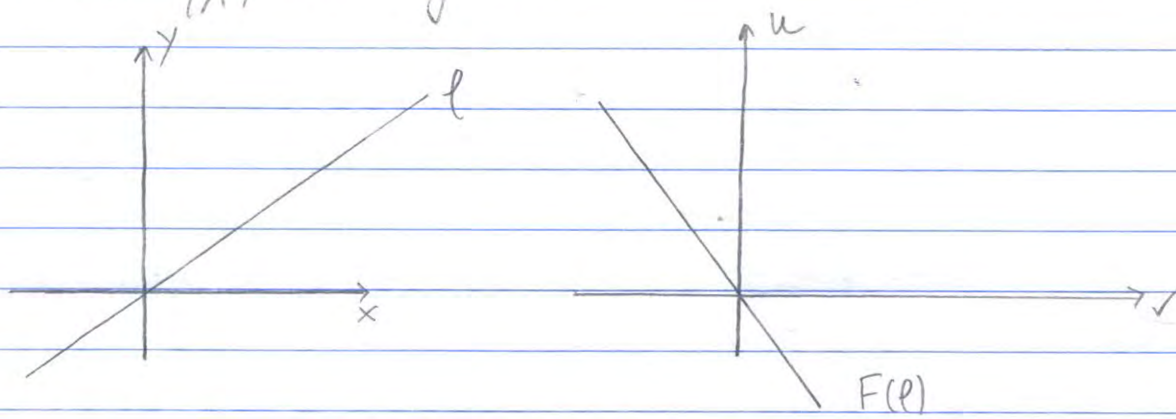
(1) $$\frac{\text{Εμβαδόν}(\Pi')}{\text{Εμβαδόν}(\Pi)} = \det A$$



$(\det A \neq 0)$

Απόδειξη: $(\det A \neq 0)$

1. Θεωρούμε μια ευθεία στο x-y επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων



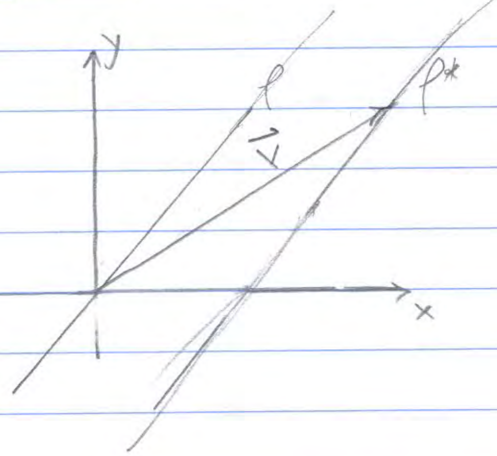
$$l = \{ (x, mx) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

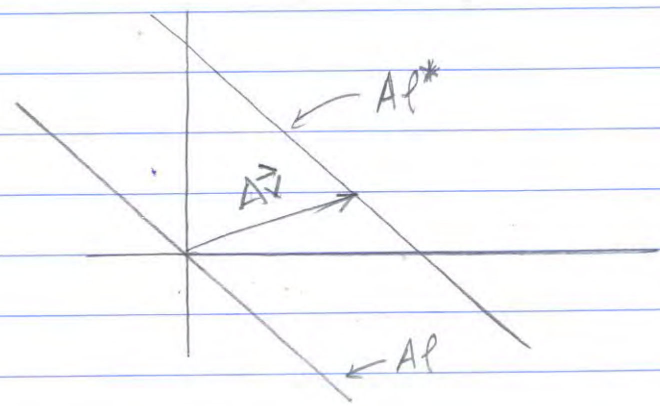
$$A \begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(a_{11} + a_{12} m) \\ x(a_{21} + a_{22} m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{a_{21}+a_{22}m}{a_{11}+a_{12}m} = \text{σταθ} \Rightarrow F(\ell) \text{ ευθεία.}$$

Επίσης $F(0,0) = A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, άρα $F(\ell)$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2. Έστω ℓ^* ευθεία στο x-y επίπεδο, τυχαία





Έχουμε $\ell^* = \ell + \vec{v}$ $\vec{v}$ όπως στο σχήμα. (μετατόπιση της ℓ)
(Το $\vec{v}$ είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα με αρχή το (0,0) και πέρας τυχαίο σημείο της ℓ^*)

$A(\ell^*) = A(\ell+\vec{v}) = A\ell + A\vec{v}$ (γραμμικότητα)

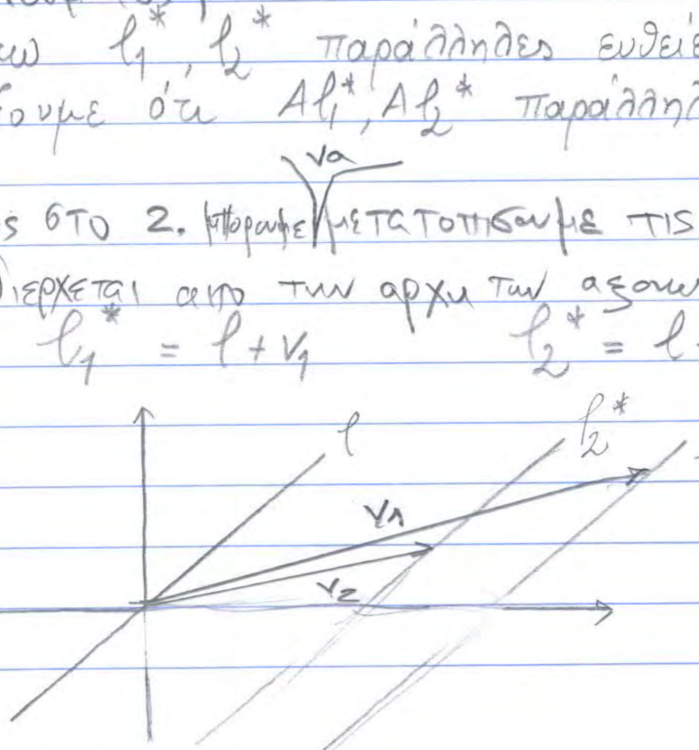
από 1.

$A\ell$ είναι ευθεία $\Rightarrow$ $A\ell^*$ είναι ευθεία παράλληλη στην $A\ell$. (διότι είναι μετατόπιση ευθείας μέσω φιξαρισμένου διανύσματος)

3. Έστω ℓ_1^*, ℓ_2^* παράλληλες ευθείες στο x-y, θα δείξουμε ότι $A\ell_1^*, A\ell_2^*$ παράλληλες.

Όπως στο 2. μπορούμε να μετατοπίσουμε τις ℓ_1^*, ℓ_2^* στην ίδια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων (την μοναδική παράλληλη που διέρχεται από το (0,0))

$\ell_1^* = \ell + v_1$ $\ell_2^* = \ell + v_2$



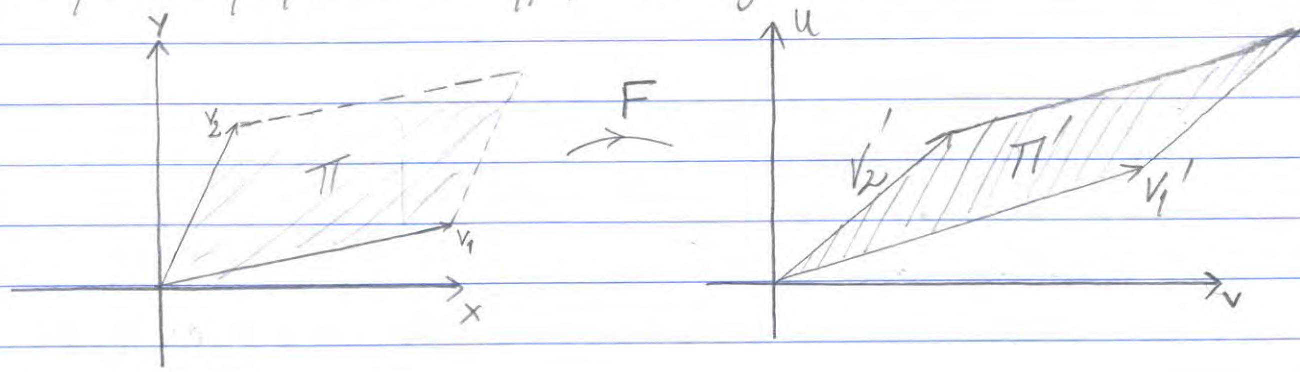
(v_1, v_2 όχι αναγκαστικά παράλληλα)

$$\left.\begin{array}{l} Al_1^* = Al + Av_1 \\ Al_2^* = Al + Av_2 \end{array}\right\} \Rightarrow Al_1^* = Al + Av_1 = Al + A\cancel{v_2} - \cancel{Av_2} + Av_1$$
$$= Al_2^* + A(v_1 - v_2)$$

αρα η Al_1^* ειναι μετατοπιση κατα $A(v_1-v_2)$ της Al_2^*, αρα παραλλ.

4. Απο 3 προκύπτει ότι Π' είναι παραλληλόγραμμο
$$\Pi' = F(\Pi) = A\Pi$$

Θα αποδείξουμε την (1) αρχικά για παραλληλόγραμμο Π με μια κορυφή στην αρχή των αξόνων.



Έστω $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ που παράγουν το Π
-//- $\vec{v_1}', \vec{v_2}'$ -//- Π'

Εμβαδον $(\Pi) = \| \vec{v_1} \times \vec{v_2} \|$

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix} \qquad v_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$$

$$v_i' = \begin{pmatrix} a_i' \\ \beta_i' \end{pmatrix}$$

$$= \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Ομοίως

$$v_1' \times v_2' = \vec{k} \begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{vmatrix}$$ και έχουμε,

$$(2) \quad \begin{pmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

(διότι $\vec{v}_1' = Av_1$, $\vec{v}_2' = Av_2$)

$$(2) \Rightarrow \det \begin{pmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Έχουμε λοιπόν,

$$(3) \quad \frac{\text{Εμβαδόν } (\Pi')}{\text{Εμβαδόν } (\Pi)} = \frac{\| v_1' \times v_2' \|}{\| v_1 \times v_2 \|} = \left| \frac{\begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \right|$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right|$$

Τέλος θα θεωρήσουμε αυθαίρετο Π^*, όχι αναγκαστικά με κορυφή την αρχή των αξόνων.

$\Pi^* = \Pi + \vec{v}$ (μεταφορά κατα $\vec{v}$ όπως στην 2)

και έστω $(\Pi^*)'$ η εικόνα του Π^* κάτω από τον F, Π με κορυφή την αρχή των αξόνων

$$(\Pi^*)' = A\Pi^*$$
$$= A\Pi + A\vec{v}$$

$$\frac{\text{Εμβαδόν }(\Pi^*)'}{\text{Εμβαδόν }(\Pi^*)} = \frac{\text{Εμβαδόν }(A\Pi + A\vec{v})}{\text{Εμβαδόν }(\Pi + \vec{v})} = \frac{\text{Εμβαδόν }(A\Pi)}{\text{Εμβαδόν }(\Pi)}$$

$$= |\det A|$$

Η απόδειξη είναι πλήρης

$\square$

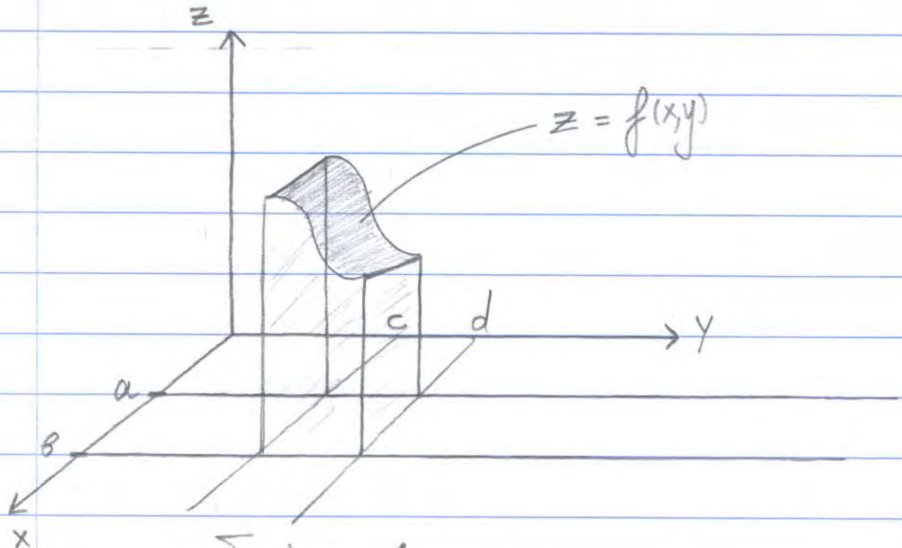
Πακέτο σημειώσεων 5 / Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

I. Διπλό Ολοκλήρωμα.

$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) \geq 0$, f συνεχής

$R = [a,b] \times [c,d]$



Σχήμα 1

Στερεό V κάτω από το γράφημα και φραγμένο από τα επίπεδα $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$.

Ο όγκος του εν λόγω στερεού συμβολίζεται με

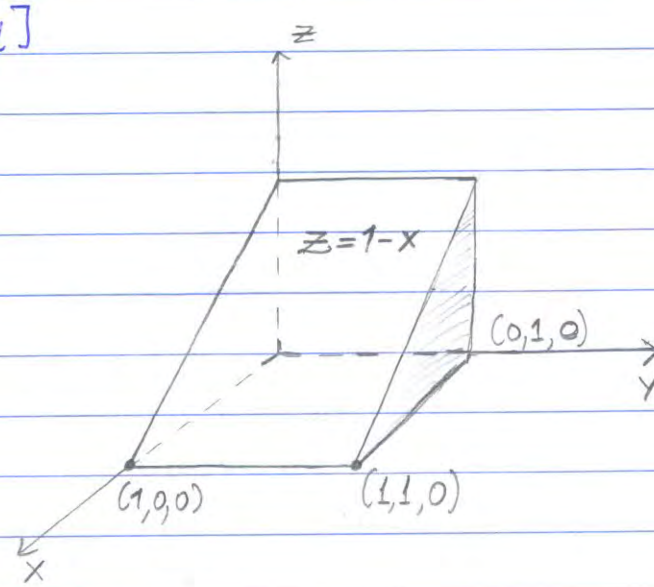
$$\iint_R f(x,y)\, dA \quad \text{ή} \quad \iint_R f(x,y)\, dx\, dy.$$

1) $f(x,y) = k$

$$\iint_R f(x,y)\, dA = k\,(b-a)(d-c)$$

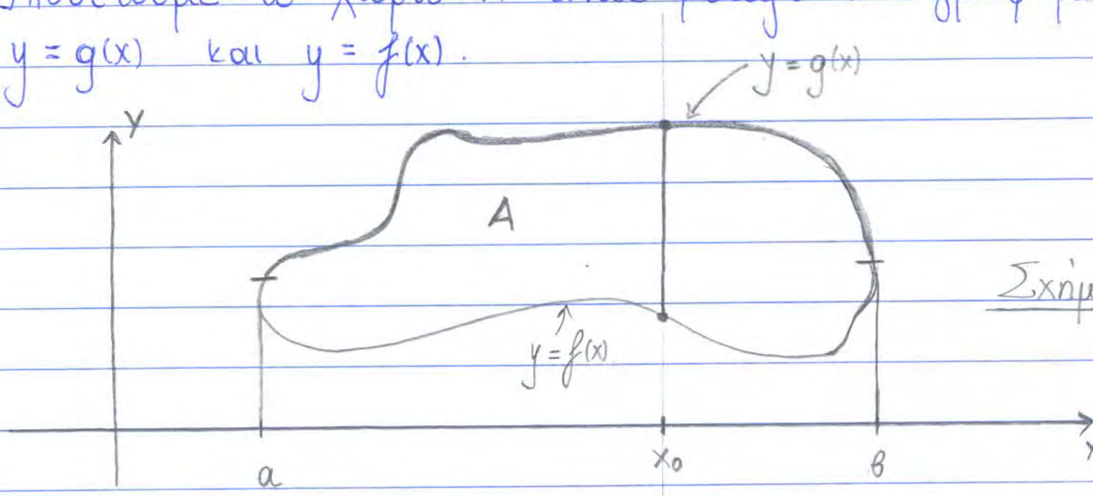
2) $f(x,y) = 1-x \quad , \quad R = [0,1] \times [0,1]$

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \frac{1}{2}$$



Υπολογισμός Όγκων - Αρχή Cavalieri

1. Ξεκινάμε με εμβαδά στο επίπεδο και μια διαφορετική άποψη ενός γνωστού αποτελέσματος.
Υποθέτουμε το χωρίο A είναι μεταξύ δυο γραφημάτων $y = g(x)$ και $y = f(x)$.



Σχήμα 2.

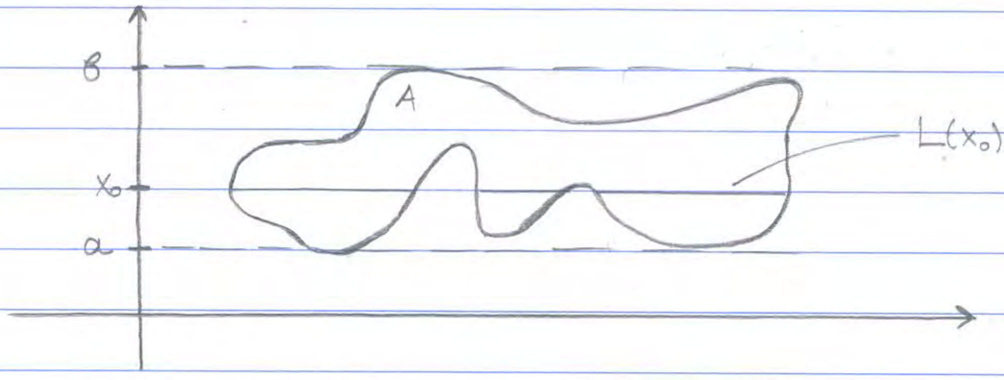
Δοθέντος $x_0 \in (a, \beta)$, έστω $L(x_0)$ το μήκος της τομής του A με την ευθεία $x = x_0$.

Θεώρημα: $E := \text{Εμβαδόν}(A) = \int_a^\beta L(x)\, dx$

Απόδειξη: $E = \int_a^\beta (g(x) - f(x))\, dx$ (ως γνωστόν)

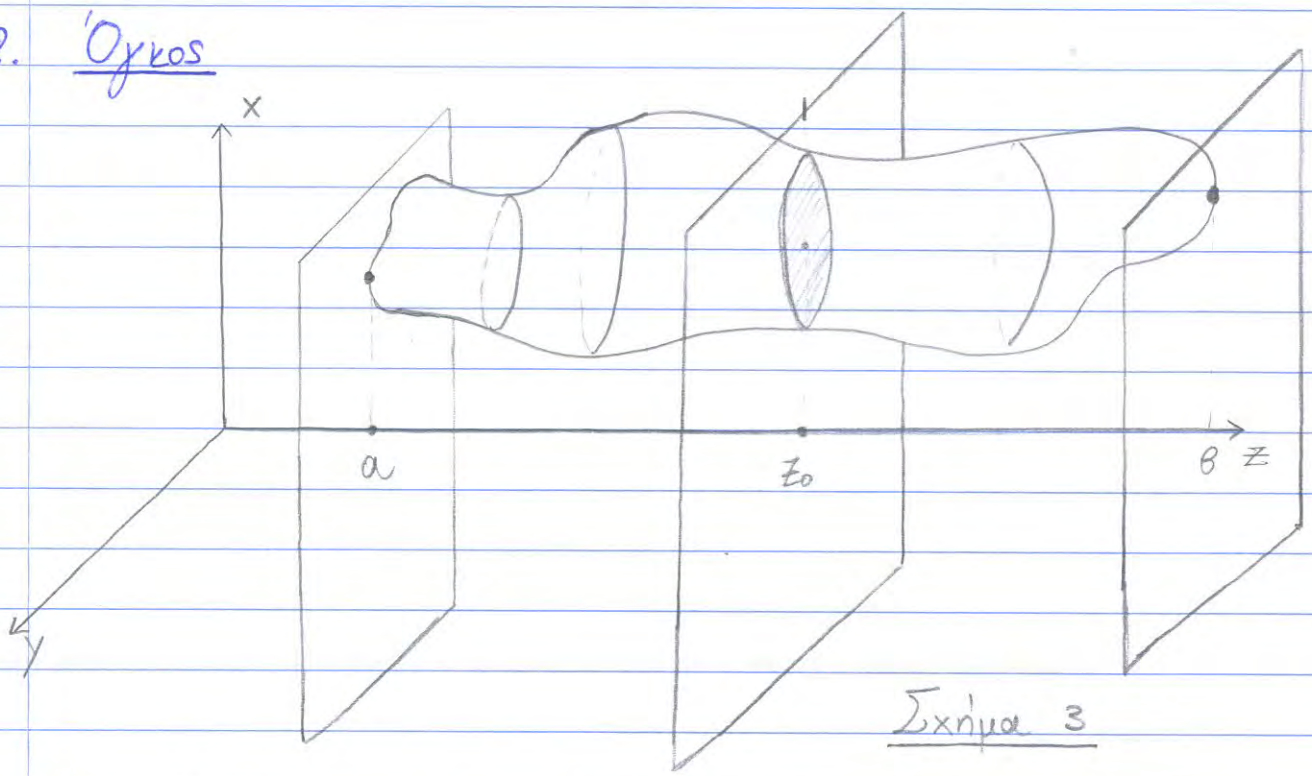
$$= \int_a^\beta L(x)\, dx. \qquad \square$$

Σχόλιο: Ισχύει γενικότερα



$$\text{Εμβαδόν}(A) = \int_a^b L(x)\,dx.$$

2. Όγκος

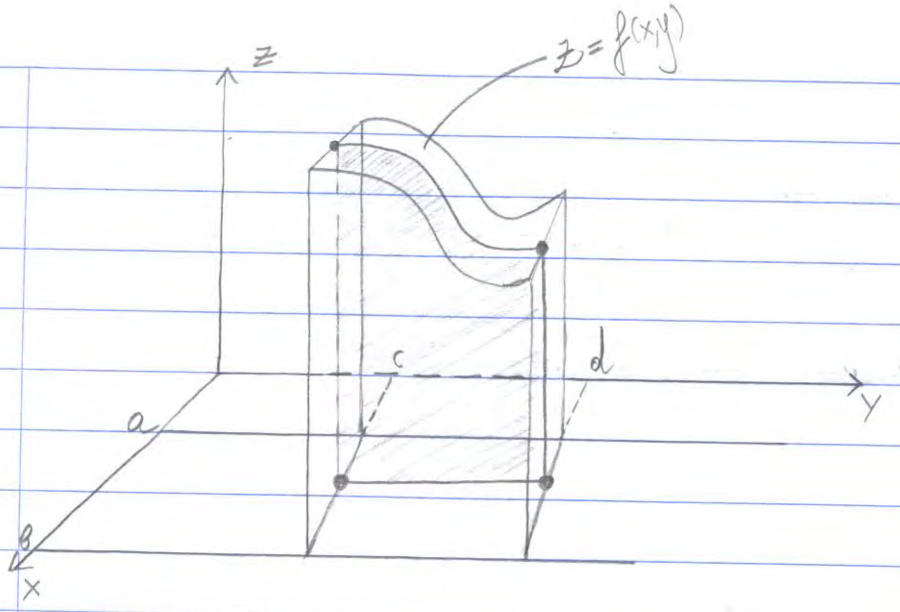


Σχήμα 3

Θεωρούμε το εμβαδό $A(z_0)$ της τομής του επιπέδου $z = z_0$ με το στερεό V.

$$(1) \quad \text{Όγκος}(V) = \int_a^b A(z)\,dz$$

Θα δεχτούμε την (1) προς το παρόν, και θα υπολογίσουμε κάποιους όγκους.



Τομή V με επίπεδο $x = x_0$.

(2) $$V = \iint_R f(x,y)\, dA = \int_a^\beta A(x)\, dx.$$

Έχουμε κατα τα γνωστά για το εμβαδόν κάτω από το γράφημα $y \to f(x_0, y)$

(3) $$A(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)\, dy ,$$

κατα συνέπεια (2), (3) $\Rightarrow$

(4) $$V = \int_a^\beta \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx .$$ (διαδοχικό ολοκλήρωμα).

Παρόμοια θεωρόντας τομές με επίπεδα $y = y_0$ καταλήγουμε στην εκφραση:

(5) $$V = \int_c^d \left(\int_a^\beta f(x,y)\, dx \right) dy .$$ (διαδοχικό ολοκλήρωμα)

Η αυστηρή απόδειξη των (4),(5) που δίνει

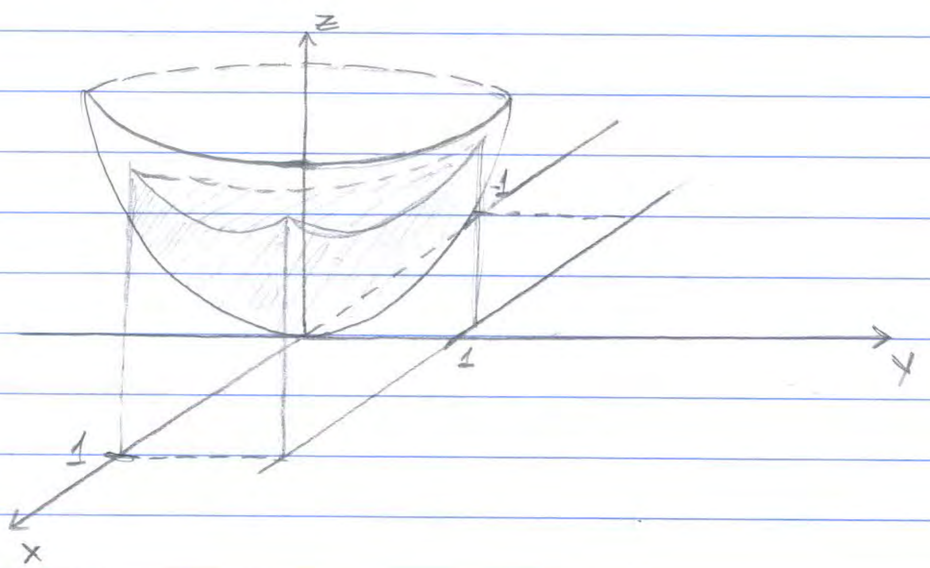
$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy \quad (6)$$

δίνει το θεώρημα του Fubini.

Παραδείγματα:

1. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_R (x^2+y^2)\,dA$

$R=[-1,1]\times[0,1]$



Λύση:

$$\iint_R (x^2+y^2)\,dA = \int_0^1\left(\int_{-1}^1 (x^2+y^2)\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{x=-1}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}+2y^2\right)dy$$

$$= \frac{4}{3}$$

$\square$

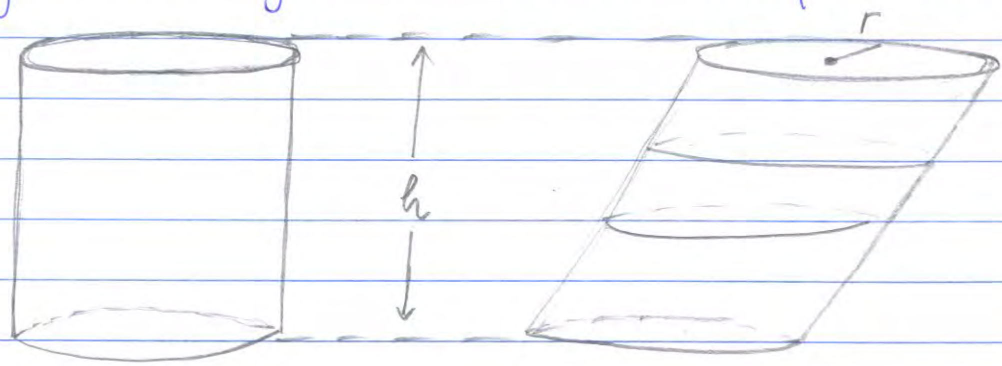
2. Υπολογίστε το $\iint_S \cos x \sin y \, dA$, $S = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

Λύση

$$\iint_S \cos x \sin y \, dA = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \cos x \sin y \, dx \right) dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin y \, dy = 1 \qquad \square$$

3. Δείξτε ότι οι όγκοι των κάτωθι κυλίνδρων είναι ίσοι.

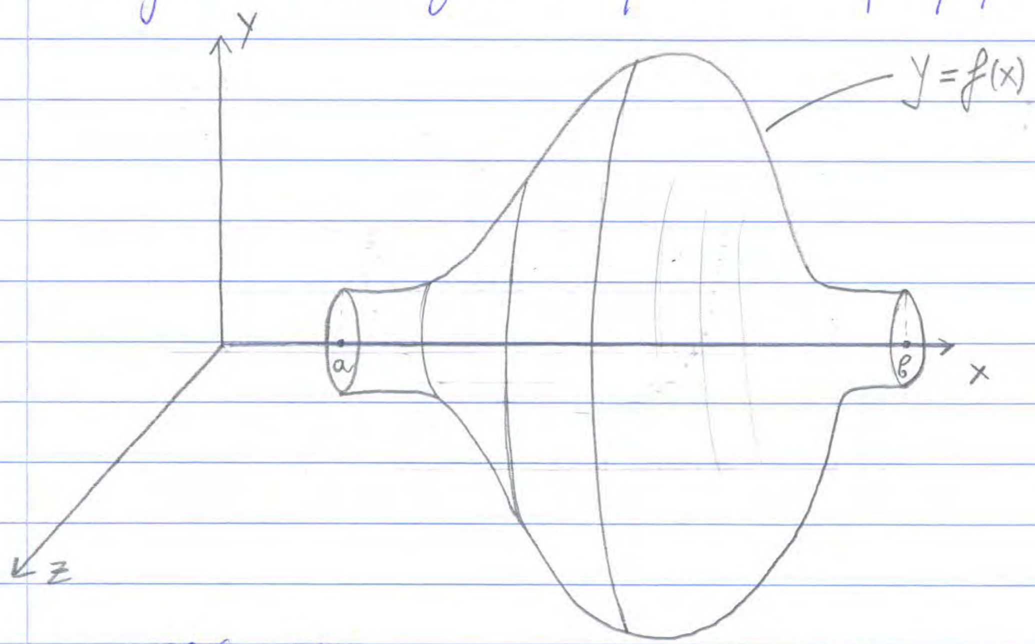


Απόδειξη:

Ο όγκος του ορθού κυλίνδρου είναι $\pi r^2 h$.
Ο όγκος του κεκλιμένου.

$$\int_0^h A(z) \, dz = \int_0^h \pi r^2 \, dz = \pi r^2 \cdot h . \qquad \square$$

4. Δείξτε ότι ο όγκος στερεών εκ περιστροφής δίνεται από:



$$\pi \int_a^\beta \left(f(x)\right)^2 dx.$$

Απόδειξη:

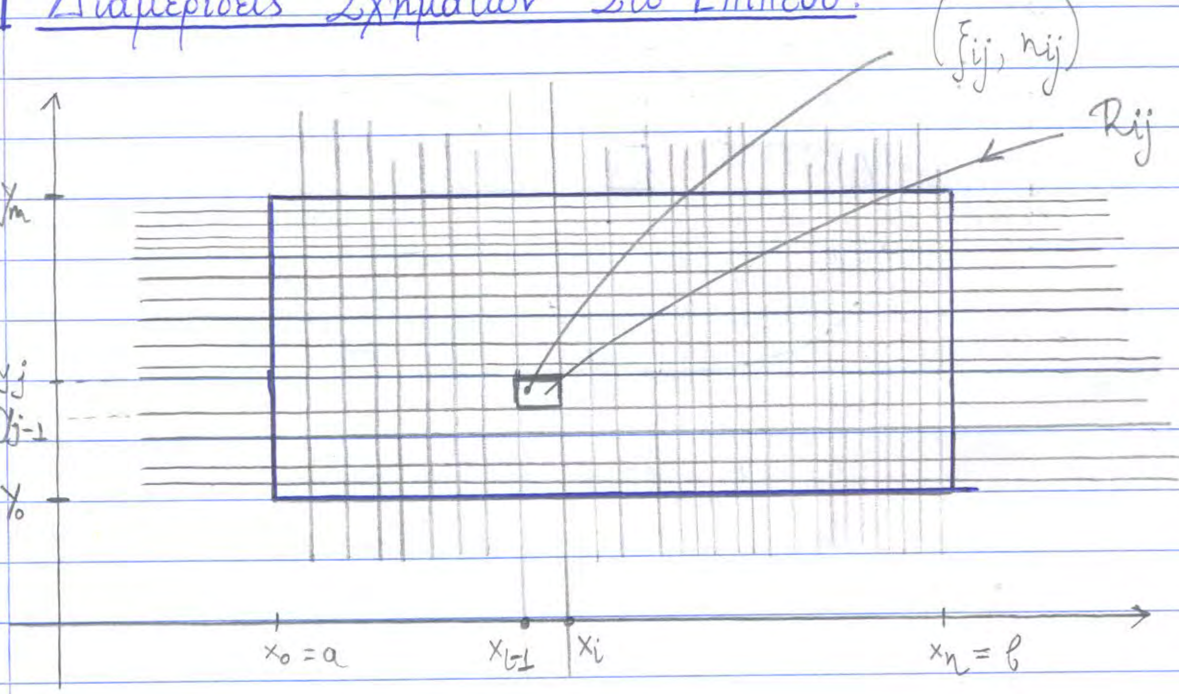
Διατομή με επίπεδο $x = x_0$:

$$A(x_0) = \pi \left(f(x)\right)^2 dx.$$

$$\text{Όγκος} = \int_a^\beta \pi \left(f(x)\right)^2 dx$$

ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ RIEMANN

1. Διαμερίσεις Σχημάτων Στο Επίπεδο.



$$R_{ij} : \quad x_{i-1} \le x \le x_i \quad , \quad y_{j-1} \le y \le y_j$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d.$$

Αθροίσματα Riemann.

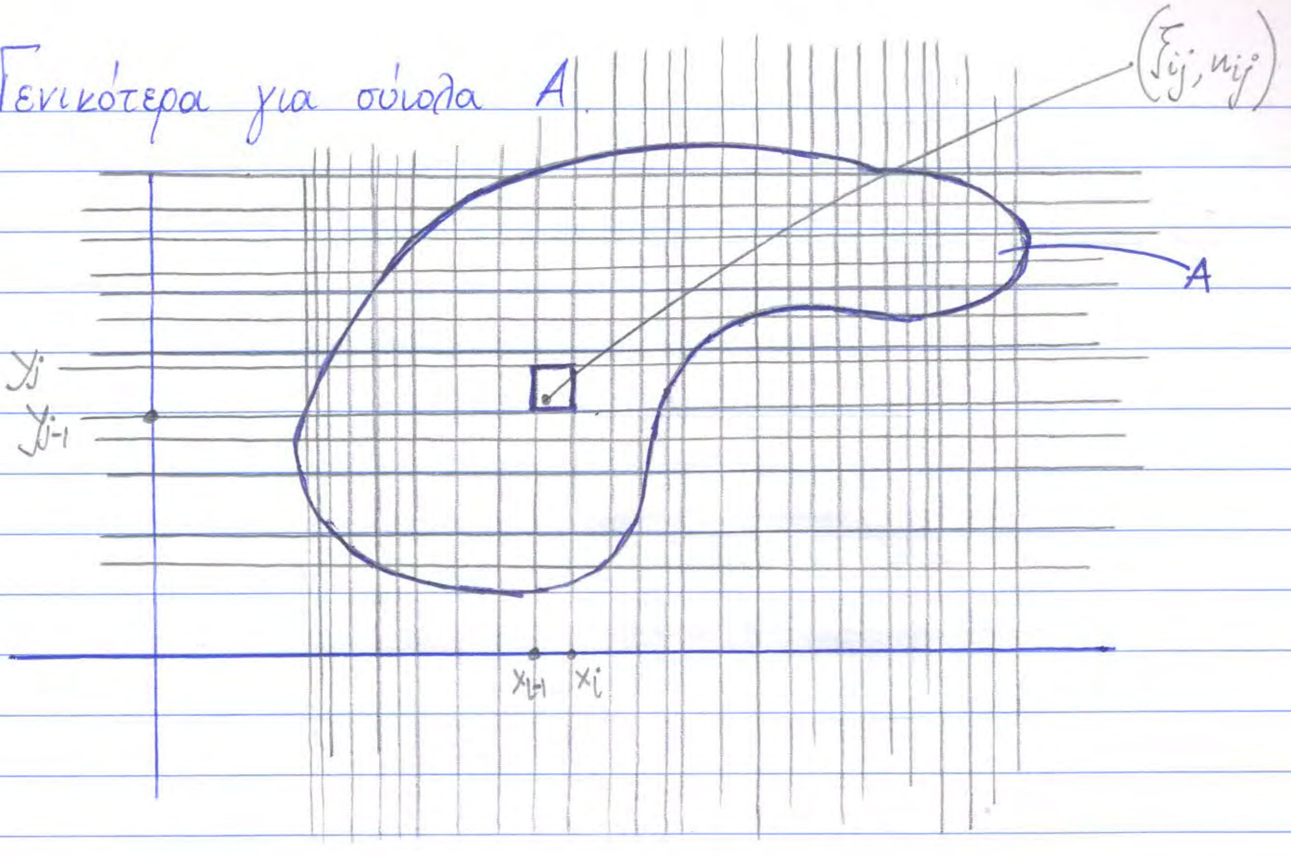
$$\sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Εάν το όριο υπάρχει

$$L = \lim \Sigma f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

όπως η διαμέριση γίνεται λεπτότερη και λεπτότερη τότε καλείται ως $\iint_R f(x,y)\,dA$.

Γενικότερα για σύνολα A.



Τα σύνολα A δεν είναι τελείως αυθαίρετα.
Λέγονται μετρήσιμα. Δεν τα μελετάμε αυστηρά εδώ.

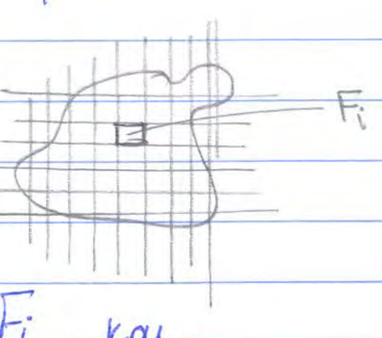
Διαμέριση του A, $F_1, \dots, F_n$ σημαίνει

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} F_i \quad , \quad F_i \cap F_j = \emptyset \quad , i \neq j.$$

$\boxed{2}$ Όγκος

$f(x,y)$ φραγμένη, A μετρήσιμο, $F_1, \dots, F_n$ διαμέριση του A.
(F_i μετρήσιμα). Στα προηγούμενα σχήματα:

Θεωρούμε τα αθροίσματα



(1) $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) A_i$

όπου (ξ_i, η_i) αυθαίρετο σημείο στο F_i, και
A_i το εμβαδόν του F_i.

Ορισμός: Η διάμετρος του σχήματος F είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων του F.

Ορισμός: Το εύρος ή νόρμα της διαμέρισης $F_1, \dots, F_n$ είναι η μέγιστη διάμετρος των $F_1, \dots, F_n$.

Ορισμός: Τα αθροίσματα (1) τείνουν στο όριο L εάν

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε

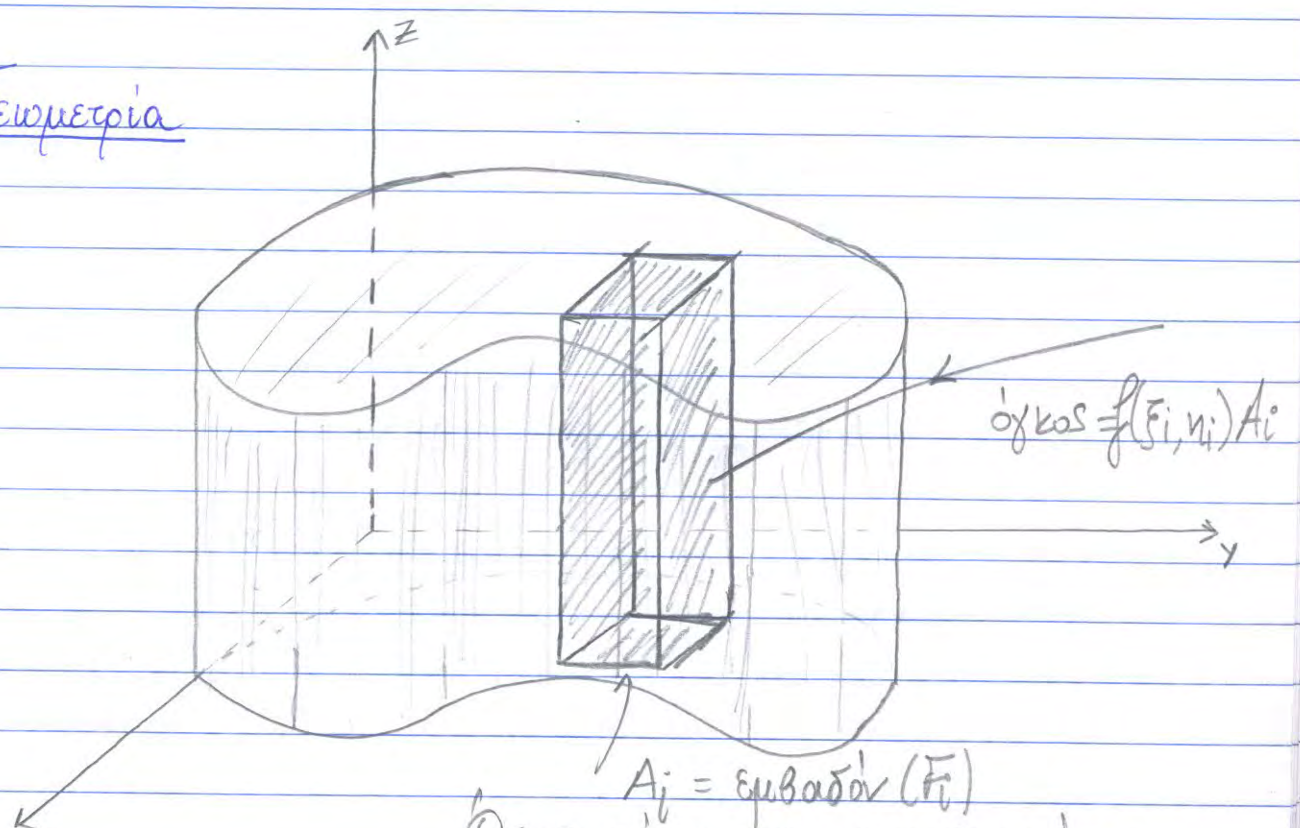
$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, n_i) A_i - L \right| < \varepsilon$$

$\forall$ διαμέριση με νόρμα μικρότερη του δ.

Ορισμός: Το όριο L συμβολίζεται με

$$\iint_A f(x,y)\, dA$$

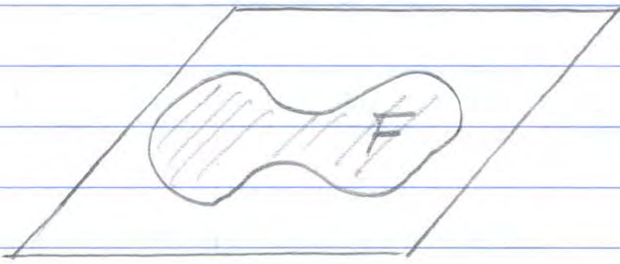
Γεωμετρία



Όγκος κάτω από την επιφάνεια.

Φυσική.

F αντιπροσωπεύει μια λεπτή πλάκα σταθερής πυκνότητας c, τότε η M = μάζα της $F = cA$, A = εμβαδόν της F.



Εάν η πυκνότητα είναι μεταβλητή τότε $M = \iint_A f(x,y)\, dA$.

$\boxed{3.}$ Θεώρημα 1. (Ιδιότητες)

1. Εάν η f είναι ολοκληρώσιμη στο A, και $f \geq 0 \Rightarrow \iint_A f\, dA \geq 0$
2. Εάν f, g ολοκληρώσιμες στο A, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda f + \mu g$ ολοκληρώσιμη και ισχύει

$$\iint_A (\lambda f + \mu g)\, dA = \lambda \iint_A f\, dA + \mu \iint_A g\, dA.$$

3. Εάν $F_1, \dots, F_n$ διαμέριση του A, f ολοκληρώσιμη στο A τότε η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε F_i και

$$\iint_A f\, dA = \sum_{i=1}^{n} \iint_{A_i} f\, dA.$$

4. Η συνάρτηση $\mathbb{1}_A(x,y) = 1$, $(x,y) \in A$, είναι ολοκληρώσιμη στο A και

$$\iint_A \mathbb{1}\, dA = \text{Εμβαδόν}(A)$$

Απόδειξη:

Οι 1 και 2, προκύπτουν από τις αντίστοιχες ιδιότητες των αθροισμάτων Riemann (1), που κληρονομούνται και από το όριο. Για την 3 παρατηρούμε ότι εάν διαμερίσουμε το κάθε $F_1, \dots, F_n$, τότε η ένωση αυτών των διαμερίσεων αποτελεί διαμέριση για το A. Κάνοντας χρήση τέτοιων διαμερίσεων εξάγουμε την 3. Τέλος η 4 προκύπτει άμεσα από τα αθροίσματα Riemann

$\square$

Το επόμενο Θεώρημα είναι ιδιαίτερα σημαντικό διότι δείχνει ότι οι ιδιότητες 1, 2, 3, 4 χαρακτηρίζουν το $\iint\limits_A f\, dA$.

Θεώρημα 2: Έστω σε κάθε A μετρήσιμο, και σε κάθε f ολοκληρώσιμη στο A ορίζεται ο πραγματικός αριθμός $I_A(f)$ ο οποίος έχει τις εξής ιδιότητες:

1. Εάν $f \geq 0$ στο $A \Rightarrow I_A(f) \geq 0$

2. $I_A(\lambda f + \mu g) = \lambda I_A(f) + \mu I_A(g) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

3. Εάν $F_1, \dots, F_n$ διαμέριση του A, τότε

$$I_A(f) = I_{F_1}(f) + \dots + I_{F_n}(f)$$

4. $I_A(1) =$ Εμβαδόν A

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(2) $f \geq g$ στο $A \Rightarrow I_A(f) \geq I_A(g)$

και $\forall$ A μετρήσιμο, f ολοκληρώσιμη

(3) $I_A(f) = \iint\limits_A f\, dA$.

Απόδειξη:

(2): Θέτουμε $\lambda=1$, $\mu=-1$. οπότε η ιδιότητα 2 δίνει $I_A(f-g) = I_A(f) - I_A(g)$. Τώρα $f \geq g \Leftrightarrow f-g \geq 0$, άρα ιδιότητα $I_A(f-g) \geq 0 \Rightarrow I_A(f) \geq I_A(g)$.

(3): Έστω $F_1, \dots, F_n$ διαμέριση του A, A_i = εμβαδόν (F_i)

⊛ $\left.\begin{array}{l} M_i = \text{μέγιστο} \\ m_i = \text{ελάχιστο} \end{array}\right\}$ της f στο F_i, $i=1,\dots,n$

⊛ Το επιχείρημα είναι αυστηρό για f συνεχή, και $F_1, \dots, F_n$ κλειστά-φραγμένα σύνολα.

(4) Τότε $m_i \leq f \leq M_i$ στο F_i

Απο την (4)

$m_i A_i = m_i I_{F_i}(1)$

Από την (2)

$m_i I_{F_i}(1) = I_{F_i}(m_i)$

Από την (2) και την (4)

$$I_{F_i}(m_i) \leq I_{F_i}(f) \leq I_{F_i}(M_i)$$

και ομοίως μέσω των (2), (4)

$$I_{F_i}(M_i) = M_i I_{F_i}(1) = M_i A_i$$

Κατα συνέπεια

$$m_i A_i \leq I_{F_i}(f) \leq M_i A_i$$

και αθροίζοντας

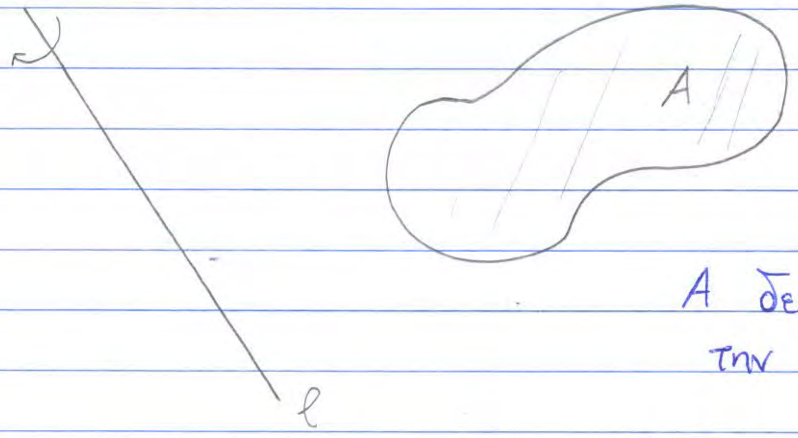
$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i A_i \leq I_F(f) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i A_i$$

Εφόσον τα m_i και M_i αντιστοιχούν σε τιμές της f σε σημεία του F_i, και οι δυο πλευρές της (5) αντιστοιχούν σε αθροίσματα Riemann. Από την υπόθεση η f είναι ολοκληρώσιμη.
Κατά συνέπεια τα αθροίσματα τείνουν στο

$$\iint_A f\, dA$$, και έτσι προκύπτει η (3).

□

4. Το Θεώρημα του Πάππου



A δεν τέμνεται από την ℓ.

A περιστρέφεται περι την ℓ. Τότε ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής δίνεται από:

$$\text{Όγκος} = (2\pi R)\, \text{Εμβαδόν}(A)$$

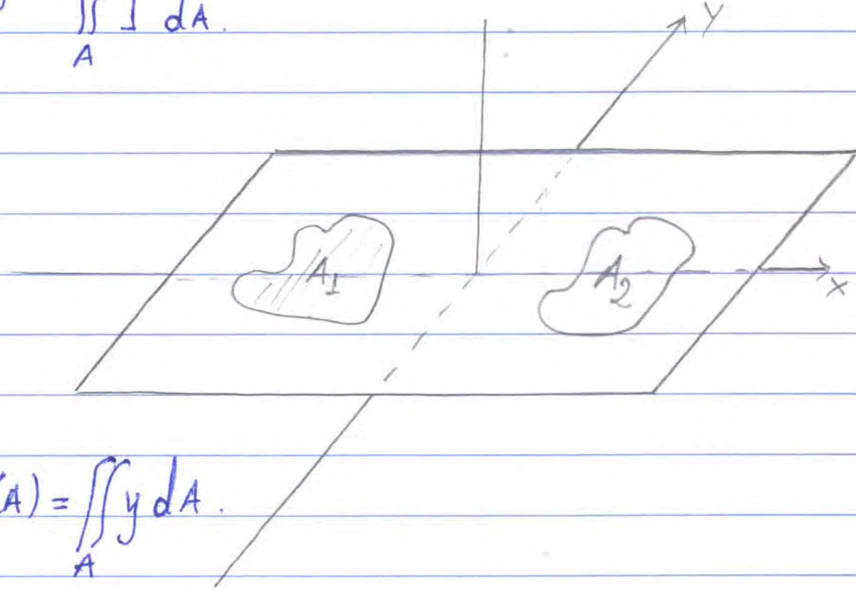
όπου R η απόσταση απο το κέντρο μάζας του A.

Ορισμός : (κέντρο μάζας)

$$\bar{x} = \frac{\iint_A x\,dA}{\iint_A 1\,dA} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\iint_A y\,dA}{\iint_A 1\,dA}.$$

Ορισμός : (Ροπές)

Δοθέντος A, οι ροπές ορίζονται :

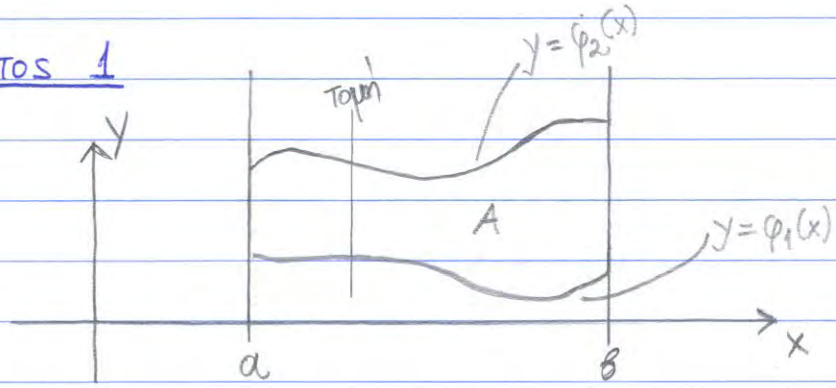


$$M_x(A) = \iint_A x\,dA \qquad M_y(A) = \iint_A y\,dA.$$

Φυσική ερμηνεία : Στο σχήμα, στην πλάστιγγα υποστηριζόμενη κατα μήκος του άξονα y, το σχήμα που θα βαρύνει και θα την στρέψει προς τα κάτω είναι αυτό με την μεγαλύτερη M_x ροπή.

$\boxed{5}$ Διπλό Ολοκλήρωμα Για Πιο Γενικά A.

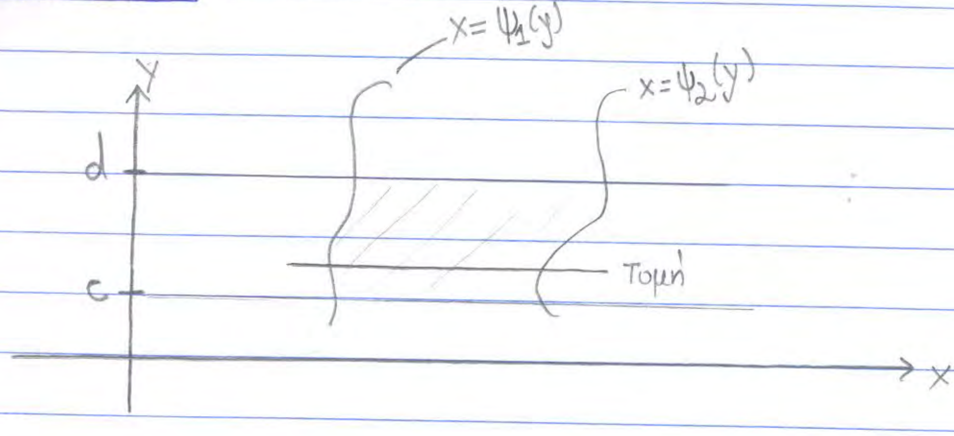
Τύπος 1



$$A = \{(x,y) \mid \alpha \le x \le \beta \;,\; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

$$\iint_A f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Τύπος 2



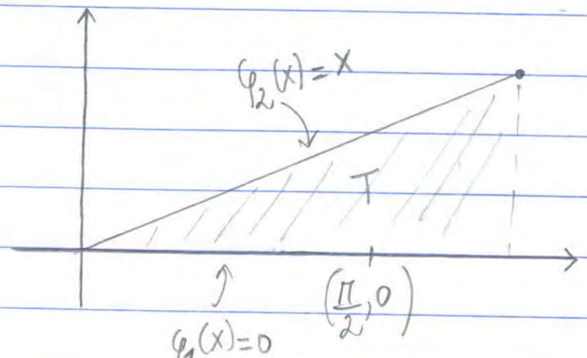
$$A = \{(x,y) \mid c \leq y \leq d \ , \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

$$\iint_A f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Παραδείγματα

1). Υπολογίστε το $I = \iint_T (x^2 y + \cos x)\,dA$.

$T = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \ , \ 0 \leq y \leq x\}.$



$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^x (x^2 y + \cos x)\,dy\right) dx = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^x x^2 y\,dy + \int_0^x \cos x\,dy\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x + \cos x \left[y\right]_0^x \right) dx = \int_0^{\pi/2} x^2 \frac{x^2}{2} + x\cos x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{x^4}{2} dx + \int_0^{\pi/2} x\cos x \, dx$$

- $\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x^4 \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \frac{\pi^5/32}{5} = \frac{\pi^5}{10 \cdot 32}$

- $\int_0^{\pi/2} x\cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} x \, (\sin x)' \, dx = \left[x\sin x\right]_0^{\pi/2} - \int \overset{1}{\cancel{(x)'}} \sin x \, dx$

$$= \left[x\sin x\right]_0^{\pi/2} + \left[\cos x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + 1$$

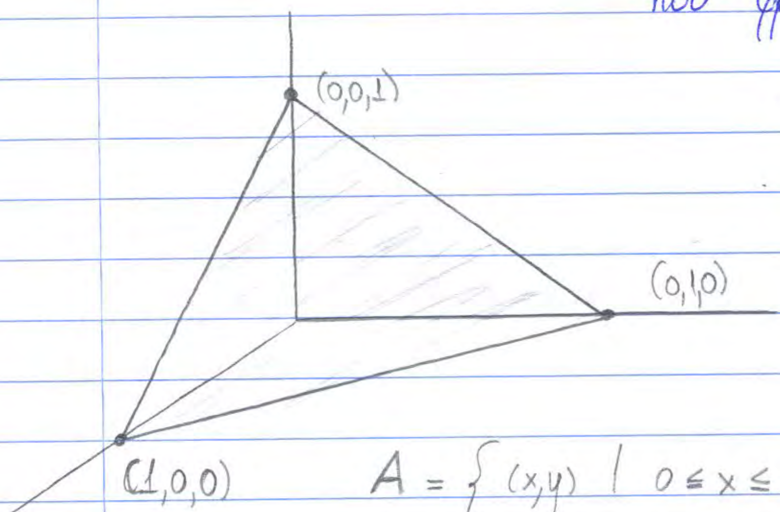
Άρα $I = \frac{\pi^5}{(10)\cdot(32)} + \frac{\pi}{2} + 1$.

2). Βρείτε τον όγκο V του τετραέδρου στο σχήμα που φράσσεται από τα επίπεδα

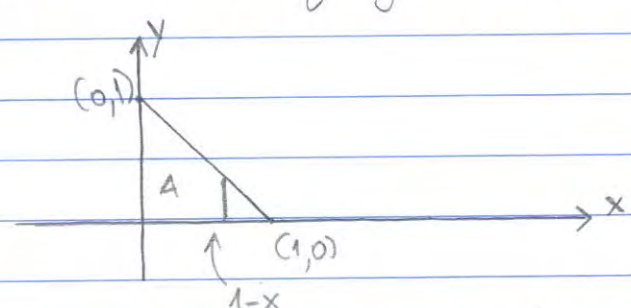
$y=0$, $z=0$, $x=0$

και

$y+x+z=1$.



$A = \{ (x,y) \mid 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1-x \}$



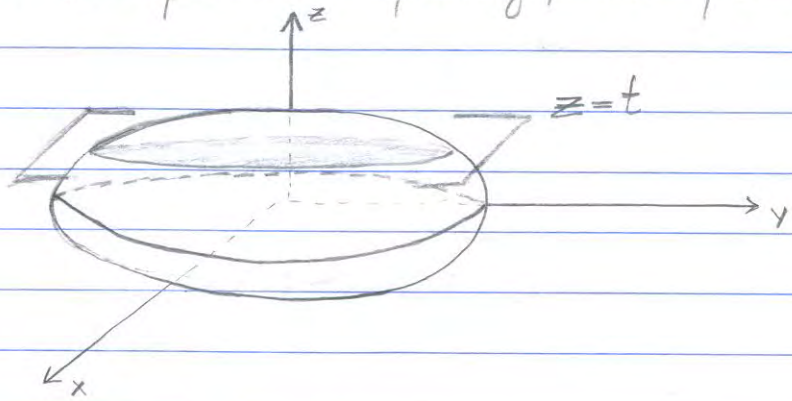
$$V = \iint_A \left[1-(x+y)\right] dA = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[1-(x+y)\right] dy \right) dx$$

$\square$

Υποδείξεις για τις ασκήσεις 4-5-6-7

Άσκηση 4.

Θα λύσουμε την παραλλαγή της με διατομές $z = t$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{t^2}{c^2} = 1 \quad \text{(Τομή)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 - \frac{t^2}{c^2}$$

Έλλειψη: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$, Εμβαδόν $= \pi \cdot A \cdot B$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{t^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{\beta^2\left(1 - \frac{t^2}{c^2}\right)} = 1$$

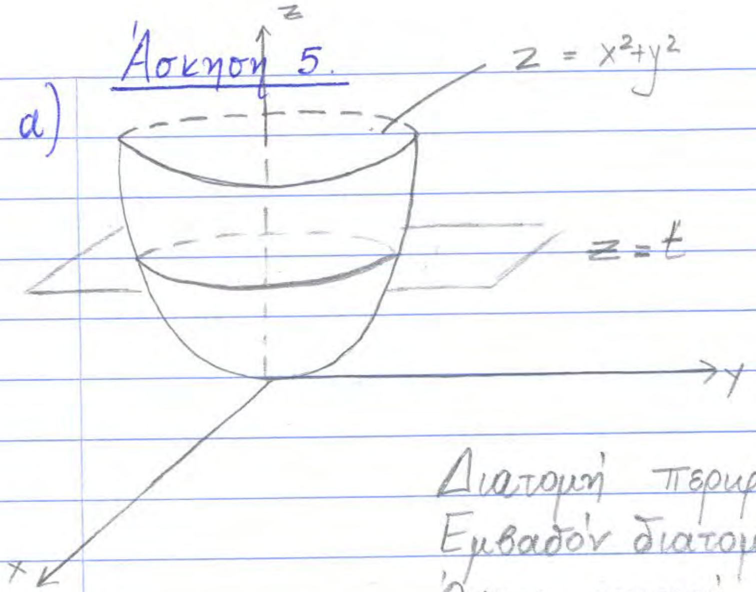
Εμβαδόν τομής: $\pi\, a \cdot \beta \left(1 - \frac{t^2}{c^2}\right)$

Όγκος $= 2\pi a\beta \int_0^c \left(1 - \frac{t^2}{c^2}\right) dt = \frac{4}{3}\pi a\beta c$

□

Άσκηση 5.

α)



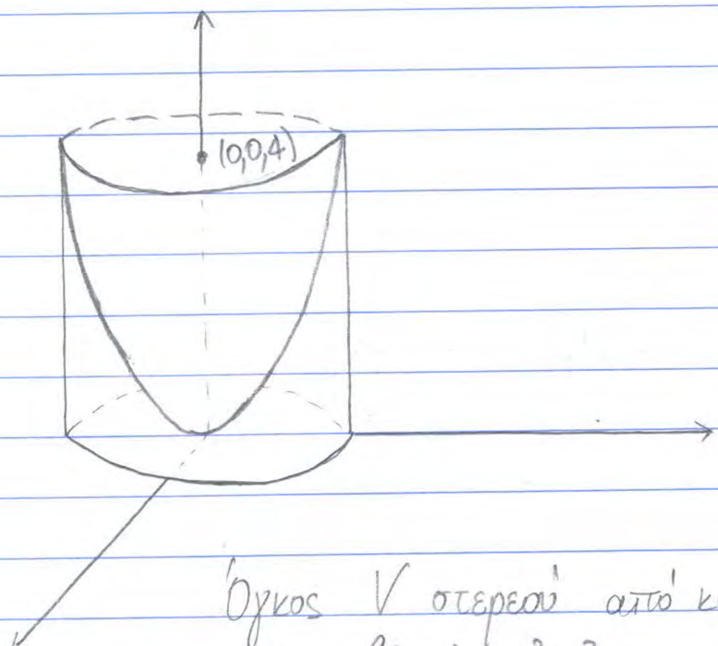
Διατομή περιφέρεια $x^2+y^2=t$

Εμβαδόν διατομής πt

Όγκος στερεού παραβολοειδούς , $0 \le t \le 4$

$$\int_0^4 (\pi t)\,dt = 8\pi$$

β)



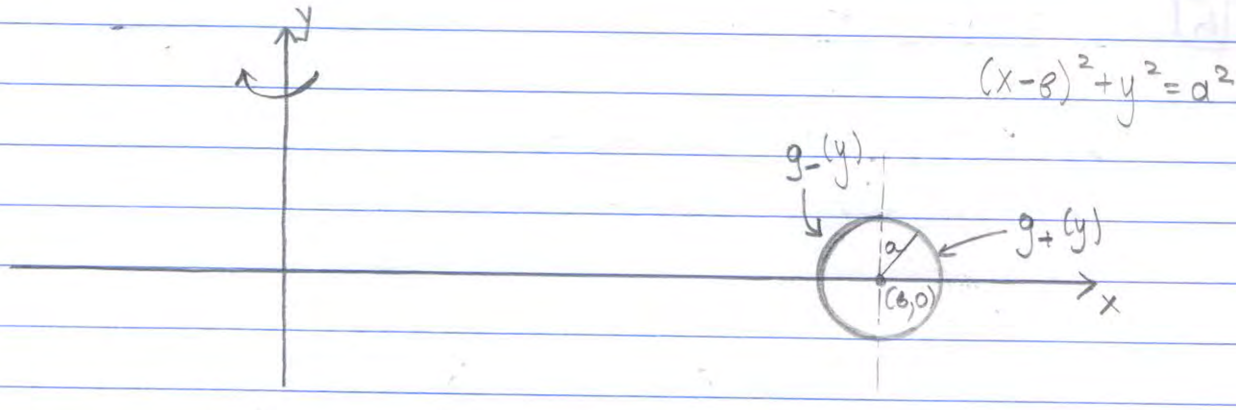
Όγκος V στερεού από κάτω από το $z=x^2+y^2$

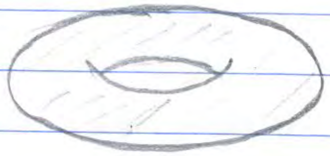
$z = f(x,y) = x^2+y^2$

$$V = \iint_A f(x,y)\,dA = \text{Όγκος κυλίνδρου} - 8\pi$$
$$= (\pi \cdot 2^2)\,4 - 8\pi = 8\pi.$$

□

Ασκηση 6β





$$V = \pi \int_{-a}^{a} \left(g_+(y)\right)^2 dy.$$

$$x = g_+(y) = \beta + \sqrt{a^2-y^2}$$

$$x = g_-(y) = \beta - \sqrt{a^2-y^2}$$

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \left([g_+(y)]^2 - [g_-(y)]^2 \right) dy$$

$$= 4\pi\beta \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\, dy = 4\pi\beta \frac{a^2\pi}{2} = (2\pi\beta)(a^2\pi)$$

• $$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\; a\cos\theta\, d\theta$$

$y = a\sin\theta$

$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

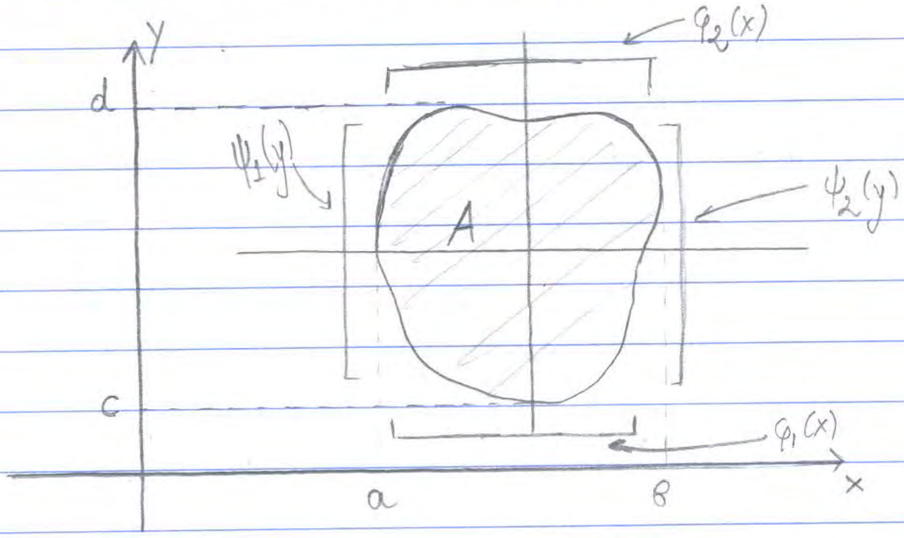
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} a\sqrt{1-\sin^2\theta}\; a\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} a^2\cos^2\theta\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} a^2\, \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{a^2\pi}{2}$$

6 Αλλαγή Της Διάταξης Στην Ολοκλήρωση.

Έστω A χωρίο που περιγράφεται και ως τύπου 1, αλλά και ως τύπου 2.



Τύπος 1.

$$A = \{ (x,y) \mid a \leq x \leq \beta ,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$$

$$\iint_A f\, dA = \int_a^{\beta} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Τύπος 2

$$A = \{ (x,y) \mid c \leq y \leq d ,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \}$$

$$\iint_A f\, dA = \int_c^{d} \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Παράδειγμα 1: Ολοκληρώστε αλλάζοντας την σειρά:

$$I=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{(a^2-x^2)}}\sqrt{a^2-y^2}\,dy\right)dx$$

Επεξήγηση (α) (Χωρίς σχήμα, δεν ενδείκνυται)

$$A=\{(x,y)\mid 0\le x\le a,\ 0\le y\le\sqrt{a^2-x^2}\}$$

Προκύπτει από την έκφραση τύπου I, το x μεταβλητή αναφοράς

Αλλαγή ρόλων x και y:

$$y=\sqrt{a^2-x^2}\iff x^2+y^2=a^2\iff x=\sqrt{a^2-y^2}\quad(\text{διότι } 0\le x\le a)$$

$$A=\{(x,y)\mid 0\le y\le a,\ 0\le x\le\sqrt{a^2-y^2}\}$$

Το y μεταβλητή αναφοράς

$$I=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{a^2-y^2}\,dx\right)dy$$

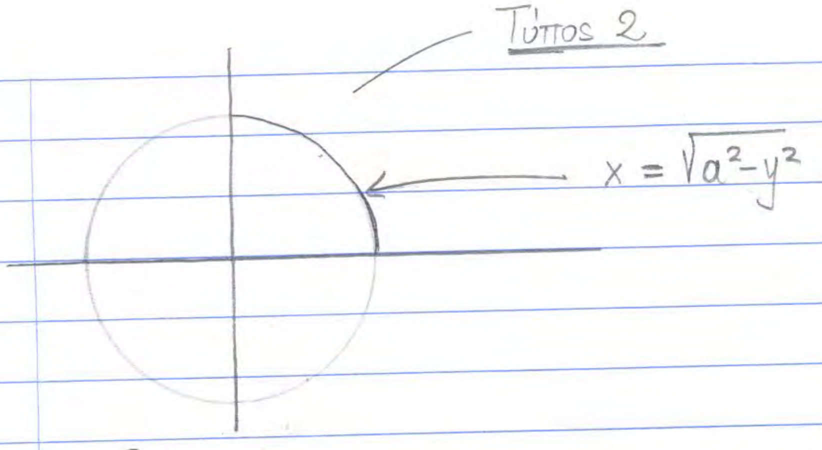
$$=\int_0^a(a^2-y^2)\,dy=\frac{2a^3}{3}.$$

Σημείωση: Αν δεν αλλάξουμε την διάταξη τότε χρειάζεται τριγωνομετρική αντικατάσταση.

Επεξήγηση (β) (μέσω σχήματος)

Διαβάζουμε $0\le x\le a$, $0\le y\le\sqrt{(a^2-x^2)}$

$$y=\sqrt{a^2-x^2}\iff x^2+y^2=a^2$$

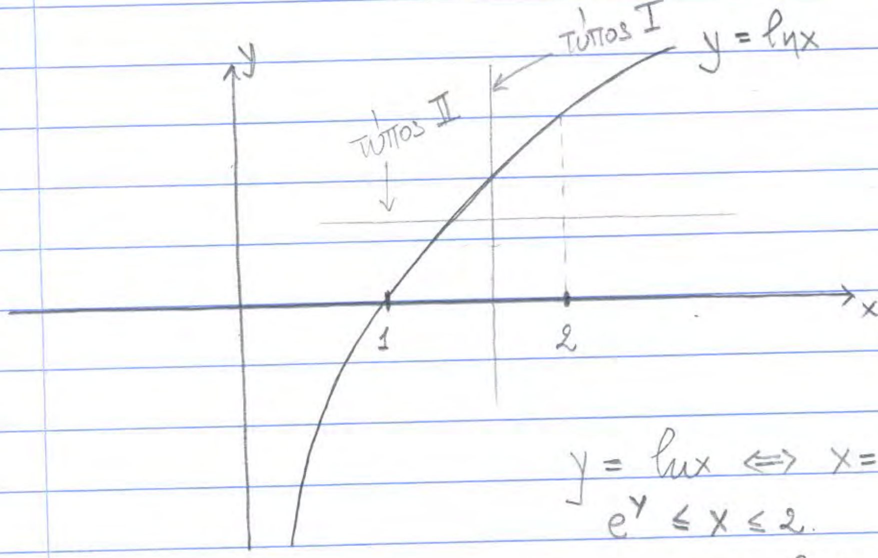


Σχήμα $\Rightarrow$ $0 \leq y \leq a$, $0 \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}$

Παράδειγμα 2

$$I = \int_1^2 \left(\int_0^{\ln x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\, dy \right) dx$$

$A = \{ (x,y) \mid 1 \leq x \leq 2 , \ 0 \leq y \leq \ln x \}$



$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$

$e^y \leq x \leq 2$

$0 \leq y \leq \ln 2$

$A = \{ (x,y) \mid 0 \leq y \leq \ln 2 , \ e^y \leq x \leq 2 \}$

$$I = \int_0^{\ln 2} \left(\int_{e^y}^{2} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left(\int_{e^y}^{2} (x-1)\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{e^y}^{2} dy$$

$$= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2y}} \,(-1)\left(\frac{e^{2y}}{2} - e^y\right) dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} e^{2y}\sqrt{1+e^{2y}}\, dy + \int_0^{\ln 2} e^y \sqrt{1+e^{2y}}\, dy.$$

$$= I_1 + I_2$$

- $I_1 = -\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} e^{2y}\sqrt{1+e^{2y}}\, dy = -\frac{1}{4}\int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2y}}\, d(1+e^{2y})$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1+e^{2y}}{\frac{3}{2}}\right)^{3/2}\Big|_0^{\ln 2} = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)\left[\left(1+2^2\right)^{3/2} - 2^{3/2}\right]$$

- $I_2 = \int_0^{\ln 2} e^y\sqrt{1+e^{2y}}\, dy$

Αόριστο ολοκλήρωμα: $u = e^y \Rightarrow du = e^y dy$.

$$\int e^y \sqrt{1+e^{2y}}\, dy = \int \sqrt{1+u^2}\, du$$

Τρόπος 1: $u = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$, $du = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$

$$\sqrt{1+u^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2 + 1}$$

$$\frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4}\left(t^2 + \frac{1}{t^2} - 2\right) + 1$$

$$= \frac{1}{4}\left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 2\right) = \frac{1}{4}\left(t + \frac{1}{t}\right)^2$$

$$\int \sqrt{1+u^2}\,du = \frac{1}{4}\int \left(t+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right) dt$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}+2\ln t-\frac{1}{2t^2}\right]$$

Βλ. Τσιτσας σ. 566 Εφαρμ. Απειρ.

Άρα $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^y\sqrt{1+e^{2y}}\,dy = \int_1^2 \sqrt{1+u^2}\,du$

$$= \frac{1}{2}\left[u\sqrt{1+u^2}+\ln\left(\sqrt{1+u^2}+u\right)\right]_1^2$$

Τρόπος 2.

$\displaystyle\int \sqrt{1+u^2}\,du \quad , \quad u=\tan\theta \qquad 1+u^2=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$$du = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta = \int \frac{d(\sin\theta)}{(1-\sin^2\theta)^2} = \int \frac{d\xi}{(1-\xi^2)^2}$$

$$\frac{1}{(1-\xi^2)^2} = \frac{1}{(1+\xi)^2(1-\xi)^2}$$

$$= \frac{A}{1+\xi}+\frac{B}{(1+\xi)^2}+\frac{\Gamma}{(1-\xi)}+\frac{\Delta}{(1-\xi)^2}$$

κλπ.

$\blacksquare$

Παράδειγμα 3.

Ορίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace για συναρτήσεις $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

εκθετικής κλάσης : $\exists$ σταθερά $M>0$, $c>0$ τέτοια ώστε

(1) $$|f(t)| \leq M e^{ct} \quad , \quad t \geq 0$$

ως εξής:

(2) $$f(t)(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

Ορίζουμε την συνέλιξη των συναρτήσεων f και g ως εξής:

(3) $$(f*g)(t) := \int_0^t f(t-\xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

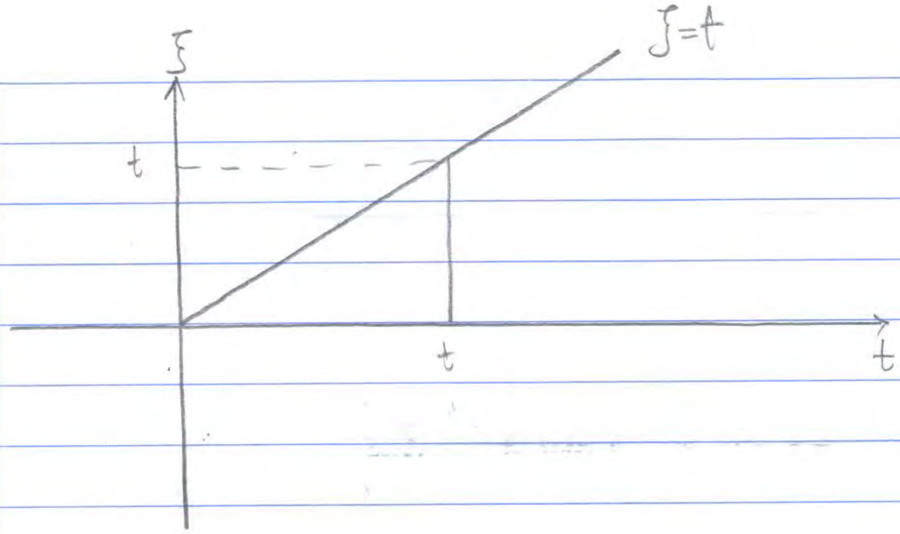
Θεώρημα:

(4) $$L(f*g)(s) = \big(L(f)(s)\big)\big(L(g)(s)\big)$$

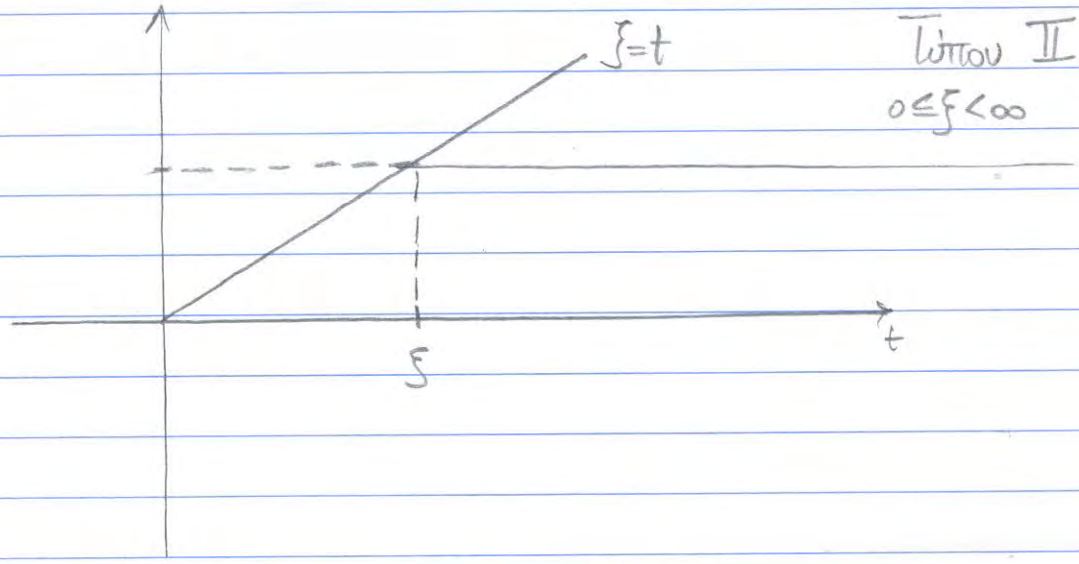
Απόδειξη:

$$L(f*g)(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(t-\xi)\, g(\xi)\, d\xi \right) dt$$

$$A = \{ (t,\xi) \mid 0 \leq t < \infty \ , \ 0 \leq \xi \leq t \}$$



Τύπου I.
$0 \le t < \infty \,,\; 0 \le \xi \le t.$



Τύπου II
$0 \le \xi < \infty \quad \xi \le t < \infty$

$$A = \{ (t,\xi) \mid 0 \le \xi < \infty \,,\; \xi \le t < \infty \}$$

$$L(f*g)(s) = \int_0^\infty \left(\int_\xi^\infty e^{-st} f(t-\xi) g(\xi)\, dt \right) d\xi$$

$$= \int_0^\infty g(\xi) \left(\int_\xi^\infty f(t-\xi)\, e^{-st}\, dt \right) d\xi$$

Αλλαγή Μεταβλητών : $u = t - \xi$ (στο εσωτερικό ολοκλήρωμα)

$$= \int_0^\infty g(\xi) \left(\int_0^\infty f(u)\, e^{-s(u+\xi)}\, du \right) d\xi$$

$$= \int_0^\infty g(\xi)\, e^{-s\xi} \left(\int_0^\infty f(u)\, e^{-su}\, du \right) d\xi$$

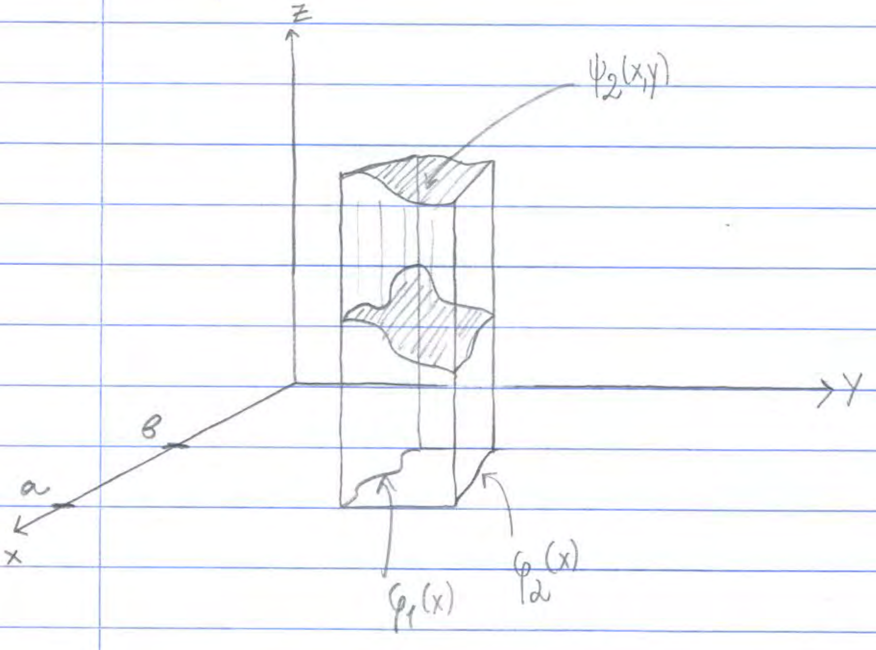
$$= \left(\int_0^\infty g(\xi)\, e^{-s\xi}\, d\xi \right) \left(\int_0^\infty f(u)\, e^{-su}\, du \right)$$

$$= \left(L(g)(s) \right) \cdot \left(L(f)(s) \right)$$

$\square$

Τριπλό Ολοκλήρωμα

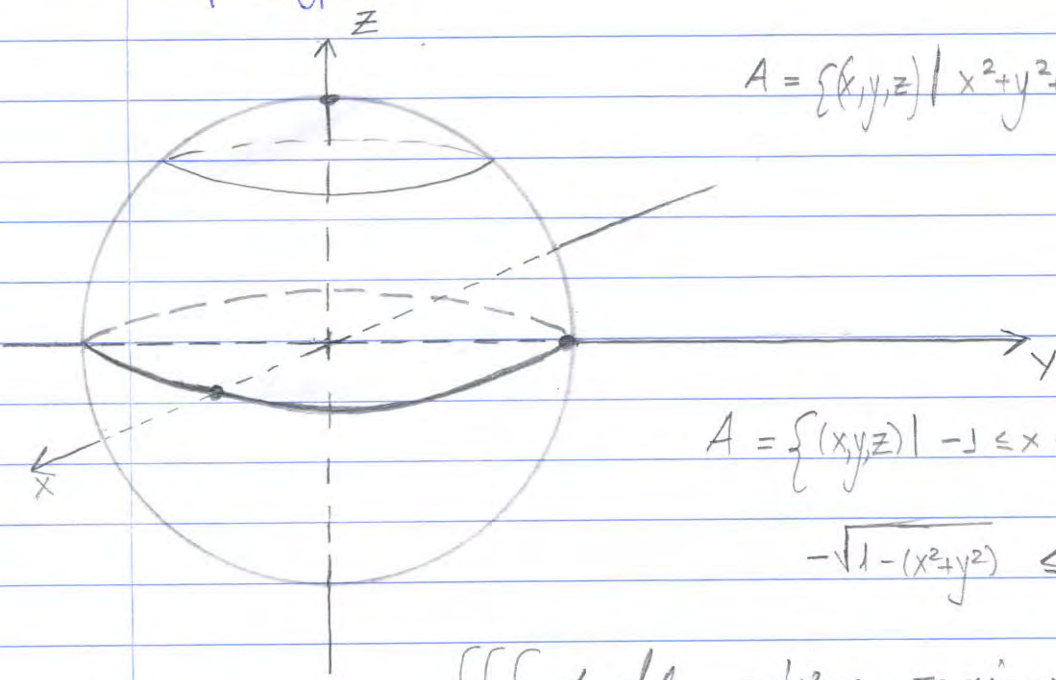
Χωρία στον $\mathbb{R}^3$



$$A = \{ (x,y,z) \mid \alpha \le x \le \beta,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\ \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y) \}$$

(1) $$\iiint_A f(x,y,z)\, dA = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx$$

Παράδειγμα 1.



$$A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z \leq 1\}$$

$$A = \{(x,y,z) \mid -1 \leq x \leq 1 \ , -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},$$
$$-\sqrt{1-(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{1-(x^2+y^2)}\}$$

$$\iiint_A 1 \, dA = \text{όγκος σφαίρας}$$

(2) $$\iiint_A 1 \, dA = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{-\sqrt{1-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} dz\right) dy\right) dx$$

Παρατήρηση:

(3) $$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{(1-x^2)-y^2} \, dy = \int_{-\lambda}^{\lambda} \sqrt{\lambda^2-y^2} \, dy = \frac{\lambda^2}{2}\pi$$

όπου $\lambda^2 = 1-x^2$

Απόδειξη: Τριγωνομετρική Αντικατάσταση.

$y = \lambda \sin\theta \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad , \quad dy = \lambda\cos\theta \, d\theta.$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \sqrt{\lambda^2-y^2} \, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\lambda^2-\lambda^2\sin^2\theta} \, \lambda\cos\theta \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda^2 \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \lambda^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\lambda^2}{2}\pi.$$

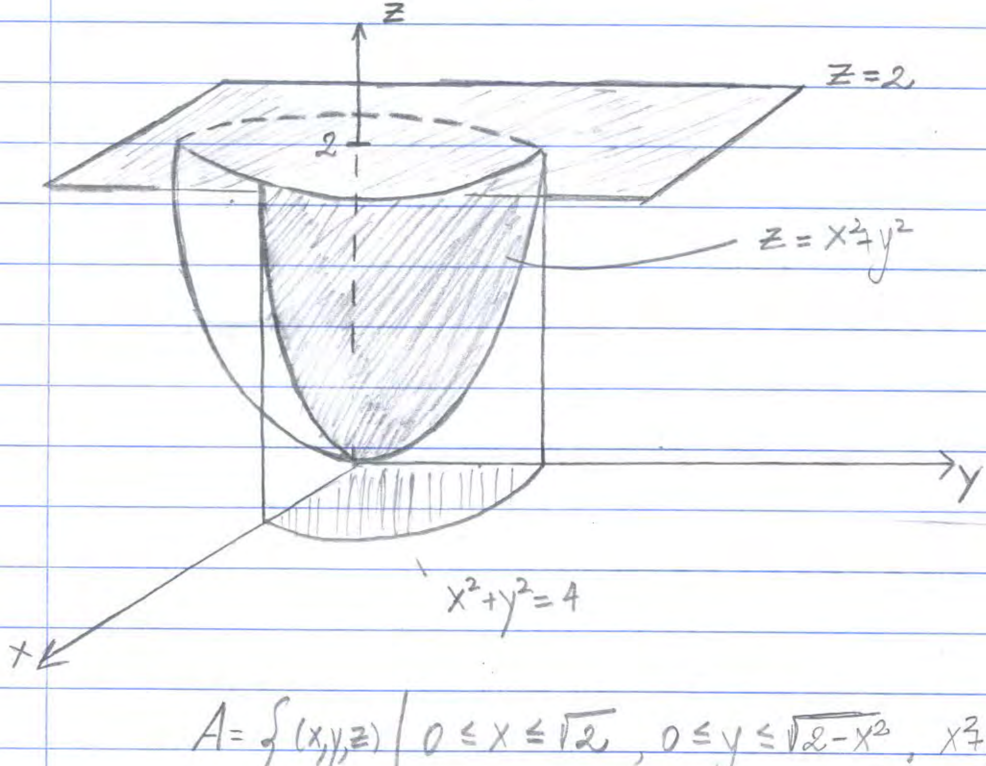
$$(2),(3) \Rightarrow \iiint_A 1\, dA = 2\pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx = 2\pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1}$$

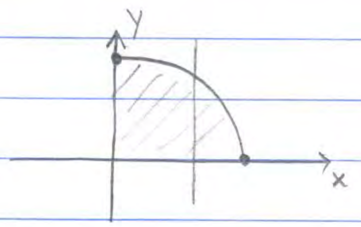
$$= \frac{4}{3}\pi .$$

$\square$

Παράδειγμα 2:

Έστω A το χωρίο που φράσσεται από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, και $z=2$, και την επιφάνεια $z=x^2+y^2$, εντός του $x \geq 0$ και $y \geq 0$.
Υπολογίστε το $I = \iiint_A x\, dA$ και σχεδιάστε το στερεό.





$$A = \left\{ (x,y,z) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2},\ 0 \leq y \leq \sqrt{2-x^2},\ x^2+y^2 \leq z \leq 2 \right\}$$

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2}^{2} x\, dz \right) dy \right) dx = \int_0^{\sqrt{2}} x \left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \left(2-(x^2+y^2) \right) dy \right) dx$$

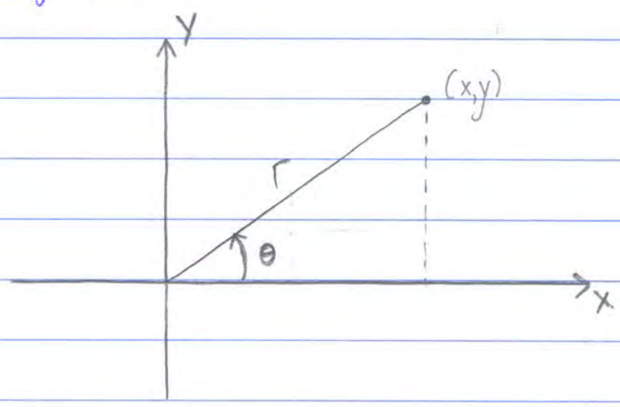
$$= \int_0^{\sqrt{2}} x \left((2-x^2)\sqrt{2-x^2} - \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^{\sqrt{2-x^2}} \right) dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} x \, \frac{2}{3} (2-x^2)^{3/2}\, dx = \dots = \frac{8\sqrt{2}}{15}$$

$\square$

Αλλαγή Μεταβλητών Σε Πολλαπλά Ολοκληρώματα

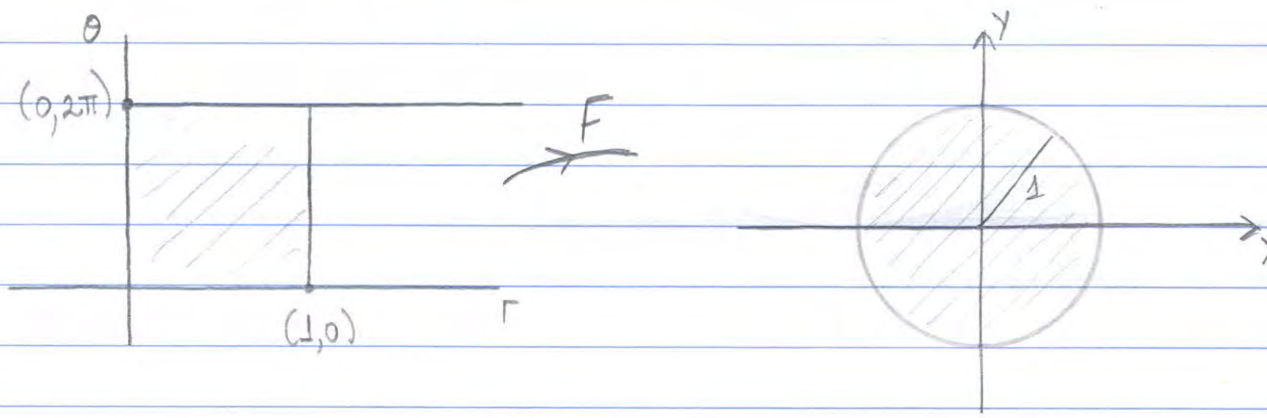
Πολικές (στον $\mathbb{R}^2$)



$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$x(r,\theta) = r\cos\theta$$
$$y(r,\theta) = r\sin\theta$$

$$(r,\theta) \xrightarrow{F} (x,y)$$

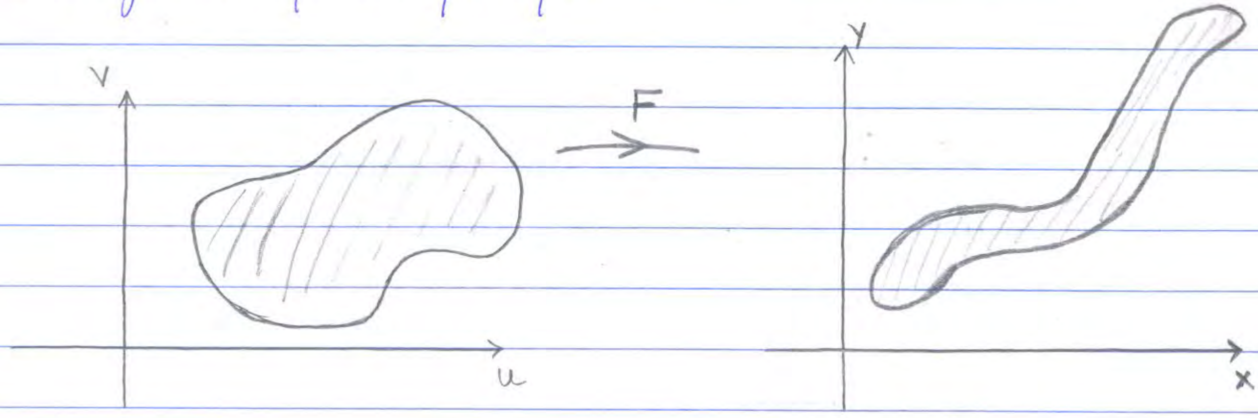


Διαφορικό της F

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det DF = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

Έστω γενικός μετασχηματισμός



$$F(v,u) = \big(f_1(v,u), f_2(v,u)\big)$$

$$\begin{cases} x = f_1(u,v) \\ y = f_2(u,v) \end{cases}, \quad F \text{ διαφορίσιμος}$$

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι η

(1) $$\det DF = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Που συμβολίζεται με

(2) $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

<u>Ορισμός</u> : Έστω $F: \underline{O} \to \mathbb{R}^2$ διαφορίσιμος στο $\underline{O}$ ανοιχτό στο $\mathbb{R}^2$. F λέγεται <u>αμφιδιαφόριση</u> εάν

$$\det DF(u,v) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \underline{O} ,$$

δηλαδή

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

$$x = f_1(u,v) \qquad , \qquad F(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v))$$
$$y = f_2(u,v)$$

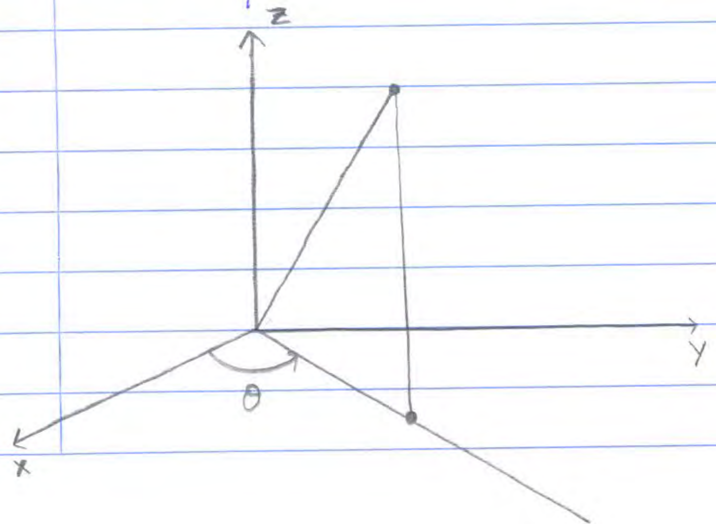
<u>Παράδειγμα</u>

$$x = u^2 - v^2 = f_1(u,v)$$
$$y = 2uv = f_2(u,v)$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2u & 2v \end{pmatrix} = 4(u^2+v^2)$$

Άρα ο F είναι αμφιδιαφόριση στο $(u,v) \neq (0,0)$

<u>Κυλινδρικές</u> (στον $\mathbb{R}^3$)



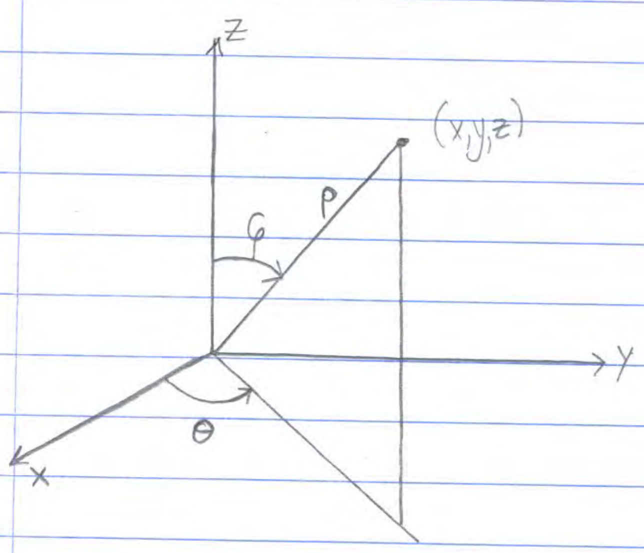
$$\begin{cases} x = r\cos\theta = \sqrt{x^2+y^2}\cos\theta \\ y = r\sin\theta = \sqrt{x^2+y^2}\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$F(r,\vartheta,z) = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, z)$$

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,z)} := \det DF = r$$

Σφαιρικές (στον $\mathbb{R}^3$)



$0 \leq \varphi \leq \pi$

$0 \leq \vartheta \leq 2\pi$

$\rho = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

$x = \rho \sin\varphi \cos\vartheta$

$y = \rho \sin\varphi \sin\vartheta$

$z = \rho\cos\varphi$

$x = f_1(\rho,\vartheta,\varphi) \qquad y = f_2(\rho,\vartheta,\varphi) \qquad z = f_3(\rho,\vartheta,\varphi)$

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \rho} & \frac{\partial f_3}{\partial \vartheta} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\vartheta & -\rho\sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \rho\sin\varphi\cos\vartheta & \rho\cos\varphi\sin\vartheta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\vartheta,\varphi)} = \det DF = \rho\sin\varphi\cos\vartheta \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\vartheta & \rho\cos\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$+\rho\sin\varphi\sin\vartheta \begin{vmatrix} \sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\sin\vartheta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \rho\sin\varphi\cos\vartheta\left(-\rho\sin^2\varphi\cos\vartheta - \rho\cos^2\varphi\cos\vartheta\right) +$$

$$\rho\sin\varphi\sin\vartheta\left(-\rho\sin^2\varphi\sin\vartheta - \rho\cos^2\varphi\sin\vartheta\right)$$

$$= -\rho^2\sin\varphi\cos^2\vartheta - \rho^2\sin\varphi\sin^2\vartheta$$

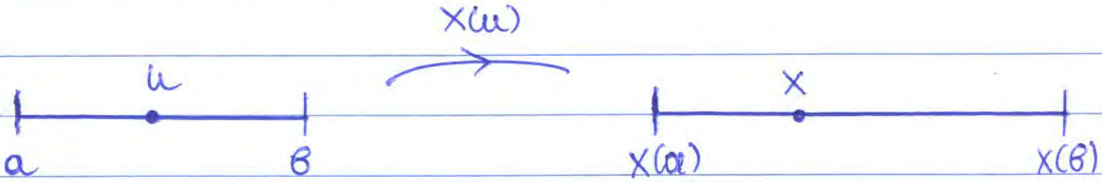
$$= -\rho^2\sin\varphi$$

$\square$

Αλλαγή Μεταβλητών Σε Πολλαπλά Ολοκληρώματα

$\boxed{1}$ Υπενθυμίζουμε στην μια μεταβλητή

(1) $$\int_a^{\beta} f(x(u))\,\frac{dx}{du}\cdot du = \int_{x(a)}^{x(\beta)} f(x)\,dx$$



$x(u)$ διαφορίσιμη συνάρτηση του u

$\boxed{2}$ Υιοθετούμε για το διπλό τον συμβολισμό

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

αντί του $\iint_A f\,dA$ που χρησιμοποιούσαμε μέχρι τώρα.

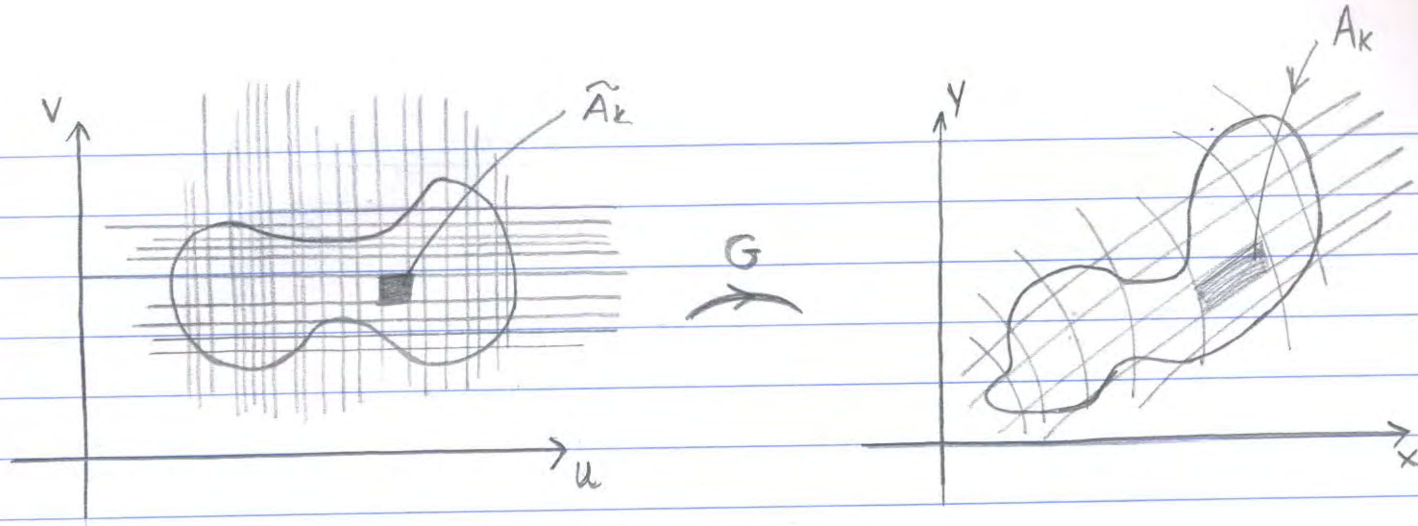
$\boxed{3}$ <u>Θεώρημα:</u> Έστω A ανοιχτό υποσύνολο του x-y επιπέδου, και έστω $\tilde{A}$ η εικόνα του A κάτω από την αμφιδιαφόριση και 1-1 στο $\tilde{A}$

$$G:\begin{cases} x(u,v) \\ y(u,v) \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \underset{\sim}{(u,v)} \xrightarrow{G} (x,y) \\ \tilde{A} \to A \end{array}$$

G είναι C^1, η ορίζουσα του διαφορικού $\neq 0$ παντού, και G 1-1

<u>Ισχύει:</u>

(2) $$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{A}} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$



<u>Βήμα 1</u> : $f \equiv 1$

$\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \dots, \widetilde{A}_n$ διαμέριση του $\widetilde{A}$

$G(\widetilde{A}_1), \dots, G(\widetilde{A}_n)$ συνιστά διαμέριση του A, $A_k = G(\widetilde{A}_k)$

(3) $$E\mu(A) = \iint_A 1 \, dx dy$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \iint_{G(\widetilde{A}_k)} dx dy = \sum_{k=1}^{n} E\mu\left(G(\widetilde{A}_k)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{E\mu(G(\widetilde{A}_k))}{E\mu(\widetilde{A}_k)} E\mu(\widetilde{A}_k)$$

Έστω $(u_k, v_k) \in \widetilde{A}_k$ αυθαίρετο. Τότε ισχύει

(4) $$\lim_{n \to \infty} \frac{E\mu(G(\widetilde{A}_k))}{E\mu(\widetilde{A}_k)} = \left| \frac{\text{Εμβαδόν } DG(u_k,v_k)(\widetilde{A}_k)}{\text{Εμβαδόν } (\widetilde{A}_k)} \right|$$

όριο όπως η διαμέριση γίνεται λεπτότερη και λεπτότερη

όπου

$DG(u_k,v_k)$ το διαφορικό, $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x(u_k,v_k)}{\partial u} & \dfrac{\partial x(u_k,v_k)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y(u_k,v_k)}{\partial u} & \dfrac{\partial y(u_k,v_k)}{\partial v} \end{pmatrix}$

και $DG(u_k,v_k)(\tilde{A}_k)$ είναι η εικόνα κάτω από τον γραμμικό μετασχηματισμό $DG(u_k,v_k)$ του $\tilde{A}_k$.

Από το Θεώρημα για Γραμμικούς Μετασχηματισμούς γνωρίζουμε ότι το δεξί μέλος της (4) ισούται με

(5) $$\left|\det DG(u_k,v_k)\right| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u,v)=(u_k,v_k)}$$

Κατά συνέπεια (3), (4), (5) $\Rightarrow$

(6) $$E\mu(A) = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u,v)=(u_k,v_k)} E\mu(\tilde{A}_k) + \text{Υπόλοιπο}$$

όπου το υπόλοιπο τείνει στο 0 όπως $n\to\infty$ και η διαμέριση γίνεται λεπτότερη.

(7) $$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| E\mu(\tilde{A}_k) \longrightarrow \iint_{A}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

Άρα

(8) $$E\mu(A) = \iint_{\tilde{A}}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \quad \left(\text{Δείξαμε το θεώρημα για } f\equiv 1\right).$$

<u>Βήμα 2</u>: Η γενική περίπτωση προκύπτει ως εξής:

(9) $$\iint_{A} f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{n}\iint_{A_k} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\iint_{A_k} dx\,dy \quad (\text{ΘΜΤ})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \iint_{\tilde{A}_k} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

όπου κάναμε χρήση του βήματος 1.

$$= \sum_{k=1}^{n} \iint_{\tilde{A}_k} f(x_k, y_k) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \iint_{\tilde{A}_k} f\left(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k) \right) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

Κατά συνέπεια στο όριο $n \to \infty$, νόρμας διαμέρισης τείνει στο μηδέν, το άθροισμα Riemann τείνει στο

$$\iint_{A} f\left(x(u,v), y(u,v) \right) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

$\square$

Σχόλια (Λεπτά Σημεία)

1. Υποθέσαμε οι εικόνες της διαμέρισης $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ συνιστά διαμέριση $G(\tilde{A}_1), \dots, G(\tilde{A}_n)$ του A, και ότι οι νόρμες των διαμερίσεων ταυτόχρονα τείνουν στο 0.

2. Η (4) χρήζει περαιτέρω προσοχής

3. Στην μια μεταβλητή δεν υποθέτουμε ότι η $u \to x(u)$ είναι 1-1 ούτε ότι $x'(u) \neq 0$

$\boxed{4}$ Εφαρμογές

Α. Πολικές (στο $\mathbb{R}^2$)

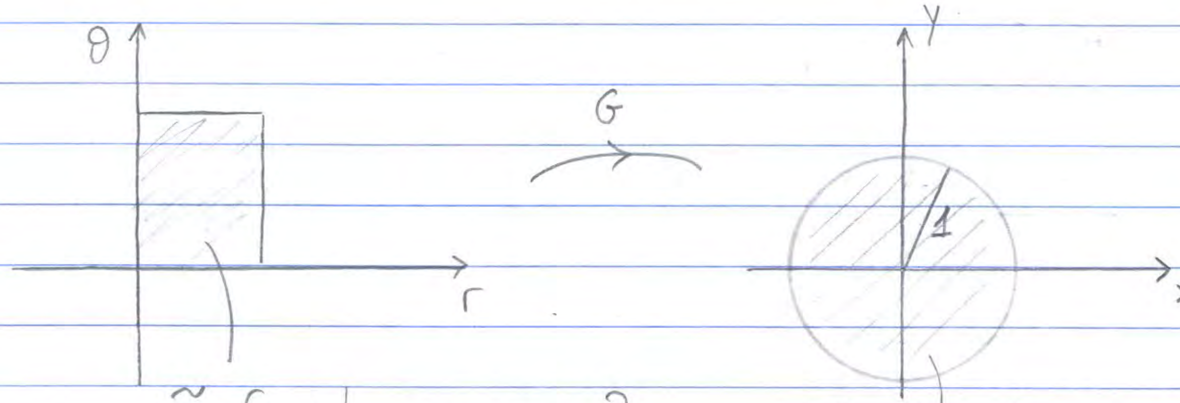
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{A}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

όπου κάνουμε χρήση

$$G : \begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = r$$

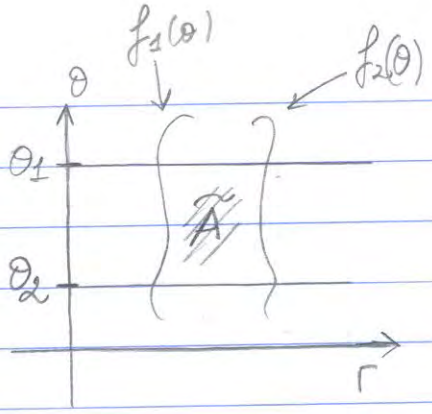
i)

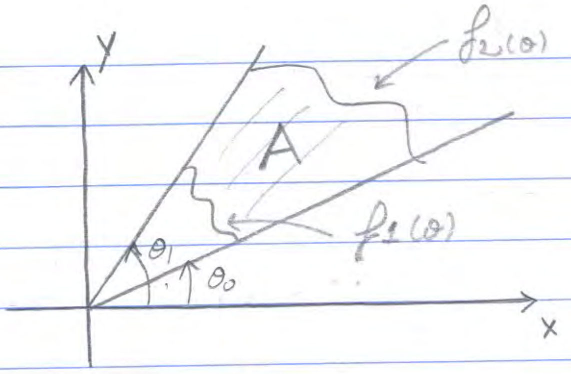


$\tilde{A} = \{(r,\theta) \mid 0<r<1,\ 0<\theta<2\pi\}$ $\qquad$ $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$

$$\iint_A dx\,dy = \iint_{\tilde{A}} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r\,dr\right) d\theta = \pi$$

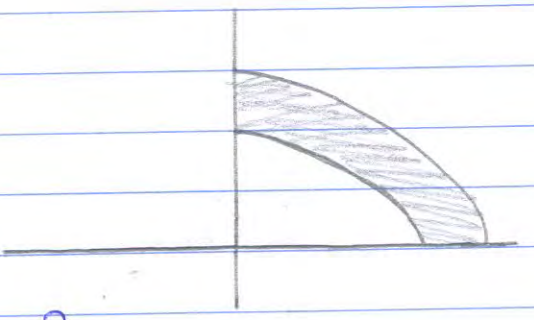
ii)





$$\iint_A dx\,dy = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\left(\int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} dr\right)d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\left(f_2^2(\theta)-f_1^2(\theta)\right)d\theta$$

iii). Υπολόγισε το



$$\iint_A \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$A=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ a\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq b\}$$

<u>Λύση</u> (Πολικές)

$$\iint_A \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_a^b \ln r\ r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_a^b r\ln r\,dr$$

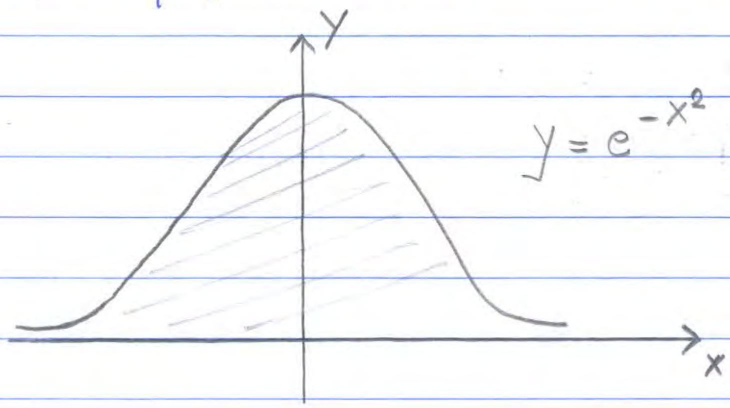
$$= \frac{\pi}{2}\int_a^b \frac{1}{2}\ln r^2\,d(r^2)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[r^2\ln r^2 - r^2\right]\Big|_{r=a}^{r=b}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\left(b^2\ln b^2 - a^2\ln a^2\right)-\left(b^2-a^2\right)\right]$$

$\square$

iv) Η συνάρτηση Gauss



Ισχύει $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Λύση:

Θέτουμε $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy\right)$$

$$= \iint_A e^{-x^2} e^{-y^2} dA = \iint_A e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

όπου $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr \, d\theta$$

$$= (2\pi)\int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr$$

$$= (2\pi)\,\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-r^2} d(r^2) = \pi$$

$\square$

$\boxed{5}$ Αλλαγή Μεταβλητών Για Τριπλά Ολοκληρώματα

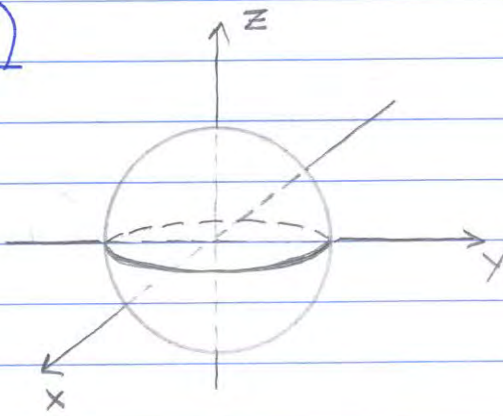
$$G = \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\tilde{A}} f\big(x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w)\big) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw$$

Εφαρμογές

Κυλινδρικές - Σφαιρικές (στον $\mathbb{R}^3$)

i) $$\iiint_V e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV$$



$$V = \{ 0 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 1 \}$$

Λύση:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} e^{\rho^3} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\int_0^{1} e^{\rho^3} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\right) d\theta$$

$$= \left(\int_0^{\pi}\int_0^{1} e^{\rho^3} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right)$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \int_0^{1} e^{\rho^3} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi$$

$$= (2\pi) \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^{1} e^{\rho^3} \rho^2 \, d\rho \right)$$

$$= \frac{4\pi}{3} (e-1)$$

$\square$

ii) Βρείτε τον όγκο της μπάλας $B(0;R)$

Λύση

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{R} \rho^2 \, d\rho \right) \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \right)$$

$$= \frac{4\pi R^3}{3}$$

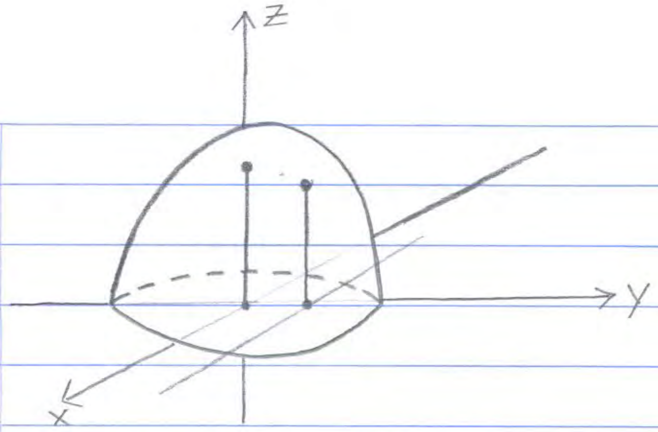
$\square$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2} \, dV$$

όπου V το στερεό που ορίζεται από το παραβολοειδές $z = 1 - x^2 - y^2$ και το x-y επίπεδο.

Λύση:



$$z = 1 - (x^2+y^2)$$

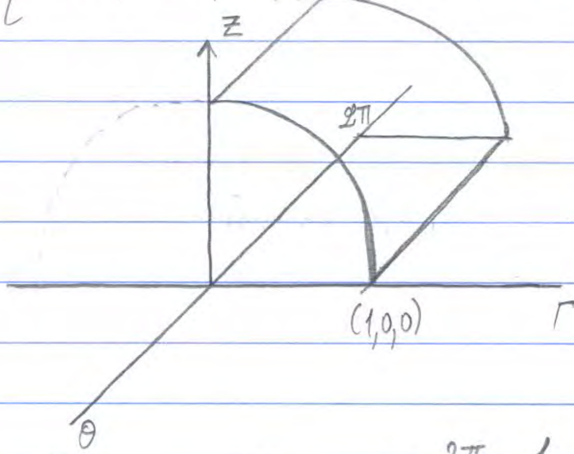
Κυλινδρικές είναι κατάλληλες διότι το στερεό έχει ακτινική συμμετρία καθώς και η συνάρτηση

Καρτεσιανή Περιγραφή του V

$$\left\{ (x,y,z) \;\middle|\; -1 \le x \le 1 \;,\; -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \;,\; 0 \le z \le 1-(x^2+y^2) \right\}$$

Κυλινδρική Περιγραφή του V

$$\left\{ (r,\theta,z) \;\middle|\; 0 \le \theta \le 2\pi \;,\; 0 \le r \le 1 \;,\; 0 \le z \le 1-r^2 \right\}$$



$$\iiint_A \sqrt{x^2+y^2}\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\left(\int_0^{1-r^2} r \, r \, dz \right) dr \right) d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^2 (1-r^2)\, dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

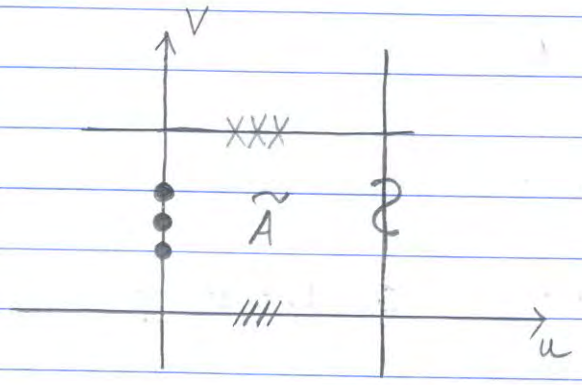
Παράδειγμα

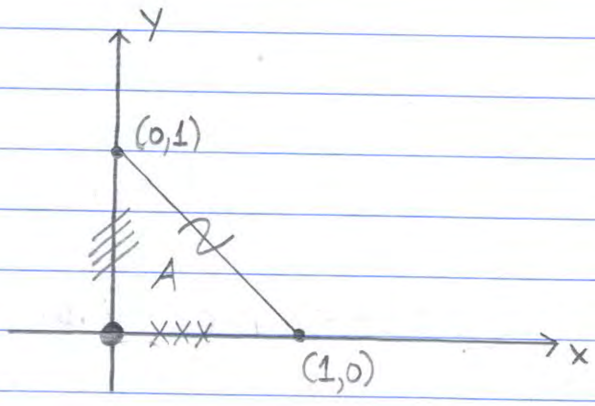
Δείξτε ότι για κατάλληλους a, b και συνάρτηση f ισχύει

$$\iint_{\substack{x>0\\ y>0\\ x+y<1}} x^a y^b f(x+y)\,dx\,dy = \left(\int_0^1 u^{a+b+1} f(u)\,du\right)\left(\int_0^1 v^a (1-v)^b\,dv\right)$$

Υπόδειξη: $G = \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) = u - uv \end{cases}$

Λύση





Το χωρίο A είναι όπως στο σχήμα
Για να βρούμε το $\widetilde{A}$ στο u-v επίπεδο

$$\widetilde{A} \xrightarrow{G} A$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τον G^{-1}

$$G^{-1} = \begin{cases} u = x+y \\ v = \dfrac{x}{u} = \dfrac{x}{x+y} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η πλευρά $x+y=1$ αντιστοιχεί στην $u=1$
Η κάτω πλευρά του τριγώνου, $y=0$ δίνει $v=1$,
η κάθετη πλευρά $x=0$ δίνει $v=0$ και $u=y$, $0 \le y \le 1$.
Τέλος το $(0,0)$ απεικονίζεται στην $u=0$, $0 \le v \le 1$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix}$$

$$= -uv - u(1-v) = -u$$

Κατά συνέπεια

$$\iint_A x^a y^b f(x+y)\, dA = \iint_{\tilde{A}} (uv)^a [u(1-v)]^b f(u)(-u)\, d\tilde{A}$$

$$= -\left(\int_0^1 u^{a+1+b} f(u)\, du\right)\left(\int_0^1 v^a (1-v)^b\, dv\right)$$

$\square$

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα & Θεώρημα Green

1. Καμπύλες

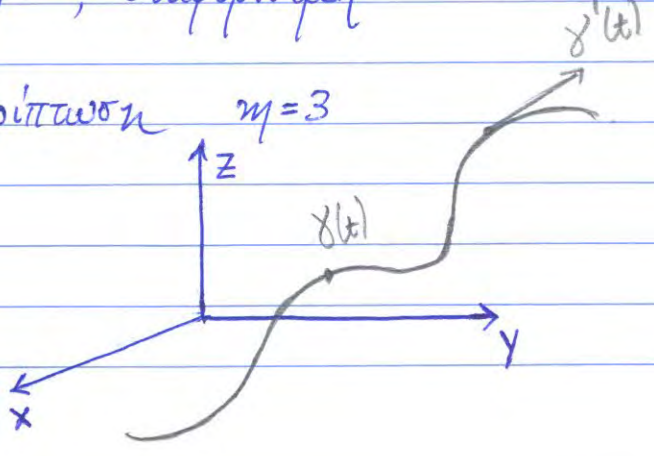
Θεωρούμε διανυσματικές συναρτήσεις

$$\gamma : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

όπου $n = 1$, $A = [a,b]$, (καμπύλες)

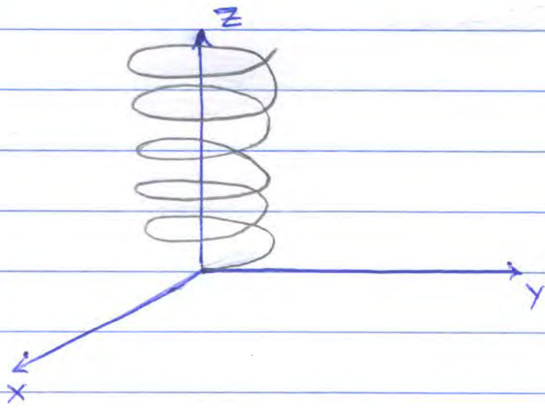
$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t)), \text{ διαφορίσιμη}$$

Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση $m=3$



Υπενθυμίζουμε το παράδειγμα της ελικοειδούς καμπύλης

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$



Υπενθυμίζουμε ότι $\gamma'(t)$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα στην $\gamma(t)$ (διάνυσμα της ταχύτητας)

Ορισμός Επικαμπύλιων Συναρτήσεων

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(x,y,z)$ συνεχούς συνάρτησης κατά μήκος της γ, διαφορίσιμης καμπύλης, ορίζεται

(1) $$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \|\gamma'(t)\|\, dt,$$

$$\Big(\|\gamma'(t)\| = \|(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t)\| = \left(|\gamma_1'(t)|^2 + |\gamma_2'(t)|^2 + |\gamma_3'(t)|\right)^{1/2} \Big)$$

Γενικότερα για $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, διαφορίσιμη, και $f(x_1, \dots, x_m)$, συνεχή, ορίζουμε

(2) $$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

$m=2$ (καμπύλες στο επίπεδο)

Παράδειγμα: Υπολογίστε το $\int_\gamma f(x,y,z)\,ds$ για

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$
$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0,2\pi]$

Λύση

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2)\sqrt{2}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (1+t^2)\sqrt{2}\,dt$$
$$= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3+4\pi^2).$$

□

Διευκρινήσεις – Επεξηγήσεις

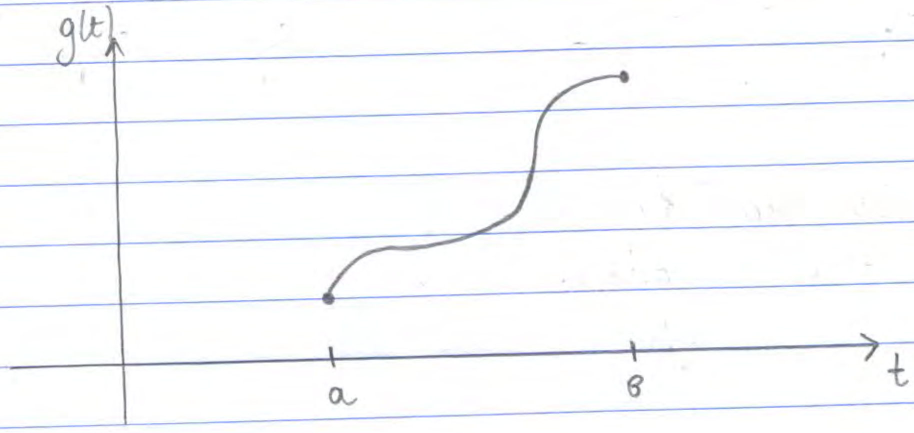
1. Υπενθυμίζουμε ότι το μήκος της καμπύλης $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ δίνεται από τον τύπο

(3)
$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$$
$$= \int_a^b \left((\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_m'(t))^2 \right)^{1/2} dt$$

Για $m=2$

(4)
$$\ell(\gamma) = \int_a^b \left[(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2 \right]^{1/2} dt$$

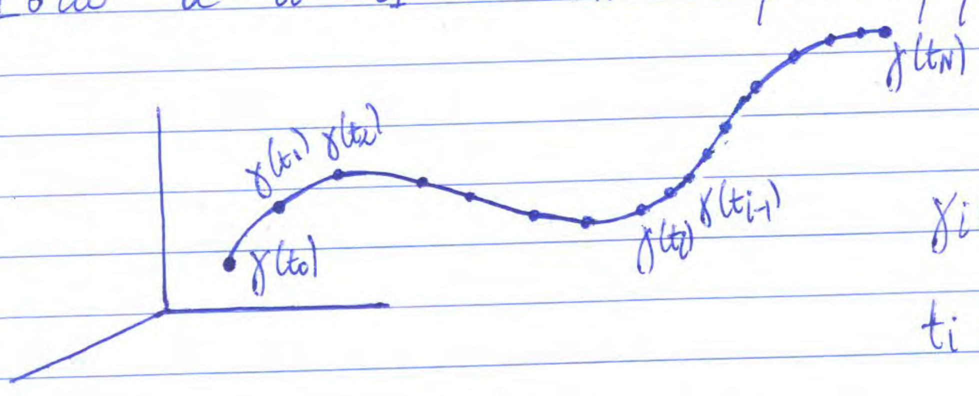
Στην ειδική περίπτωση $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = g(t)$
η (4) παίρνει την οικεία μορφή:



$$\int_a^{\beta} \sqrt{1+(g'(t))^2}\, dt$$

2. Επεξηγήσεις για τον ορισμό.

Έστω $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \beta$ μια διαμέριση του $[a,\beta]$



$\gamma_i(t) = \gamma(t)$

$t_i \leq t \leq t_{i+1}$.

Το μήκος της $\gamma_i : [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}^3$ είναι

$$\Delta s_i := \ell(\gamma_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$\int_\gamma f\, ds = \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} f\, ds = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$= \sum_{i=1}^{N} f(\gamma(t_i^*)\, \|\gamma'(t_i^*)\|\, (t_{i+1} - t_i)$$

$$\simeq \sum_{i=1}^{N} f\left(\gamma(t_i^*)\right) \Delta s_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i \quad , \quad (x_i, y_i, z_i) = \gamma(t_i^*)$$

δηλαδή άθροισμα Riemann, που αντιστοιχεί σε διαμέριση της καμπύλης, όπου το μήκος Δs_i του κάθε τμήματος παίζει το ρόλο του Δx.

3. <u>Παρατήρηση</u> (Γεωμετρικότητα του ορισμού του μήκους)

Το ολοκλήρωμα

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

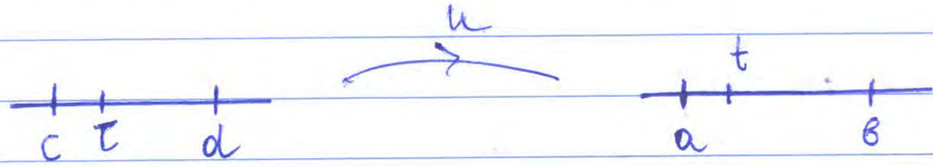
που δίνει το μήκος, είναι <u>ανεξάρτητο της παραμέτρισης</u>

Πράγματι εάν

$$t = u(\tau) \quad , \quad u(c) = a \quad , \quad u(d) = b$$

αλλαγή μεταβλητών, u αμφιδιαφόριση

$(u' \neq 0 \, , \, u \ 1\text{-}1)$



Τότε η καμπύλη

$$\Gamma(\tau) = \gamma(u(\tau)) \quad , \quad c \leq \tau \leq d$$

έχει το ίδιο μήκος με την γ

$$\ell(\gamma) = \ell(\Gamma)$$

<u>Απόδειξη</u>:

$$\ell(\Gamma) = \int_c^d \|\Gamma'(\tau)\|\, d\tau$$

$$= \int_c^d \|\gamma'(u(\tau))\, u'(\tau)\|\, d\tau \quad (\text{κανόνας της αλυσίδας})$$

$$= \int_c^d \|\gamma'(u(\tau))\|\, |u'(\tau)|\, d\tau$$

Από $u' \neq 0$ και $u(c) = a$, $u(d) = b$.
Προκύπτει ότι $u' > 0$.

$$= \int_c^d \|\gamma'(u(\tau))\|\, u'(\tau)\, d\tau.$$

$$= \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

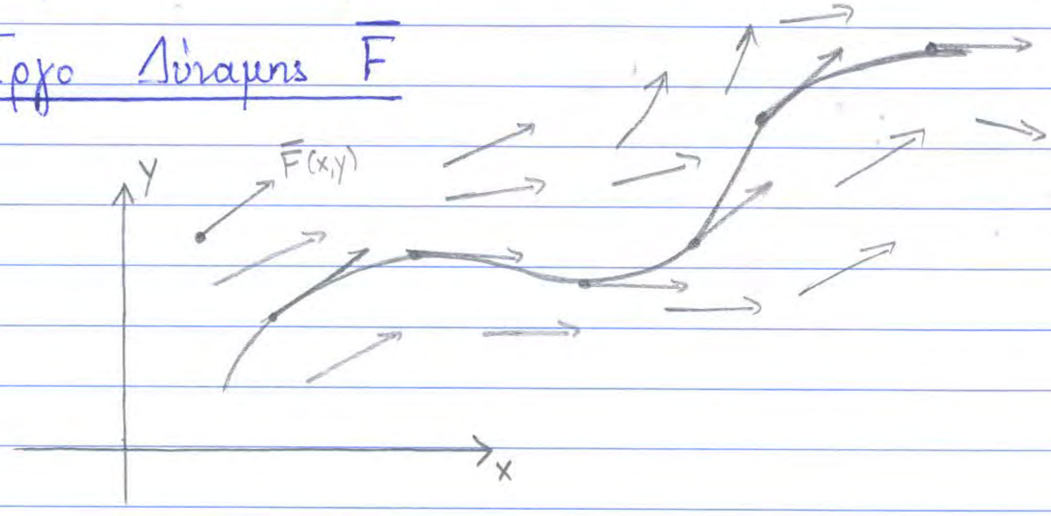
$\square$

4. <u>Φυσική Ερμηνεία</u> του $\int_\gamma f\, ds$

Θεωρούμε ένα σύρμα μεταβλητής πυκνότητας σχήματος όπως η καμπύλη γ. Εάν η πυκνότητα σε κάθε σημείο δίνεται από την $f(x,y,z)$, τότε η <u>μάζα</u> του σύρματος δίνεται από το εν λόγω ολοκλήρωμα.

Ορισμός Επικαμπύλιων Διανυσματικών Πεδίων

1. Έργο Δύναμης $\bar{F}$



<u>Ορισμός</u>: Έστω $\bar{F}$ διανυσματικό πεδίο στο $\mathbb{R}^m$ $(m=2,3)$
δηλαδή $\bar{F} : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, συνεχής
Έστω $\gamma(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^m$
διαφορίσιμη καμπύλη.

(1) $$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s} := \int_\alpha^\beta \bar{F}(\gamma(t)) \cdot \bar{\gamma}'(t)\, dt$$

<u>Παρατήρηση</u>

Εάν το εφαπτόμενο διάνυσμα $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in [\alpha,\beta]$ έχουμε

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_\alpha^\beta \bar{F}(\gamma(t)) \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \big(\bar{F}(\gamma(t)) \cdot \underbrace{T(t)}_{\text{μοναδιαίο}}\big) \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$=: \int_\alpha^\beta F_T\, ds$$

όπου $F_T = \bar{F} \cdot \bar{T}$, η εφαπτόμενη προβολή της F

Παράδειγμα

$\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\bar{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Υπολογίστε το $\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s}$

Λύση

$F(\gamma(t)) = F(\sin t, \cos t, t) = (\sin t, \cos t, t)$

$\gamma'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$

Άρα

$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = t$

Άρα

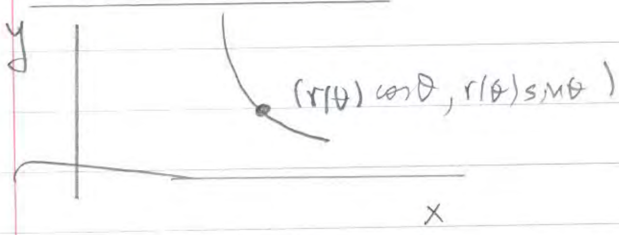
$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s} = 2\pi^2$$

$\square$

Εναλλακτικός Συμβολισμός

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\bar{s} = \int_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$$

7. Λυση Ασκησης 3



$$\gamma(\theta) = (r(\theta)\cos\theta,\ r(\theta)\sin\theta)$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta.$

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r(\theta)\cos\theta,\ r(\theta)\sin\theta)\,\|\gamma'(\theta)\|\,d\theta$$

$$\gamma'(\theta) = (r'\cos\theta - r\sin\theta,\ r'\sin\theta + r\cos\theta)$$

$$\|\gamma'(\theta)\|^2 = (r'\cos\theta - r\sin\theta)^2 + (r'\sin\theta + r\cos\theta)^2$$

$$= \underline{(r')^2\cos^2\theta} + r^2\sin^2\theta - \cancel{2rr'\sin\theta\cos\theta} + \underline{(r')^2\sin^2\theta} + r^2\cos^2\theta + \cancel{2rr'\sin\theta\cos\theta}$$

$$= (r')^2 + r^2.$$

II

8. Το Αναλλοίωτο των Επικαμπυλίων Ολοκληρωμάτων κάτω από αναπαραμετρήσεις

Υπενθυμίζουμε την Παρατήρηση 3, σ16.
Εάν

$$t = u(\tau)$$

$$u \in C^1, \quad u : [c,d] \longrightarrow [a,b], \quad u' \neq 0$$

και εάν $\bar{\gamma}(t)$, $t \in [a,b]$, C^1 παραμέτριση της καμπύλης γ,

$$\bar{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

τότε

$$\Gamma(\tau) = \bar{\gamma}(u(\tau)), \quad \Gamma : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

είναι μια αναπαραμέτρηση της γ. Γεωμετρικά $\Gamma = \gamma$!

Εάν $u(c) = a$, $u(d) = b$ έχουμε αναπαραμέτρηση που διατηρεί τον προσανατολισμό.
Εάν $u(c) = b$, $c(d) = a$, τότε έχουμε αναπαραμέτριση που αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Ισχύουν τα ακόλουθα.

(1) Το $\int_\gamma f\, ds$ δεν αλλάζει κάτω από αναπαραμέτριση ανεξάρτητα από το αν διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

(2) Το $\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s}$ δεν αλλάζει κάτω από παραμέτρηση που διατηρεί τον προσανατολισμό αλλά

αλλάζει πρόσημο κάτω από παραμέτρηση που αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Απόδειξη

A. $$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$\int_\gamma f\,ds = \int_c^d f(\Gamma(\tau))\,\|\Gamma'(\tau)\|\,d\tau$$

$$= \int_c^d f(\gamma(u(\tau)))\,\|\gamma'(u(\tau))\,u'(\tau)\|\,d\tau$$

$$= \int_c^d f(\gamma(u(\tau)))\,\|\gamma'(u(\tau))\|\,|u'(\tau)|\,d\tau$$

Περίπτωση 1 : $u' > 0$

$$= \int_c^d f(\gamma(u(\tau))\,\|\gamma'(u(\tau))\|\,u'(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_c^d f(\gamma(u(\tau))\,\|\gamma'(u(\tau))\|\,du(\tau)$$

$(t = u(\tau))$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

Περίπτωση 2: $u'<0$

$$= \int_c^d f(\gamma(u(\tau)))\,\|\gamma'(u(\tau))\|\,(-u'(\tau))\,d\tau$$

$$= -\int_c^d f(\gamma(u(\tau)))\,\|\gamma'(u(\tau))\|\,du(\tau)$$

$(t=u(\tau))$

$$= -\int_b^a f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt.$$

B. Ασκηση

Υπόδειξη

$$\int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{s} = \int_a^b \bar{F}(\gamma(t))\cdot\bar{\gamma}'(t)\,dt$$

$$\bar{T}'(\tau) = \bar{\gamma}'(u(\tau))\,u'(\tau)$$

Τωρα δεν εχαμε $|u'(\tau)|$ οπως πριν.

$\boxed{1}$

Παράδειγμα

$t = u(\tau) = 1-\tau \qquad 0 \le t \le 1 \quad , 0 \le \tau \le 1$

αντιστρέφει την προσανατολισμό.

$$u : [0,1] \longrightarrow [0,1], \quad u(0) = 1, \; u(1) = 0.$$

$\square$

9. Ασκήσεις

1) Θεωρείστε το πεδίο $\overline{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Υπολογίστε το έργο για την μεταφορά μοναδιαίας μάζας κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$, $z = 0$, από το $x = -1$ στο $x = 2$.

2) Έστω γ C^1 καμπύλη.
(a) Έστω $\overline{F} \perp \gamma'(t)$. Δείξτε ότι

$$\int_\gamma \overline{F} \cdot d\overline{s} = 0$$

(b) Έστω $\overline{F} \parallel \gamma'(t)$. Δείξτε ότι

$$\int_\gamma \overline{F} \cdot d\overline{s} = \int_\gamma \|\overline{F}\| \, ds.$$

($\parallel$ σημαίνει $F(\gamma(t)) = \lambda(t)\, \gamma'(t)$, $\lambda(t) > 0$)

3) Υπολογίστε το

$$\int_{\gamma} y\,dx + (3y^3 - x)\,dy + z\,dz$$

για καθε καμπυλη $\gamma_n(t) = (t, t^n, 0)$, $0 \le t \le 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

4. Εστω οτι η γ εχει $l(\gamma) = l$. Δειξτε οτι εαν $\|F\| \le M$ τοτε εχουμε το φραγμα

$$\left| \int_{\gamma} \bar{F} \cdot d\bar{s} \right| \le M l.$$

5. Εστω $\gamma(t)$ καμπυλη και $T = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.

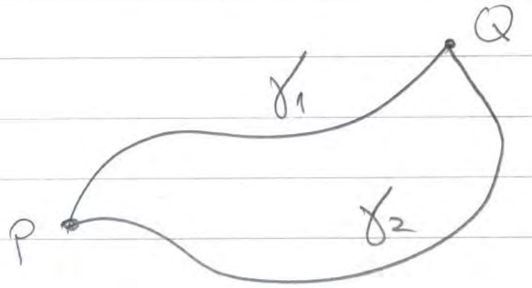
Τι ειναι το

$$\int_{\gamma} \bar{T} \cdot d\bar{s} \quad ;$$

10. <u>Επικαμπυλια Διανυσματικων Πεδιων Κλασης</u>

Εν γενει το $\int_{\gamma} \bar{F} \cdot d\bar{s}$ εξαρταται

απο την καμπυλη, και οχι μονο απο τα σημεια αφετηριας και τελους. Δηλαδη

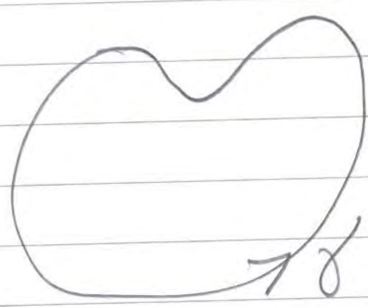


$$\int_{\gamma_1} \bar{F} \cdot d\bar{s} \neq \int_{\gamma_2} \bar{F} \cdot d\bar{s} \quad \text{εν γενει}$$

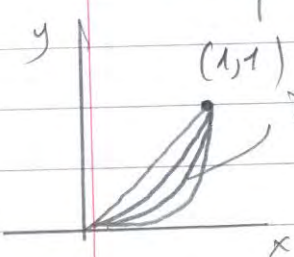
Και κατα συνεπεια εν γενει

$$\int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{s} \neq 0$$

για γ κλειστη απλη καμπυλη.



Για παραδειγμα



$$\gamma_n(t) = (t, t^n), \quad 0 \le t \le 1.$$

$$\bar{F}(x,y) = xy\bar{j} = (0, xy)$$

$$\int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{s} = \int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy$$

$$= \int F_2\,dy$$

$$= \int_0^1 x(t)y(t)y'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 t\cdot t^n\, n t^{n-1}\,dt$$

$$= \frac{n}{2n+1}$$

Ισχύει όμως το εξής για $\overline{F}(x) = \nabla f(x)$

Θεώρημα

Έστω $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ C^1, και $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ $(m=2,3)$, C^1 καμπύλη. Τότε για

$$\int_\gamma \nabla f \cdot d\overline{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Απόδειξη

$$\int_\gamma \nabla f \cdot d\overline{s} = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[f(\gamma(t))\right] dt$$

(κανόνας αλυσίδας)

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

$\square$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\int_\gamma y\,dx + x\,dy$, όπου γ η καμπύλη

$\left(\frac{t^4}{4}, \sin(\ln t)\right)$, $1 \le t \le e$.

<u>Λυση</u>

Εχουμε $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$, $P(x,y) = y$, $Q(x,y) = x$

Γνωριζουμε οτι εαν

(1) $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

τοτε $\exists$ $f(x,y)$ τ.ω.

(2) $$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q$$

(ακριβης μορφη, απο ΣΔΕ).

Πραγματι η (1) επαληθευεται:

(3) $$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

<u>Κατασκευη της f</u>

(4) $$\frac{\partial f}{\partial x} = y \Rightarrow f = \int y\,dx + g(y)$$
$$= yx + g(y).$$

$\therefore$

(5) $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(yx + g(y)\right)$$
$$= x + g'(y)$$

Απο την (2)

(6) $$\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Κατα συνεπεια $(5),(6) \Rightarrow g'(y)=0$

Αρα

(7). $$f(x,y) = xy + C$$

Εφαρμοζουμε τωρα το Θεωρημα:

$$\int_\gamma y\,dx + x\,dy = f(\gamma(2)) - f(\gamma(1))$$

$$= f\left(\frac{e^4}{4}, \sin 1\right) - f\left(\frac{1}{4}, 0\right)$$

$$= \frac{e^4}{4}\sin 1$$

$\square$

Ασκησεις

1. Υπολογιστε το $\int_\gamma \nabla f \cdot d\vec{s}$ οπου γ απλη κλειστη καμπυλη.

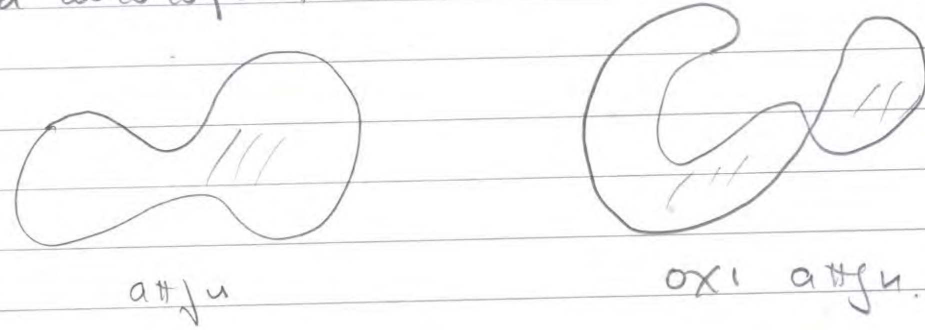
2 Εστω $\nabla f(x,y,z) = 2xyz\,e^{x^2}\vec{i} + z\,e^{x^2}\vec{j} + y\,e^{x^2}\vec{k}$
Εαν $f(0,0,0) = 5$ βρειτε την $f(1,1,2)$.

Το Θεωρημα του Green

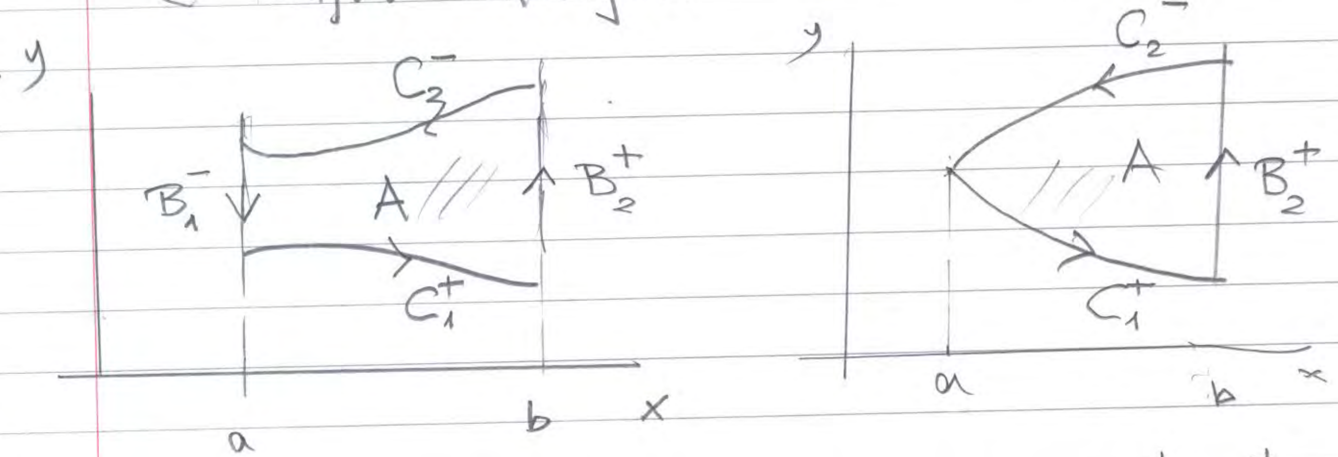
Θα θεωρησουμε επικαμπυλια ολοκληρωματα στο επιπεδο, $\mathbb{R}^2$.

<u>Ορ</u>

Μια C^1 καμπυλη λεγεται <u>απλη</u> εαν δεν εχει αυτοτομες.



Υπενθυμιζαμε τα χωρια τυπου 1 και τυπου 2 το συνορο των οποιων εκφραζεται ως ενωση C^1 απλων καμπυλων.



Σχ 1

$$\partial A = C_1^+ + B_2^+ + C_2^- + B_1^- , \qquad \partial A = C_1^+ + B_2^+ + C_2^-$$

(γραφουμε την ενωση ως αθροισμα)

Θετικος Προσανατολισμος: Αριστεροστροφος

Αρνητικος Προσανατολισμος: Δεξιοστροφος

Συμβολισμός

ενεργητικός συμβολισμός (βλ 6.20)

$$\int_{\partial A} P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial A} (P,Q)\cdot d\bar{s}$$

$$\bar{F} = (P,Q)$$

$$\int (P,Q)\cdot d\bar{s} = \int \Big(P(x(t),y(t)),\, Q(x(t),y(t))\Big)\cdot \bar{\gamma}'(t)\,dt$$

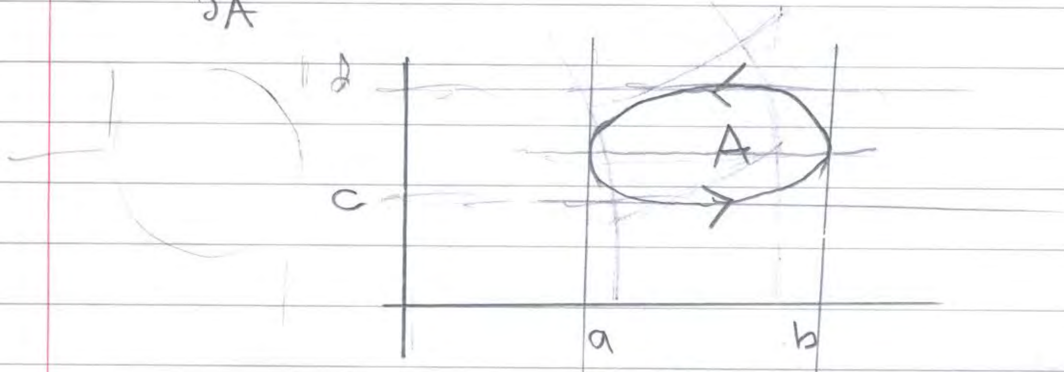
$$\Big(\gamma(t) = (x(t),y(t)) \quad , \gamma'(t) = (x'(t),y'(t))\Big)$$

$$= \int_a^b \Big[P(x(t),y(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t)\Big]dt.$$

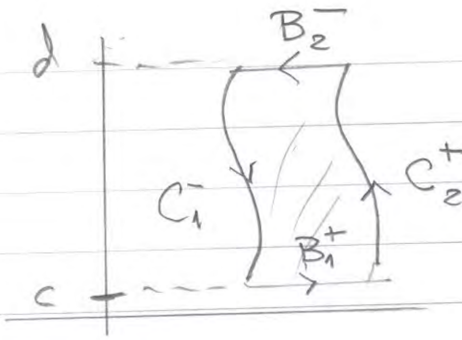
Έχουμε λοιπόν

$$\int_{\partial A} P\,dx = \int P(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt$$

$$\int_{\partial A} Q\,dy = \int Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$$



Σχ 3



$$\partial A = C_2^+ + B_2^- + C_1^- + B_1^+ .$$

Σχ2

Θεωρημα

Εστω A χωριο ταυτοχρονα και των δυο τυπων (απλο χωριο)
θετικα προσανατολισμενο, και εστω $P(x,y)$, $Q(x,y)$
C^1 συναρτησεις στο $\bar{A}$.
Τοτε ισχυει

$$(*)\qquad \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{\partial A} P\,dx + Q\,dy$$

Εξηγησεις $\leftarrow$ 32'

(Βλ Σχ3)

Αποδειξη

Βημα Ι

Εστω A χωριο τυπου 1, $C = \partial A$. Εστω

$P : A \to \mathbb{R}$, C^1 συναρτηση.

Ισχυει

$$(*1)\qquad \int_{\partial A} P\,dx = -\iint_A \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$

Αποδειξη Βηματος Ι

Θεωρουμε το A ως τυπου 1

$A = \{ (x,y) \mid a \le x \le b ,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x) \}$

(Β) Σx3, σ. 31')

$\partial A = C_1^+ + C_2^-$ (όπως και στο Σx 1)

(1) $$\iint_A \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy \right) dx$$

$$= \int_a^b \left[P(x,\phi_2(x)) - P(x,\phi_1(x)) \right] dx .$$

(2) $$\int_{C_1^+} P\,dx = \int_a^b P(t,\phi_1(t))\,x'(t)\,dt = \int_a^b P(t,\phi_1(t))\,dt$$

$C_1^+ = \{ (t,\phi_1(t)),\ a \leq t \leq b \}$

$x(t) = t,\ y(t) = \phi_1(t)$

Ομοίως

(3) $$\int_{C_2^+} P\,dx = \int_a^b P(t,\phi_2(t))\,dt$$

$\Leftrightarrow$

(4) $$\int_{C_2^-} P\,dx = -\int_a^b P(t,\phi_2(t))\,dt .$$

(2), (4), (1) επαληθεύουν την (∗1),

Βημα II

(∗2) $$\int_{\partial A} Q\,dy = \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

Σημ: Η διαφορα στο προσημο μεταξυ των (∗1) και (∗2) οφειλεται στην αλλαγη των ρολων x και y που στο x-y επιπεδο ισοδυναμει με αλλαγη προσανατολισμου.

Αποδειξη Βηματος II

Θεωρουμε το A ως τυπου 2

$$A = \{(x,y) \mid c \le y \le d, \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

$$\partial A = C_2^+ + C_1^- \qquad \text{(οπως και στο Σχ2)}$$

(5) $$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx \right) dy$$

$$= \int_c^d \left[Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y) \right] dy$$

(6) $$\int_{C_2^+} Q\,dy = \int_c^d Q(\psi_2(t), t)\, y'(t)\,dt = \int_c^d Q(\psi_2(t), t)\,dt$$

$$C_2^+ = \{ (\psi_2(t), t), \quad c \le t \le d \}$$

$$x(t) = \psi_2(t), \quad y(t) = t$$

Ομοίως

$$\int_{C_1^+} Q\,dy = \int_c^d Q(\psi_1(t),t)\,dt$$

και κατά συνέπεια

(7) $$\int_{C_1^-} Q\,dy = -\int_c^d Q(\psi_1(t),t)\,dt$$

(5), (6), (7) επάγονται την (*2).

(*1), (*2) $\Longrightarrow$ (*).

$\square$.

Ασκήσεις.

Όλες τις Ασκήσεις των Σημειώσεων (+)

1) Άσκηση 5.5 (Χατζηαφράτη)

2) Άσκηση 5.14 (—//—)

3) Άσκηση 5.17 (—//—)

4) Άσκηση 9.1 (—//—)

5) Άσκηση 9.2 (—//—)

6) Άσκηση 9.6 (—//—)

7) Άσκηση 8.5 (—//—)

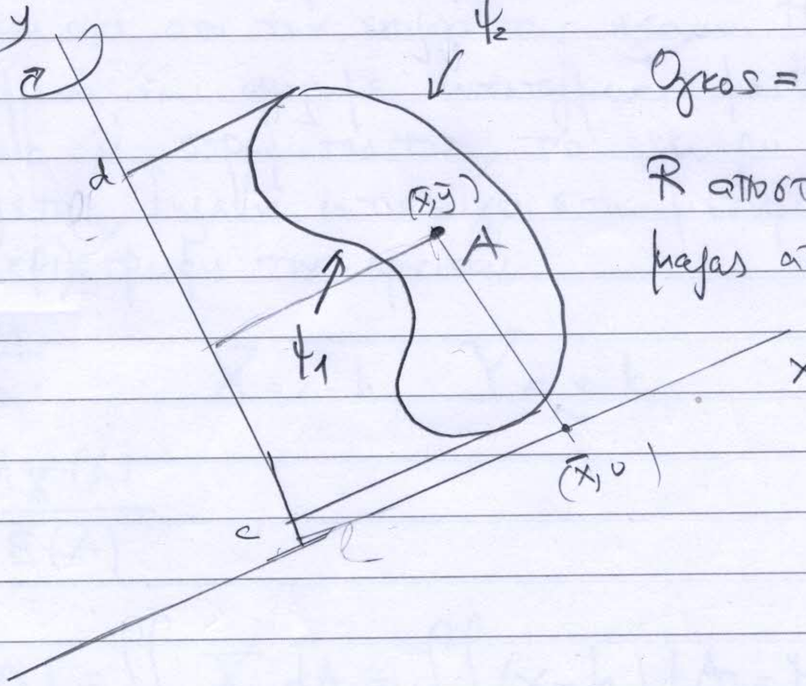
8) Άσκηση 8.8 (—//—)

II

Δεκ. 2014

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ – ΣΧΟΛΙΑ

Ασ. 4 {Το Θεωρημα του Παππου} [§5.17, Ολοκληρωματα]



Ογκος $= (2\pi R)\, E(A)$

R αποσταση κεντρου μαζας απο l

Λυση

Βημα 1

Θα υποθεσωμε οτι ο αξονας l συμπιπτει με τον y-αξονα.

$$A = \{ c \le y \le d \ , \ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \}$$

$$\iint_A x\, dA = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} x\, dx \right) dy = \frac{1}{2} \int_c^d [\psi_2^2(y) - \psi_1^2(y)]\, dy$$

$$R = \bar{x} \ , \quad \bar{x} = \frac{\iint_A x\, dA}{\iint_A 1\, dA}$$

Ογκος εκ περιστροφης : $V = \pi \int_c^d [\psi_2^2(y) - \psi_1^2(y)]\, dy =$

$= (2\pi R)\, E(A).$

Βημα 2

Λημμο

Το κεντρο ενος A εξαρτaται μονο απο την γεωμετρια τη A και οχι απο την επιλογη των αξονων. Πιο συγκεκριμενα εαν αλλαξαμε αντεταγμενες, μεταφεροντας το συστημα ή στρεφοντας το, το κεντρο δεν επηρεαζεται, δηλαδη αντιστοιχει στην μεταφορα ή στην (περι)στροφη των αρχικων.

Αποδειξη

α) Μεταφορα: $X = x-h, \quad Y = y-k$

$$\overline{X} = \frac{M_X(A)}{E(A)}$$

$$M_X(A) = \iint_A X\,dA = \iint_A (x-h)\,dA = M_x(A) - hE(A)$$

$$\overline{X} = \frac{M_X(A)}{E(A)} = \frac{M_x(A) - hE(A)}{E(A)} = \frac{M_x(A)}{E(A)} - h$$

$$= \bar{x} - h.$$

Ομοιως, $\overline{Y} = \bar{y} - k.$

β) Στροφη:

Κανοντας χρηση του α) μπορουμε να υποθεσουμε οτι $(\bar{x},\bar{y}) = (0,0) \Leftrightarrow \iint_A x\,dA = \iint_A y\,dA = 0.$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{aligned} X &= (\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y \\ Y &= (\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y \end{aligned}$$

Έχουμε

$$M_{\mathrm{I}}(A)=\iint_A X\,dA = \cos\alpha\iint_A x\,dA - \sin\alpha\iint_A y\,dA = 0$$

Όμοιως $M_{Y}(A)=0$.

Άρα και στο καινούργιο σύστημα είναι το $(0,0)$.

□

Σημ. – Υποθέσαμε ότι το A περιγράφεται ως χωρίο τύπου 1 για ευκολία. Την γενική περίπτωση μπορούμε να την αναγάγουμε με τεμαχισμό του χωρίου σε αυτών.

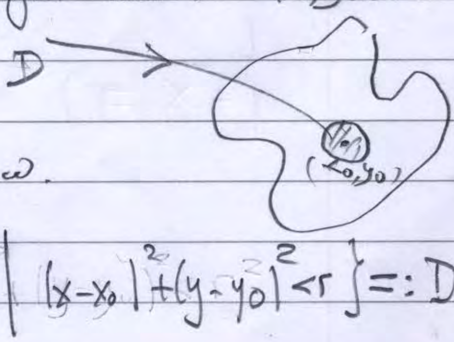
□

Ασκ 7 (σ. 17, Ολοκληρώματα)

f συνεχής στο $A\subset\mathbb{R}^2$, ανοιχτό, $f(x,y)\geq 0$ και $\iint_A f\,dA=0$. Τότε $f(x,y)\equiv 0$ στο $\bar{A}$.

Λύση

Με εις άτοπον απαγωγή. Έστω για κάποιο $(x_0,y_0)\in A$



$$f(x_0,y_0)=\eta>0$$

Τότε λόγω συνέχειας $\exists\, r>0$ τ.ω.

$$f(x,y)>\frac{\eta}{2} \quad \text{για} \quad \{(x,y) \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r\}=:D$$

$D\subset A$

Κατά συνέπεια από το Θεώρημα 2, σ13

$$\iint_D f(x,y)\,dA \geq \iint_D \frac{\eta}{2}\,dA>0.$$

Επίσης έχουμε $A=D\cup(D-A)$ και

$$0=\iint_A f(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA + \iint_{D-A} f(x,y)\,dA$$

$$\geq \iint_D f(x,y)\,dA \geq \iint_D \frac{\eta}{2}\,dA = \frac{\eta}{2}\ \text{Εμβαδον}(D)$$

Άτοπο !

(όπου κάναμε χρήση $f \geq 0 \Rightarrow \iint_{D-A} f\,dA \geq 0$
βλ Θεώρημα 1, σ 13)

□

<u>Οι Επόμενες Ασκήσεις κάνουν χρήση αλλαγής σειράς στην Ολοκλήρωση (βλ σ. 30, Ολοκλήρωμα).</u>

Κάνοντας χρήση του

$$\int_a^b\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$

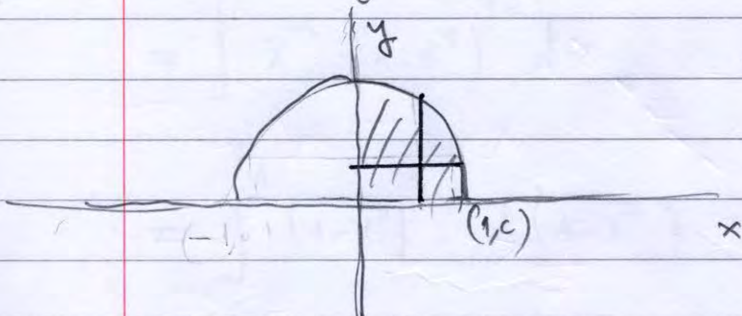
(Σχήμα !)

υπολογίστε τα

1. $$\int_0^1\left(\int_0^{(1-x^2)^{1/2}} (1-y^2)^{3/2}\,dy\right)dx =: I$$

$$A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

(Τύπος 1)



Εναλλακτική περιγραφή

$$A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \right\}$$

(Τύπος 2)

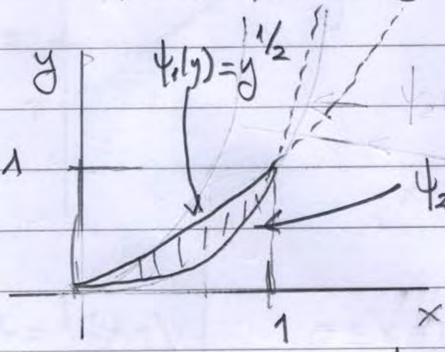
$$I = \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (1-y^2)^{3/2}\,dx\right)dy = \int_0^1 (1-y^3)^2\,dy = \int_0^1 (1+y^4-2y^2)\,dy$$

$$= \left(y + \frac{y^5}{5} - \frac{2}{3}y^3\right)\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3}.$$

Τυπογραφικό

2. $\int_0^1 \left(\int_{y^{1/2}}^{y^{1/5}} \sqrt{1-x^3}\, dx \right) dy = I$

$A = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1, \quad y^{1/2} \le x \le y^{1/5}\}$ (Τυπος 2)



Εναλλακτικα $y^{\frac{1}{2}} = x \Leftrightarrow y = x^2 = \phi_2(x)$

$y^{\frac{1}{5}} = x \Leftrightarrow y = x^5 = \phi_1(x)$

$A_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, \quad x^5 \le y \le x^2\}$ (Τυπος 1)

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x^5} \sqrt{1-x^3}\, dy \right) dx = \int_0^1 (x^5 - x^2)\sqrt{1-x^3}\, dx$$

$x^2(1-x^3)$

$$= \int_0^1 x^2 (1-x^3)^{3/2} dx$$

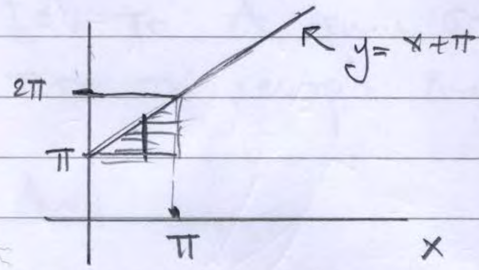
$$= -\int_0^1 (1-x^3)^{3/2} d(1-x^3)$$

$$= -\frac{(1-x^3)^{5/2}}{5/2}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

$\square$

3. $$I = \int_{\pi}^{2\pi} \left(\int_{y-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \right) dy$$

$$A = \{ (x,y) \mid \pi \le y \le 2\pi, \quad y-\pi \le x \le \pi \}$$ (Tutos 2)

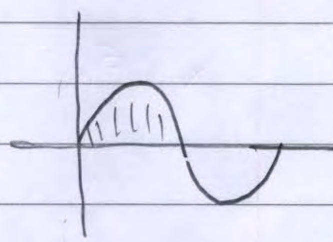


$$y = x + \pi \iff$$

$$A = \{ (x,y) \mid 0 \le x \le \pi, \quad \pi \le y \le x + \pi \}$$

$$I = \int_{0}^{\pi} \left(\int_{\pi}^{x+\pi} \frac{\sin x}{x}\, dy \right) dx$$

$$= \int_{0}^{\pi} \left(\frac{\sin x}{x} \left(\cancel{x} + \pi - \pi \right) \right) dx$$



$$= \int_{0}^{\pi} \sin x \, dx$$

$$= -\cos x \Big|_{0}^{\pi} = 2.$$

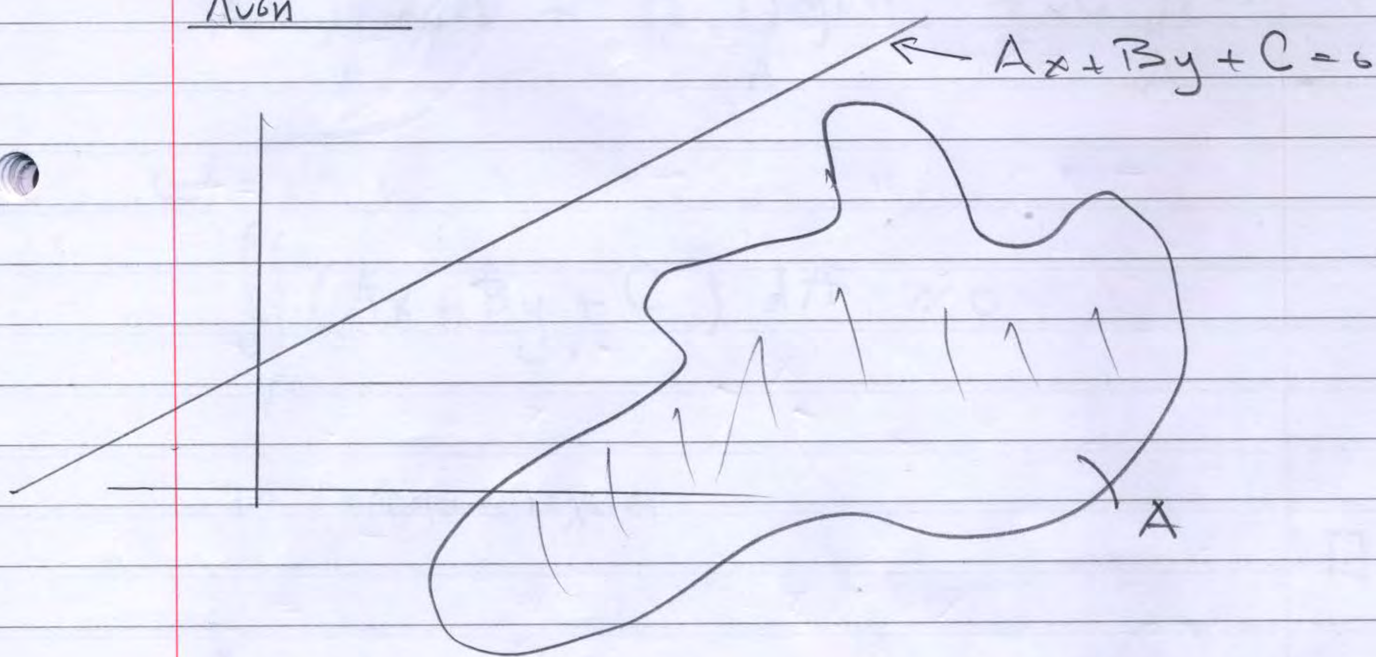
$\square$

Οι επόμενες ασκήσεις σχετίζονται με το κέντρο μάζας

Ασ 5,6 (6.31 , Ολοκλήρωμα)

Εάν το A είναι στην μία πλευρά της $Ax+By+C=0$ τότε το κέντρο είναι στην ίδια πλευρά.

Λύση



$\forall\ (x,y)\in A$ έχουμε

ή $\qquad Ax+By+C\geq 0 \qquad (\alpha)$

ή $\qquad Ax+By+C\leq 0, \qquad (\beta)$

Περίπτωση (α)

$$\bar{x}=\frac{\iint_A x\,dA}{\iint_A dA}\ ,\qquad \bar{y}=\frac{\iint_A y\,dA}{\iint_A dA}$$

Θα δείξουμε ότι $A\bar{x}+B\bar{y}+C\geq 0 \Longleftrightarrow$

$$A \frac{\iint_A x\,dA}{\iint_A dA} + B \frac{\iint_A y\,dA}{\iint_A dA} + C \geq 0 \iff$$

$$A \iint_A x\,dA + B \iint_A y\,dA + C \iint_A dA \geq 0$$

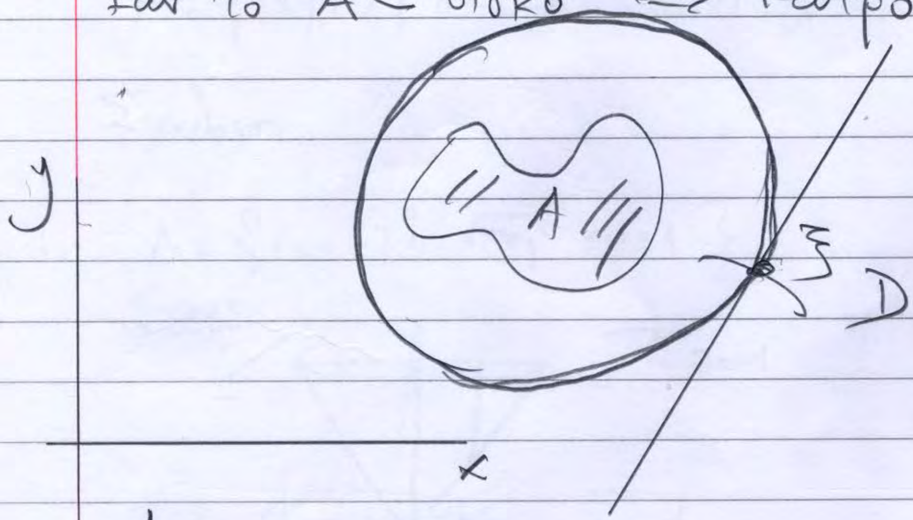
$$\iff \iint_A (Ax + By + C)\, dA \geq 0$$

Το οποίο ισχυει.

$\square$

<u>Ασ7</u>

Εαν το $A \subset$ δισκο $\Rightarrow$ κεντρο $\in$ δισκο $=: D$



<u>Λυση</u>

Θεωραμε μια τυχαια εφαπτομενη στο D,
Τοτε απο Ασ6 $\Rightarrow$ κεντρο στην ιδια ημερα

την ανηκει το A, βρισκεται στο ιδιο ημιχωρο (ημιεπιπεδο).

Συμπεραινουμε οτι

$$A \subset \bigcap_{\xi\in\partial D}\{\text{Ημιχωρος}(\xi)\}$$

Ομως $\displaystyle\bigcap_{\xi\in\partial D} \text{Ημιχωρος}(\xi) = D.$

$$\therefore \quad A\subset D.$$

<u>Σημ</u>: Χρειαζεται καποια προσοχη σχετικα με τον σχηματισμο. ([β] σελ. 43) □

<u>Οι επομενες Ασκησεις σχετιζονται με Τριπλα Ολοκληρωματα.</u>
(Ασκησεις σ. 35 "ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ", και 9.1, 9.2, 9.6 Χατζηαφρατη απο σ. 35, παρον τετραδιο)

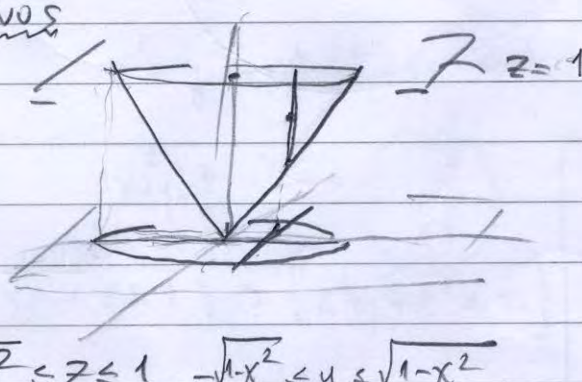
Στις επομενες 3 ασκησεις εκφραστε το στερεο A στην μορφη

$$A=\{(x,y,z)\mid a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x),\ \psi_1(x,y)\le z\le\psi_2(x,y)\}$$

Σχεδιαστε

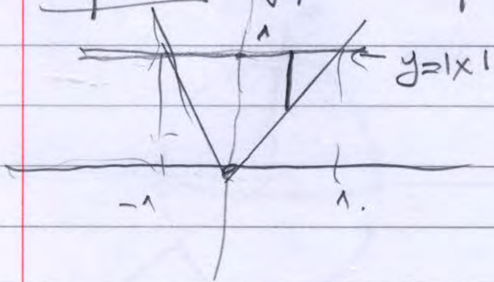
1. $A=\{(x,y,z)\mid \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$

<u>Κωνος</u>



$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1,\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2},\ \ -1\le x\le 1$

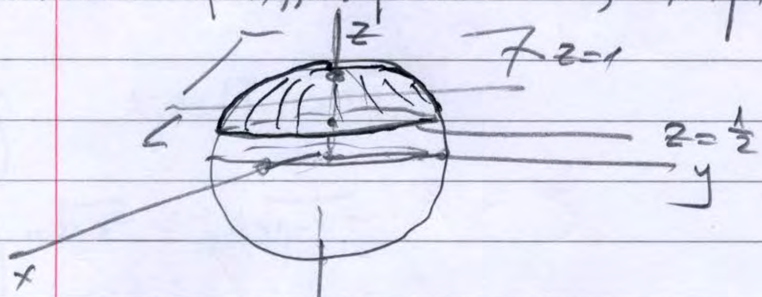
Σημειωση: Συγκρινατε το με το ευκολο 2-διαστασεων αναλογο



$$A = \begin{Bmatrix} |x| \le y \le 1 \\ -1 \le x \le 1 \end{Bmatrix}$$

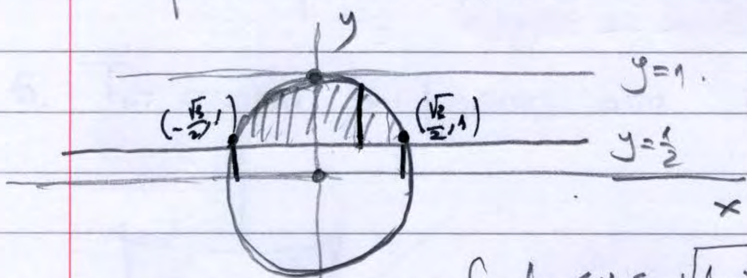
□

2. $A = \{ (x,y,z) \mid \frac{1}{2} \le z \le 1, \ x^2+y^2+z^2 \le 1 \}$



Σφαιρικος Τομεας

Θεωρειστε το ευκολο 2-διαστατων αναλογο:



$$\frac{1}{2} \le y \le 1$$
$$x^2+y^2 \le 1.$$

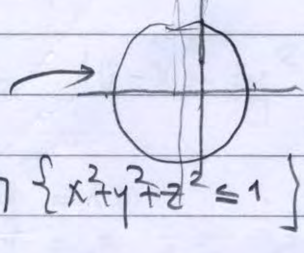
$$A = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix}$$

$$A = \{ \tfrac{1}{2} \le y \le 1 \} \cap \{ x^2+y^2 \le 1 \}$$

Επιστρεφουμε στον σφαιρικο τομεα

$$x^2+y^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \iff x^2+y^2 = \frac{3}{4}$$

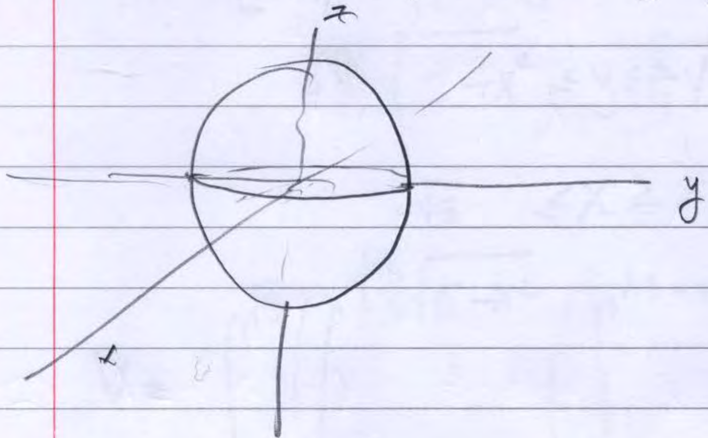
$$x^2+y^2=\frac{3}{4} \longrightarrow$$

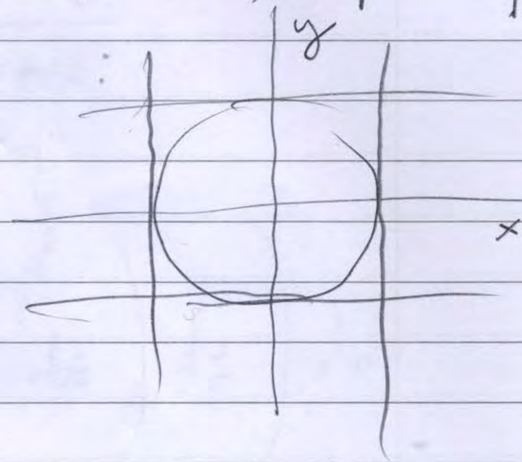


$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{2} &\le z \le \sqrt{1-(x^2+y^2)} \\ -\sqrt{\tfrac{3}{4}-x^2} &\le y \le \sqrt{\tfrac{3}{4}-x^2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} &\le x \le \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}}$$

$$A = \{ \tfrac{1}{2} \le z \le 1 \} \cap \{ x^2+y^2+z^2 \le 1 \}$$

3. $A = \{(x,y,z) \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$



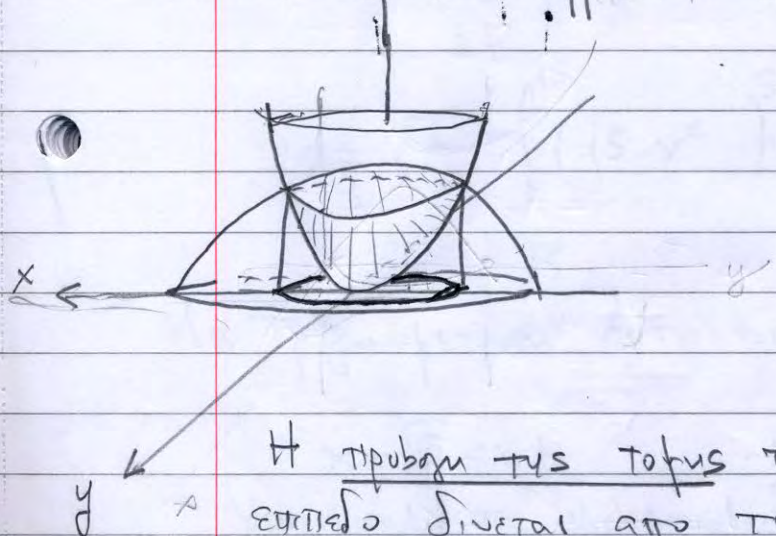


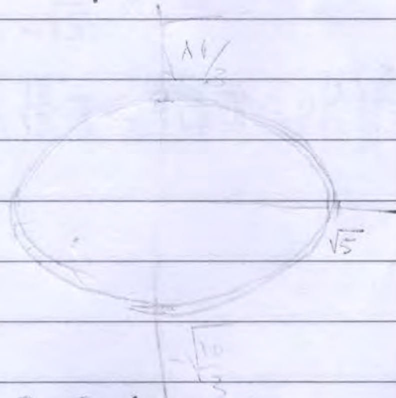
$$\begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{1-(x^2+y^2)} \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ |x| \leq 1 \end{cases}$$

$\sqcap$

Στις επόμενες 3 ασκήσεις βρείτε τον όγκο:

5. Του στερεού που φράσσεται από $z = x^2+y^2$ και $z = 10 - x^2 - 2y^2$



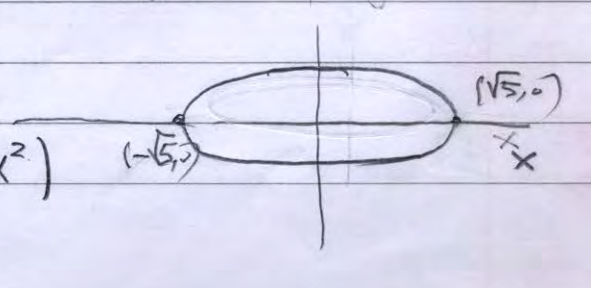


Η προβολή της τομής των δύο επιφανειών στο x-y επίπεδο δίνεται από την έλλειψη:

$$x^2+y^2 = 10 - x^2 - 2y^2 \iff$$

$$2x^2+3y^2 = 10$$

$$y^2 = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x^2 = \frac{2}{3}(5-x^2)$$



$$A = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; x^2+y^2 \le z \le 10 - x^2 - 2y^2, \right.$$
$$-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\sqrt{5-x^2} \le y \le \sqrt{\tfrac{2}{3}}\sqrt{5-x^2},$$
$$\left. -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5} \right\}$$

$$V = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(\int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{5-x^2}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{5-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2}^{10-x^2-2y^2} dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(\int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{5-x^2}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{5-x^2}} (10 - 2x^2 - 3y^2)\, dy \right) dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(10y - 2x^2y - y^3\right)\Big|_{-\sqrt{\ }}^{\sqrt{\ }} dx$$

$$= 20\sqrt{\tfrac{2}{3}} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \sqrt{5-x^2}\, dx - 4\sqrt{\tfrac{2}{3}} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \sqrt{5-x^2}\, x^2\, dx$$

$$-2\frac{2}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(\sqrt{5-x^2}\right)^3 dx = 20\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, I - 4\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, II - 2\left(\tfrac{2}{3}\right)\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, III$$

Με Τριγωνομετρική Αντικατάσταση

$$x = \sqrt{5}\sin\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα:

$$= 20\sqrt{\tfrac{2}{3}}\ \frac{5}{2}\pi - 4\sqrt{\tfrac{2}{3}}\ \frac{25}{2}\pi - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\ \pi\frac{25}{2}$$

$$= 25\pi\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{50\pi}{\sqrt{6}}.$$

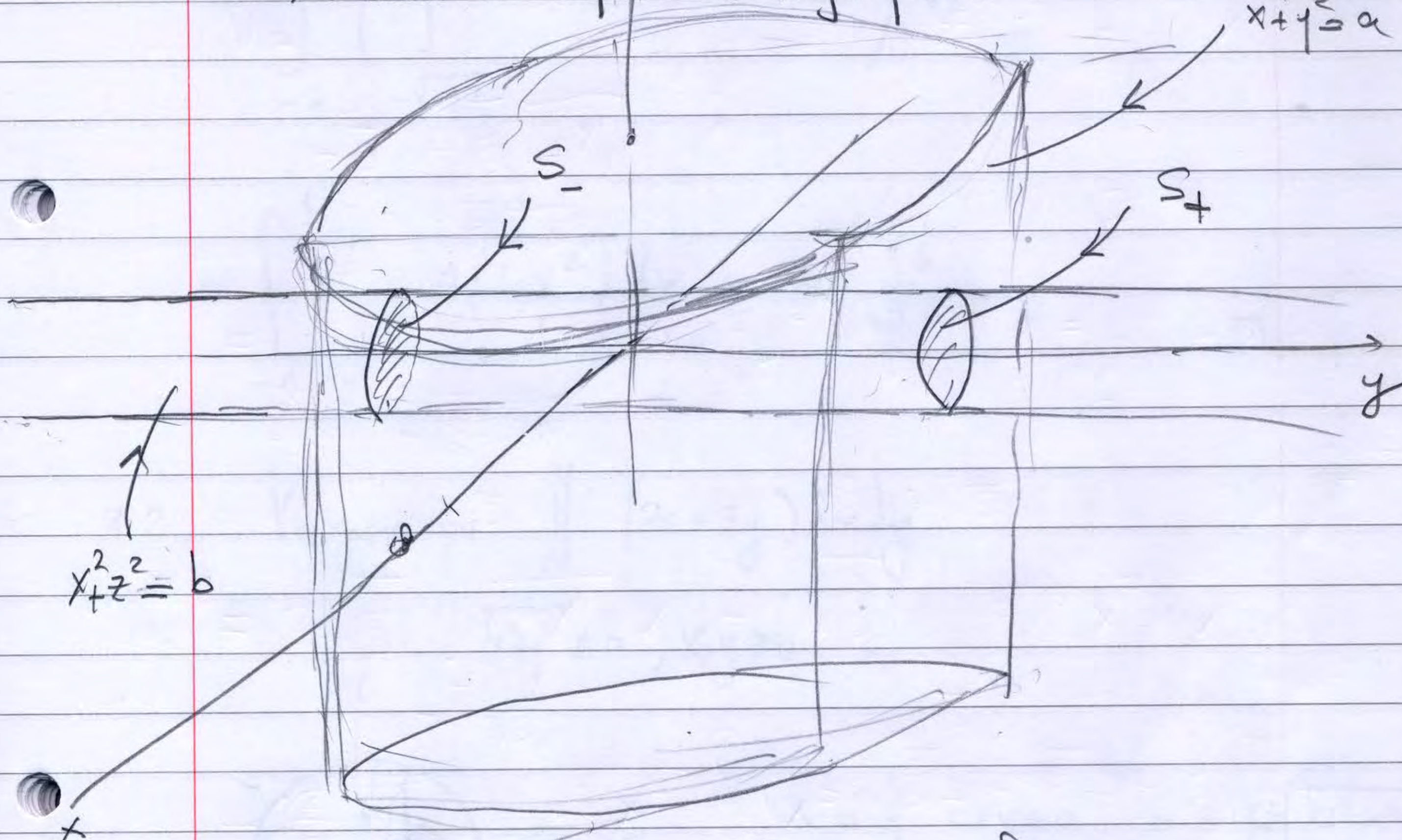
$\square$

9.6 Δειξτε οτι ο ογκος του στερεου

$$A = \{ (x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1 \ , \ x^2+z^2 \leq 1 \}$$

ειναι 16/3.

Το A ειναι η τομη δυο κυλινδρων.



Τομη κυλινδρων διαφορετικων διαστασεων.

$$S_- = \{ y = -\sqrt{a-x^2} \ , \ -\sqrt{b-x^2} \leq z \leq \sqrt{b-x^2} \}$$

$$S_+ = \{ y = \sqrt{a-x^2} \ , \ -\sqrt{b-x^2} \leq z \leq \sqrt{b-x^2} \}$$

$$y_-(x,z) = -\sqrt{a-x^2} \leq y \leq y_+(x,z) = \sqrt{a-x^2}$$

$$-\sqrt{b-x^2} \leq z \leq \sqrt{b-x^2}$$

$$-a \leq x \leq a$$

$a=b=1$

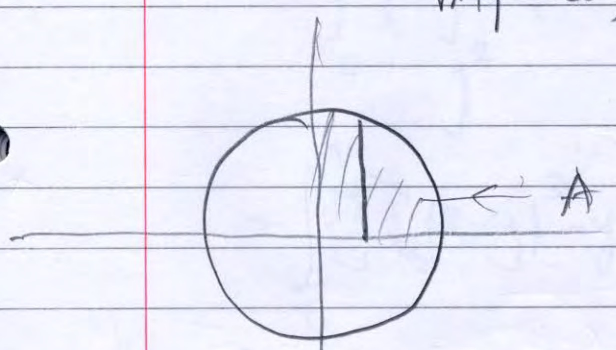
$$V=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{y_-(x,z)}^{y_+(x,z)} dy\right)dz\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2}\, dz\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} 4(1-x^2)\,dx = \frac{16}{3}.$$

□

9.2 Υπολογίστε το $\displaystyle\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le a,\ x,y\ge 0} (2x+3y)\,dx\,dy$



$A=\{0\le x\le a,\ 0\le y\le\sqrt{a^2-x^2}\}$

$$\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}(2x+3y)\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^a\left(2xy+\frac{3}{2}y^2\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int_0^a 2x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3}{2}(a^2-x^2)$$

$$= -\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, d(a^2-x^2) + \int_0^a \frac{3}{2}(a^2-x^2)\,dx$$

$$= a^3 + \frac{3}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^3 = 2a^3$$

$\square$

9.1 Υπολογίστε τον όγκο του στερεού

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0<y<1,\ y^2<x<3-2y,$$
$$0<z<x^2+2y^2\}.$$

$$V = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{3-2y} \left(\int_0^{x^2+2y^2} dz\right) dx\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{3-2y} (x^2+2y^2)\,dx\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left\{\frac{1}{3}\left[(3-2y)^3 - y^6\right] + 2y^2\left[(3-2y)-y^2\right]\right\} dy .$$

$\square$

<u>ΣΧΟΛΙΟ ΕΠΙ FUBINI (Ασ 9.9 Χατζηαφράτη)</u>

9.9 Δείξτε ότι

(*) $$\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\right)dx = \frac{1}{2},\quad \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\right)dy = -\frac{1}{2},$$

δηλαδή δεν ισχύει το Θεώρημα του Fubini!

Η εξηγηση αυτων των φαινομενων εχει ως εξης:

Η θεωρια της ολοκληρωσης που αναπτυξαμε ειναι αυστηρη για συνεχεις συναρτησεις

$$f:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$$

"ΣΤΟ $[a,b]\times[c,d]$" (βλ σ.1 "ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ", και ⊛ σ. 14 "ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ").

Η $f(x,y)=\dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ στο $[0,1]\times[0,1]$ δεν ειναι καν φραγμενη $\left(f(x,0)=\dfrac{1}{x^2}\longrightarrow\infty,\ x\to0\right)$

Επαληθευση της (*)

1. Θεωραμε το 1^o μελος, και ειδικα το εσωτερικο ολοκληρωμα,

$$\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy = x\int_0^1\frac{dy}{(x+y)^3}-\int_0^1\frac{y}{(x+y)^3}\,dy$$

$$= x\,\frac{(x+y)^{-2}}{-2}\Bigg|_{y=0}^{y=1}+\frac{1}{2}\int_0^1 y\,d\left(\frac{1}{(x+y)^2}\right)$$

$$=-\frac{x}{2}\left((x+1)^{-2}-x^{-2}\right)+\left\{\frac{1}{2}y\frac{1}{(x+y)^2}\Bigg|_{y=0}^{y=1}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{(x+y)^2}\,dy\right\}$$

$$=-\frac{x}{2}\left((x+1)^{-2}-\cancel{x^{-2}}\right)+\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\cancel{\frac{1}{x}}\right)\right\}.$$

$$=-\frac{x}{2}\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{2(x+1)}$$

Ολοκληρωνουμε τωρα ως προς x :

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x+1)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x \, d(x+1)^{-1} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}(x)(x+1)^{-1}\Big|_0^1 \cancel{- \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \cancel{+ \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x+1)}\,dx}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

2. Θεωρουμε τωρα το 2° μελος. Το εσωτερικο ολοκληρωμα

$$\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx = -\int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}\,dx$$

Το οποιο με εξαιρεση το προσημο ειναι πανομοιοτυπο με το εσωτερικο του $1^{ου}$ μελους, οπου x και y αντιστρεφουν τους ρολους τους. Κατα συνεπεια, mutatis mutandis παιρνουμε

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\right) dy = -\frac{1}{2}.$$

$\square$

Σημειωση: Το Fubini - Tonelli Θεωρημα.

Εστω ενα απο τα επομενα ολοκληρωματα ειναι

$$\int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)| \, dy \right) dx$$

$$\int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)| \, dx \right) dy$$

$$\iint_A |f(x,y)| \, dA$$

Τοτε ισχυει η αλλαγη στην διαταξη:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \, dx \right) dy$$

$$= \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y) \, dA.$$

$\square$

Σχολιο: Δειξτε οτι στην 9.9 δεν ισχυουν οι υποθεσεις του F-T θεωρηματος.

Η επόμενη άσκηση ανήκει στο 1° μέρος του μαθήματος, στο Διαφορικό Λογισμό.

Θεωρείστε την

$$f(x,y)=\frac{|xy|^{\alpha}}{x^2+y^2}, \quad \text{για } (x,y)\neq(0,0)$$

$$f(0,0)=0,$$

Να βρεθεί για ποια $\alpha\in\mathbb{R}$ η f είναι συνεχής και για ποια είναι διαφορίσιμη.

Λύση

① Συνέχεια

Παρατήρηση 1. Για: $\alpha\leq 1$ η f δεν είναι συνεχής.

• $\alpha=1$

Ομογενής, βαθμού μηδέν

$$f(x,\lambda x)=\frac{|x\,\lambda x|}{x^2+\lambda^2x^2}=\frac{\lambda\,|x|^2}{x^2\,(1+\lambda^2)}=\frac{\lambda}{1+\lambda}$$

Εξάρτηση από λ.

• $\alpha<1$

$$f(x,\lambda x)=\frac{|x\,\lambda x|^{\alpha}}{x^2(1+\lambda^2)}=\frac{\lambda\, x^{2\alpha-2}}{(1+\lambda^2)}\xrightarrow[(x,\lambda x)\to(0,0)]{}\infty$$

Παρατήρηση 2. Για $\alpha>1$ θα δείξουμε συνέχεια.
Πάμε με εκτίμηση

$$|x|^{\alpha}|y|^{\alpha}\leq\frac{1}{2}\left(|x|^{2\alpha}+|y|^{2\alpha}\right)\overset{(*)}{\leq}\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}$$

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|^\alpha |y|^\alpha}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \frac{(x^2+y^2)^\alpha}{(x^2+y^2)} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{\alpha-1} \to 0.$$

<u>Σημ.</u>: Η (*) προκύπτει ως εξής:

$x, y \geq 0 \implies x^\alpha + y^\alpha \leq (x+y)^\alpha$

Πράγματι έστω $x \neq 0$, οπότε $\cancel{x^\alpha}\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\right) \leq \cancel{x^\alpha}\left(1+\frac{y}{x}\right)^\alpha$

$\iff 1+\xi^\alpha \leq (1+\xi)^\alpha, \quad \xi \geq 0.$

Θέτουμε $f(\xi) = 1+\xi^\alpha$, $g(\xi) = (1+\xi)^\alpha$ και βλέπουμε

$f(0) = g(0)$

$f'(\xi) = \alpha\xi^{\alpha-1} \leq \alpha(1+\xi)^{\alpha-1} = g'(\xi).$

(2). <u>Διαφορισιμότητα</u>

Θα δείξουμε ότι για $\alpha > 3/2$ η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

<u>Παρατήρηση 1</u>. Για $\alpha \leq 3/2$ η f δεν είναι διαφορίσιμη. Πορευόμαστε ως εξής. Θεωρούμε την κατευθυνόμενη παράγωγο

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{|tv_1 \, tv_2|^\alpha}{(tv_1)^2+(tv_2)^2} \qquad tv = t(v_1,v_2)$$

$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{|t|^{2\alpha}|v_1v_2|^\alpha}{t^2(v_1^2+v_2^2)}$$

$$= \frac{|v_1v_2|^\alpha}{v_1^2+v_2^2} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} |t|^{2\alpha-2}.$$

Από εδώ βλέπουμε αμέσως ότι για $2\alpha-3<0$ (άπειρο) δεν υπάρχει παράγωγος. Για $2\alpha=3$ παίρνουμε

$$D_v f(0,0) = \frac{|v_1 v_2|^{3/2}}{v_1^2+v_2^2} \frac{d}{dt}|t|\bigg|_{t=0}$$

που ουτε γραμμικη ως προς v ειναι, ουτε η $\frac{d}{dt}|t|$ υπαρχει.

<u>Παρατηρηση 2</u>. Για $\alpha > 3/2$ η f ειναι διαφορισιμη.

Θα κανουμε χρηση του θεωρηματος που λεει οτι εαν το οριο

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x)}{t} = Df(x_0)(v)$$

υπαρχει ομοιομορφα για $\|v\|=1$, τοτε η f ειναι διαφορισιμη. Στην περιπτωση μας θα δειξουμε οτι

$$\lim_{t \to 0} \frac{|v_1 v_2|^{\alpha}}{v_1^2 + v_2^2} \frac{|t|^{2\alpha - 2}}{t} = 0 \quad , \alpha > 3/2$$

ομοιομορφα για $v_1^2 + v_2^2 = 1$.

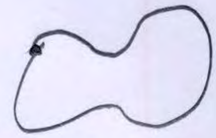
Αυτο ομως ισχυει διοτι

$$\frac{|v_1 v_2|^{\alpha}}{v_1^2 + v_2^2} = |v_1 v_2|^{\alpha} \leq \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2)^{\alpha} = \frac{1}{2}$$

και προφανως $\lim_{t \to 0} \frac{|t|^{2\alpha - 2}}{t} = 0$. $\square$

Οι επομενες 7 ασκησεις ειναι σε επικαμπυλια:

1) Υπολογιστε το $\int_{\gamma} \nabla f \cdot ds$ οπου γ κλειστη καμπυλη.



$\gamma(a)=\gamma(b)$

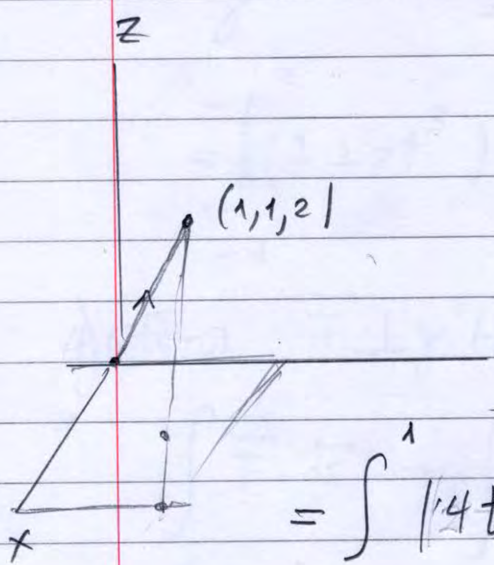
$$\int_\gamma \nabla f \cdot ds = \int_a^b \nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t))\right)dt$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0 \qquad \square$$

2) Έστω $\nabla f(x,y,z) = 2xyz\, e^{x^2}\vec{i} + z e^{x^2}\vec{j} + y e^{x^2}\vec{k}$
και έστω $f(0,0,0)=5$. Βρείτε $f(1,1,2)$.

$$f(1,1,2) - f(0,0,0) = \int_\gamma \nabla f \cdot ds = \int_0^1 \nabla f\cdot\gamma'(t)\,dt$$



$$\gamma = \{\, t(1,1,2) \mid 0 \le t \le 1 \,\}.$$

$x(t)=t,\ y(t)=t,\ z(t)=2t$

$$= \int_0^1 \left(4t^3 e^{t^2}, 2t e^{t^2}, t e^{t^2}\right)\cdot(1,1,2)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(4t^3 e^{t^2} + 2t e^{t^2} + 2t e^{t^2}\right)dt$$

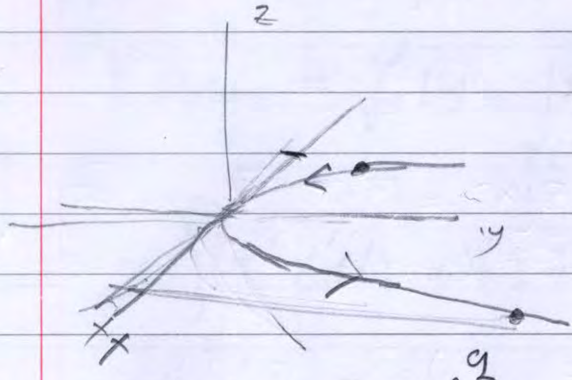
$$= 4\int_0^1 t^3 e^{t^2}\,dt + 4\int_0^1 t e^{t^2}\,dt$$

$$= I + II$$

$$I = 2\int_0^1 t^2\, d(e^{t^2}) = 2\left[t^2 e^{t^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{t^2}\cdot 2t\,dt\right]$$

$$= 2e - 4\int_0^1 t e^{t^2}\,dt = 2e - II. \qquad \square$$

3) Έστω $\bar{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Υπολογίστε το έργο κατά μήκος της παραβολής $y = x^2,\ z = 0$, από το $x=-1$ στο $x=2$.



$$\gamma = \{ (x, x^2, 0),\ -1 \le x \le 2 \}$$

$$\gamma(t) = (t, t^2, 0),\ -1 \le t \le 2$$

$$\gamma'(t) = (1, 2t, 0)$$

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_{-1}^{2} \bar{F} \cdot \bar{\gamma}'(t)\, dt = \int_{-1}^{2} (t, t^2, 0) \cdot (1, 2t, 0)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{2} (t + 2t^3)\, dt = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2} \right) \Big|_{-1}^{2} = 9.$$

$\square$

4) (a) Έστω $\bar{F} \perp \gamma'(t)$. $\iff F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_a^b \bar{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = 0$$

$\square$

(b) Έστω $\bar{F} \parallel \gamma'(t)$ $\left(\bar{F}(\gamma(t)) = \lambda(t) \gamma'(t) \right)$
$\lambda(t) > 0$

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_a^b \bar{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \lambda(t) \|\gamma'(t)\|^2 dt = \int_a^b \lambda(t) \|\gamma'(t)\| \|\gamma'(t)\|$$

$$\int_\gamma \|F\|\, ds = \int_a^b (\lambda(t) \|\gamma'(t)\|) \|\gamma'(t)\| dt = \int_\gamma \|F\| \cdot ds.$$

$\square$

5) Υπολογίστε το $\int_\gamma y\,dx + (3y^3 - x)\,dy + z\,dz$

$\forall$ καμπύλη $\gamma_n(t) = (t, t^n, 0)$, $0 \le t \le 1$, $n = 1, 2, \ldots$

$x(t) = t$, $y(t) = t^n$, $z(t) = 0$

$$= \int_0^1 \left(t^n x'(t) + (3t^{3n} - t)\, y'(t) + 0 \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left[t^n + (3t^{3n} - t)\, n t^{n-1} \right] dt .$$

6) $T = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$

$$\int_\gamma \bar{T} \cdot d\bar{s} = \int_a^b \bar{T} \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$=$ μήκος της γ.

$\square$

7) Εστω η γ εχει μηκος $l(\gamma) = l$.
Δειξτε οτι εαν $\|F\| \leq M$ τοτε

$$\left| \int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s} \right| \leq Ml$$

Αποδειξη

$$\left| \int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s} \right| = \left| \int_a^b \bar{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \right|$$

$$\leq \int_a^b |\bar{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|\, dt$$

$$\leq \int_a^b \|\bar{F}(\gamma(t))\| \, \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$\leq \int_a^b M \, \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$= M \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$= M\, l.$$

$\square$

Οι επομενες 6 ασκησεις ειναι επανω στο

Θεωρημα του Green:

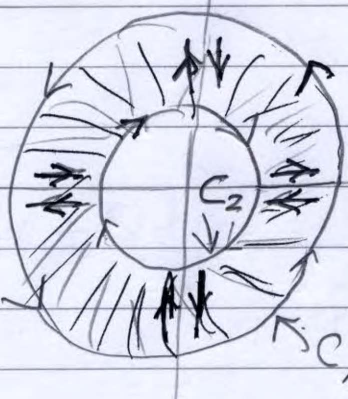
(G) $$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

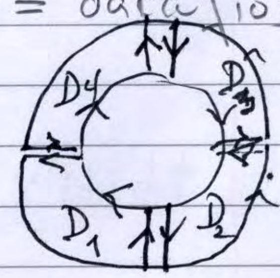
$P, Q \in C^1(D)$

<u>Γενικευση της κλασης D</u>

Εχουμε αποδειξει το (G) για D απλα χωρια (ταυτοχρονα τυπου I και τυπου II). Ισχυει ομως πολυ γενικοτερα. Αυτη η διευρυνση επιτυγχανεται μεσω της ακολουθης τεχνικης:

$D =$ δακτυλιος





Ο D δω ειναι απλο χωριο.
Εκφραζαμε τον D σαν ενωση $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ εισαγοντας τεχνητα εσωτερικα συνορα.
Τα D_i ειναι απλα και σε καθε ενα απο αυτα ισχυει ο Green:

(1) $$\int_{\partial D_i} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$i = 1, 2, 3, 4$

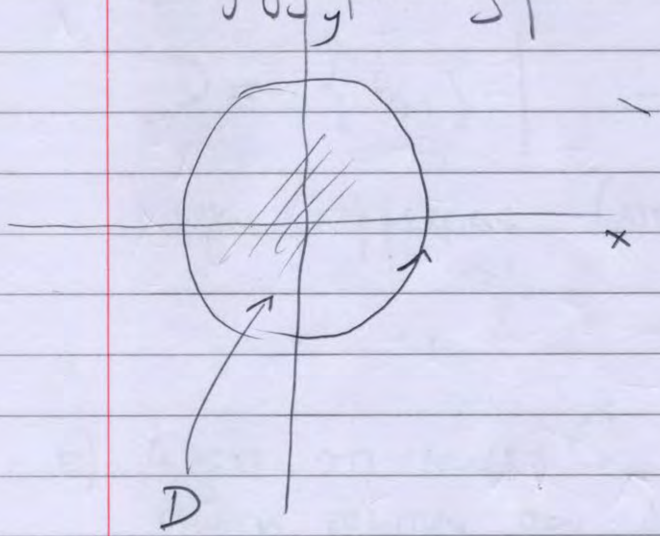
Τα επικαμπυλια στα εσωτερικα συνορα αλληλοαναιρουνται οποτε αθροιζοντας και τα δυο μελη της (1)

Παιρνουμε το (G) επανω στο D:

1) Επαληθευσατε το (G) για $P(x,y)=x$, $Q(x,y)=xy$, με $D=\{x^2+y^2\leq 1\}$.

Λυση

Υπολογιζουμε ανεξαρτητα καθε μελος του (G).



$$\partial D=\gamma$$

$$\gamma=\{(\cos t,\sin t)\mid 0\leq t\leq 2\pi\}$$

$$\int_{\partial D} P\,dx+Q\,dy=\int_0^{2\pi} P(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt+\int_0^{2\pi} Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\cos t\,(-\sin t)+(\cos t\sin t)\cos t\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\sin 2t+(\cos^2 t)(\sin t)\right]dt$$

$$=0.$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

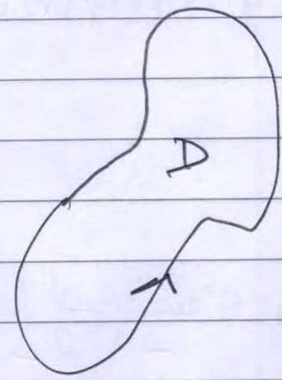
$$= \iint_D y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\right)dx$$

$$D = \left\{ (x,y) \,\middle|\, -1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \right\}$$

λόγω συμμετρίας (περιττότητα) $\displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy = 0.$ $\square$

z) Δείξτε ότι εάν C είναι απλή (χωρίς αυτοτομές) κλειστή καμπύλη που φράζει ένα χωρίο D, τότε το ΕΜΒΑΔΟΝ του χωρίου $E(D)$ δίνεται από

$$E(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$



Απόδειξη

Εφαρμόζουμε το (G) με $Q(x,y) = x$, $P(x,y) = -y$

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= \iint_D (1+1)\,dx\,dy = 2E(D).$$

$\square$

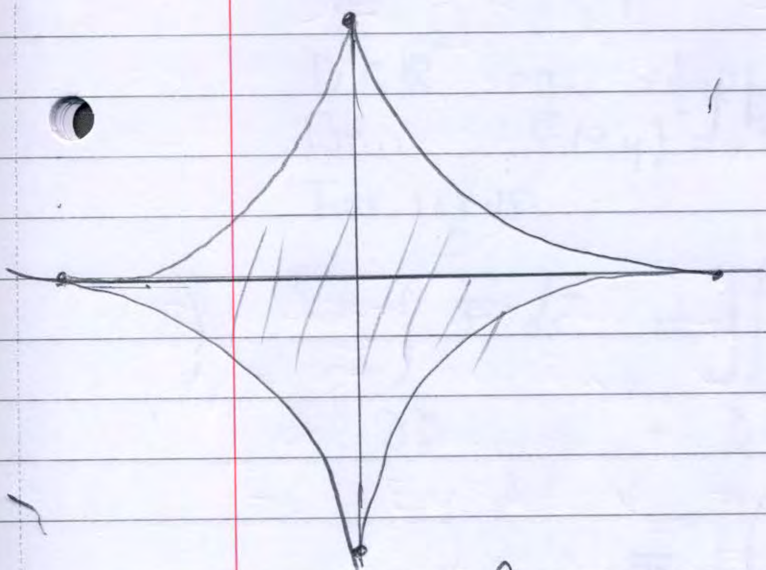
3) Βρειτε το εμβαδον των υποκυκλοειδους

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

κανοντας χρηση της παραμετρησης

$$x = a\cos^3\theta \quad , \quad y = a\sin^3\theta \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Λυση



$x(\theta) = a\cos^3\theta$

$y(\theta) = a\sin^3\theta$

$x'(\theta) = -3a\cos^2\theta\,(-\sin\theta)$

$y'(\theta) = 3a\sin^2\theta\,(\cos\theta)$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{(a\cos^3\theta)\left[3a\sin^2\theta\cos\theta\right] - (a\sin^3\theta)\left[(-3)a\cos^2\theta\sin\theta\right]\right\}d\theta$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta\sin^2\theta)\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1}\,d\theta$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin^2 2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{3}{8}\pi a^2 .$$

$\square$

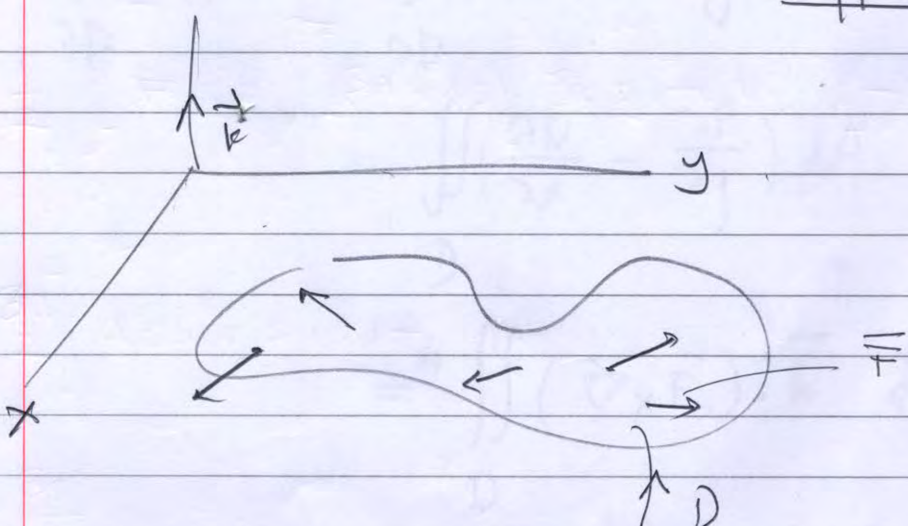
<u>Εναλλακτικες Μορφες του Θεωρηματος του Green</u>

$D \subset \mathbb{R}^2$ οταν εφαρμοζεται το (G).
Εστω $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, $P,Q \in C^1(D)$
Τοτε ισχυει

4) $$\int_{\partial D} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_D (\mathrm{curl}\,\vec{F})\cdot \vec{k} \, dA$$

$$= \iint_D (\nabla \times F)\cdot \vec{k} \, dA .$$

(<u>Μορφη Στροβιλισμου</u>)



Υπενθύμιση (Βλ. Στοβιβλίο)

$$F(x_1,x_2,x_3) = (F_1,F_2,F_3)$$

$$\text{curl } F : \bar{\nabla}\times\bar{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Εαν $F_3 \equiv 0$

$$\text{curl } (P,Q,0) = \begin{vmatrix} i & \hat{j} & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

$$\int_{\partial D} \bar{F}\cdot d\bar{s} = \int_{\partial D} P dx + Q dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_D (\bar{\nabla}\times\bar{F})\cdot\bar{k}\; dA.$$

$\square$

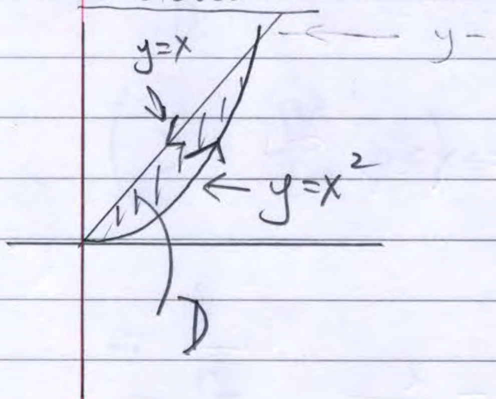
5) Υπολογίστε το

$$\iint_D (\bar{\nabla} \times \bar{F}) \cdot \bar{k} \, dA \qquad , \quad \bar{F} = (xy^2, x+y)$$

όπου D το χωρίο που φράσσεται στο πρώτο τεταρτημόριο από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = x$.

Λύση

Μέθοδος I



$$\iint_D (\bar{\nabla} \times \bar{F}) \cdot \bar{k} \, dA$$

$$= \int_{\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

$$\partial D = \{ (x, x^2) \mid 0 \le x \le 1 \} - \{ (x, x) \mid 0 \le x \le 1 \}$$

$$= \partial_1 D - \partial_2 D.$$

$$\int_{\partial_1 D} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_0^1 (x x^4, x + x^2) \cdot (1, 2x) \, dx$$

$$= \int_0^1 (x^5 + 2x^2 + 2x^3) \, dx = \frac{4}{3}$$

$$\int_{\partial_2 D} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_0^1 (x x^2, x + x) \cdot (1, 1) \, dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 + 2x^2) \, dx = \frac{5}{4}.$$

$$\int_{\partial D} \bar{F}\cdot d\bar{s} = \frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{1}{12}.$$

<u>Μεθοδος II</u>

$$\bar{F} = (P, Q, 0) = (xy^2, x+y, 0)$$

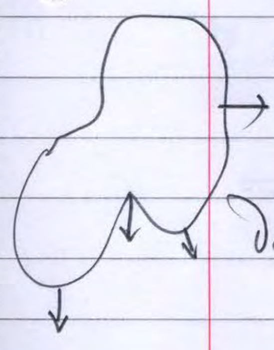
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \left(\int_x^{x^2} (1 - 2xy)\, dy \right) dx$$

$$\left(D = \{ 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq x \} \right)$$

$$= \frac{1}{12}.$$

□

β) $D \subset \mathbb{R}^2$ οπου ισχυει το (G). Εστω $\bar{n}$ το προς τα εξω καθετο στο ∂D, και εστω



$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b$$

θετικα προσανατολισμενη παραμετρηση του ∂D

$$\bar{n}(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{1/2}}.$$

Τοτε ισχυει

$$\int_{\partial D} \bar{F}\cdot\bar{n}\, ds = \iint_D (\operatorname{div} \bar{F})\, dA$$

Απόδειξη

$$\int_{\partial D} \bar{F}\cdot\bar{n}\, ds = \int_a^b (P,Q)\cdot\bar{n}\ \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{\left[P(x(t),y(t))\,y'(t) - Q(x(t),y(t))\,x'(t)\right]}{\cancel{[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{1/2}}}\cancel{\left[(x')^2+(y')^2\right]^{1/2}} dt$$

$$= \int_a^b \left(P(x(t),y(t))\,y'(t) - Q(x(t),y(t))\,x'(t)\right) dt$$

$$= \int_{\partial D} P\, dy - Q\, dx$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_D \operatorname{div} \bar{F}\, dA.$$

$\square$

1) Για την $f(x,y) = \left(1-\cos\frac{x^2}{y}\right)\sqrt{x^2+y^2}$ για $y \neq 0$
και $f=0$ για $y=0$ δείξτε
(a) Συνέχεια στο $(0,0)$
(b) Η f δεν είναι διαφορίσιμη
(c) Υπολογίστε τις κατευθυνόμενες στο $(0,0)$.

Λύση

(a) $$|f(x,y)| = \left|1-\cos\frac{x^2}{y}\right|\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\leq \left(|1|+\left|\cos\frac{x^2}{y}\right|\right)\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\leq 2\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0 \quad \text{όπως } (x,y)\to(0,0)$$

(b) $$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(tv_1,tv_2) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(1-\cos\frac{t^{\cancel{2}}v_1^2}{\cancel{t}v_2}\right)\sqrt{t^2(v_1^2+v_2^2)}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(1-\cos\frac{tv_1^2}{v_2}\right)|t|$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\left(1-\cos\frac{tv_1^2}{v_2}\right)|t|}{t}$$

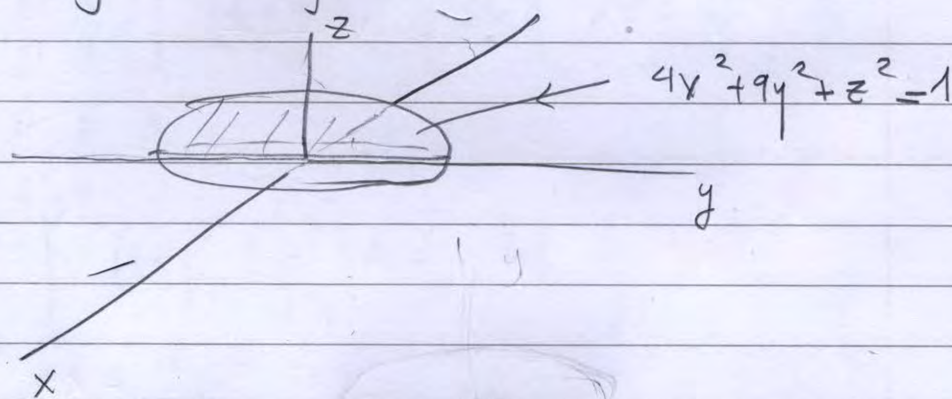
Επιλέγοντας $t \geq 0$ βλέπουμε ότι
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\left(1-\cos\frac{tv_1^2}{v_2}\right)\cancel{t}}{\cancel{t}} = 0$$
$$\lim_{t\to 0^-}\frac{\left(1-\cos\frac{tv_1^2}{v_2}\right)(-t)}{t} = 0$$
Το όριο όμως δεν υπάρχει ομοιόμορφα
για $v_1^2+v_2^2=1$. Πράγματι θέτουμε $v_2=t$, $v_1^2=1-t^2$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1-\cos(1-t^2))}{t} = \begin{cases} 1-\cos 1, & t\to 0+ \\ -(1-\cos 1), & t\to 0- \end{cases}$$

Το οριο δεν υπαρχει, και αυτο δεν ειναι ισο με την κατευθυνομενη παραγωγο στο $(0,0)$.

2) Υπολογιστε το $\iiint_E (1-4x^2-9y^2-z^2)\,dxdydz$

$B = \{ 4x^2+9y^2+z^2 \le 1 \}$



Λυση

Μετασχηματισμος σε Σφαιρα - Μπαλα

$x=\lambda x'$, $y=\mu y'$, $z=\nu z'$

$4x^2+9y^2+z^2 = 4\lambda^2 x'^2 + 9\mu^2 y'^2 + \nu z'^2$

$\lambda=\frac{1}{2}$, $\mu=\frac{1}{3}$, $\nu=1$

$\iiint_E (1-(4x^2+9y^2+z^2))\,dxdydz$, $B=\{x'^2+y'^2+z'^2\le 1\}$

$$= \iiint_B (1-(x'^2+y'^2+z'^2)) \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x',y',z')} dx'dy'dz'$$

$$= \iiint_{x'^2+y'^2+z'^2\le 1} [1-(x'^2+y'^2+z'^2)] \left|\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}\right| dx'dy'dz'$$

$$=(\lambda\mu\nu) \iiint_{x'^2+y'^2+z'^2\le 1} [1-(x'^2+y'^2+z'^2)]\, dx'dy'dz'.$$

Σφαιρικές Συντεταγμένες.

$$= (\lambda\mu\nu) \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} (1-\rho^2)\rho^2 \sin\phi \, d\theta \right) d\phi \right) d\rho$$

$$= 2\pi (\lambda\mu\nu) \int_0^1 \int_0^{\pi} (1-\rho^2)\rho^2 \sin\phi \, d\phi \, d\rho$$

$$=(2\pi)(\lambda\mu\nu) \left(\int_0^1 (1-\rho^2)\rho^2 d\rho \right) \left(\int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi \right)$$

$$=(2\pi)(\lambda\mu\nu)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)(2).$$

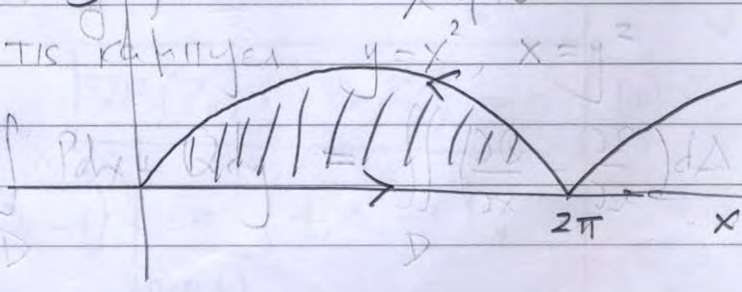
$\square$

3) Βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από ένα τόξο του κυκλοειδούς

$x(\theta) = a(\theta - \sin\theta)$

$y(\theta) = a(1-\cos\theta)$

$a>0$, $0\le\theta\le 2\pi$



$$E(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(x\,dy - y\,dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a(\theta - \sin\theta)\,a\sin\theta - a(1-\cos\theta)\,a(1-\cos\theta)\right]d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[\theta\sin\theta - \sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2\right]d\theta$$

$$I = \int_0^{2\pi}\theta\sin\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\theta\,d(-\cos\theta) = \theta(-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$$

$$II = \int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi}(1+\cos^2\theta - 2\cos\theta)\,d\theta = 2\pi + \pi - 0 = 3\pi$$

$$III = -\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta = -\pi.$$

$$\therefore \quad E(D) = \pi a^2. \qquad \square$$

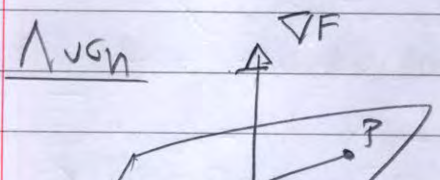
4) Εστω $F(x,y,z) = x^2y + ye^x - z$

(a) Βρειτε το εφαπτομενο επιπεδο στην $F(x,y,z)=0$ στο $P_0(0,1,1)$.

(b) Βρειτε τον μεγιστο ρυθμο αυξησης της $F(x,y,z)$ στο $Q=(0,-1,2)$, και την αντιστοιχη κατευθυνση.

Λυση

(a)



$$\nabla F(P_0) \perp \{(x,y,z) \mid F=0\}$$

$$\boxed{\nabla F(P_0)\cdot(P-P_0) = 0} \quad (*)$$

$$\nabla F(P_0) = (2xy+y,\ x^2+e^x,\ -1)\Big|_{(0,1,1)} = (1,1,-1).$$

$$P - P_0 = (x,\ y-1,\ z-1)$$

$$(*) \iff (x, y-1, z-1)\cdot(1,1,-1)=0 \iff$$

$$x + y - \cancel{1} + \cancel{1} - z = 0 \iff \boxed{x+y+z=0}$$

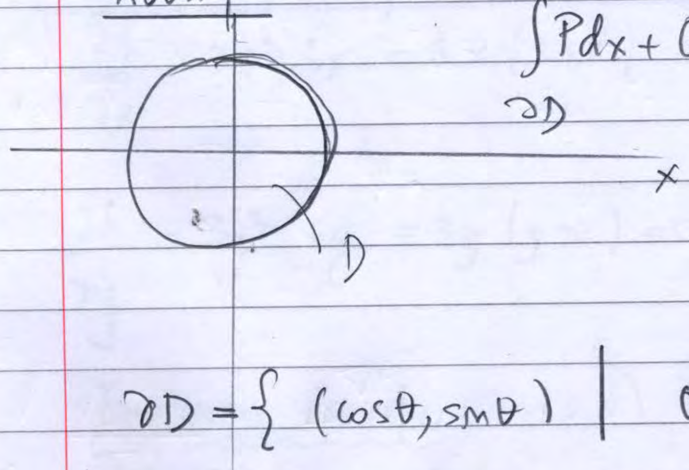
(b) $\|\nabla F(Q)\|^2$ μέγιστη αύξηση, $\nabla F(Q)$ η κατεύθυνση.

$$\nabla F(Q) = (2xy+y,\ x^2+e^x,\ -1)\Big|_{\substack{x=0\\ y=-1\\ z=2}} = (-1,1,-1)$$

$$\|\nabla F(Q)\|^2 = 1+1+1 = 3.$$

5) Δείξτε ότι για $P(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ και D τον μοναδιαίο δίσκο, το Θεώρημα του Green δεν ισχύει. Εξηγήσεις.

Λύση



$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$\partial D = \{ (\cos\theta, \sin\theta) \mid 0 \le \theta \le 2\pi \}$$

$$x(\theta) = \cos\theta \Rightarrow x'(\theta) = -\sin\theta$$
$$y(\theta) = \sin\theta \Rightarrow y'(\theta) = \cos\theta$$

$$\int_{\partial D} = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\sin\theta}{1}(-\sin\theta) + \frac{\cos\theta}{1}(\cos\theta) \right] d\theta = 2\pi$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

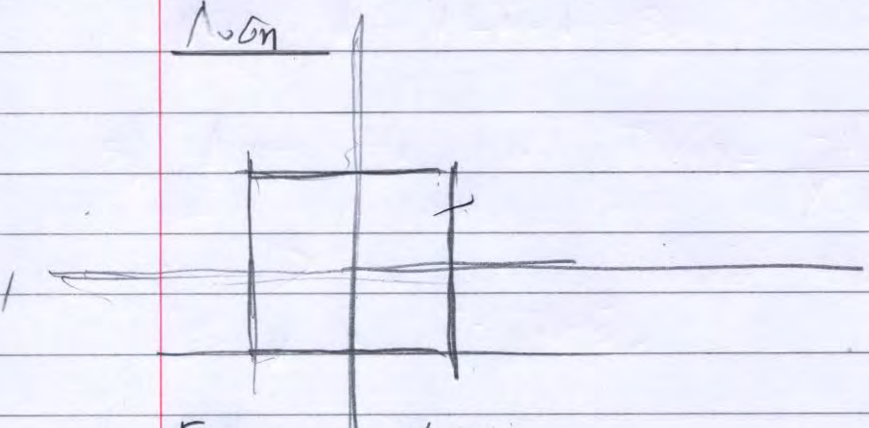
Εξήγηση: $P, Q \notin C^1(D)$.

$\blacksquare$

6) Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της

$$f(x,y) = x^3+y^3+3x^2-3y^2, \quad \{(x,y) \mid |x|\le 1, |y|\le 1\}.$$

Λύση



1. Εσωτερικά Κρίσιμα

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+6x = 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x=0, \ x=-2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2-6y = 3y(y-2) = 0 \Rightarrow y=0, \ y=2$$

Εσωτερικό κρίσιμο: $(0,0)$ $\boxed{f(0,0)=0}$

2. Στο σύνορο

α) $f(1,y) = 1+y^3+3-3y^2 = y^3-3y^2+4$

$\boxed{f(1,1)=2}$, $\boxed{f(1,-1)=0}$

$f_y(1,y) = 3y^2-6y = 3y(y-2) = 0 \Rightarrow y=0, \ y=2$

$\boxed{f(1,0)=4}$

β) $f(-1,y) = y^3-3y^2+2$, $\boxed{f(-1,\pm 1) = 0, -2}$

$f_y(-1,y) = 3y^2-6y = 3y(y-2) = 0 \Rightarrow y=0$, $\boxed{f(-1,0)=2}$

γ) $f(x,1) = x^3 + 1 + 3x^2 - 3 = x^3 - 2$

$f_x(x,1) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, \ \boxed{f(0,1) = -2}$

$\boxed{f(\pm 1, 1) = -1, -3.}$

δ) $f(x,-1) = x^3 + 3x^2 - 4$

$f_x(x,-1) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0, \ \boxed{f(0,-1) = -4}$

$\boxed{f(\pm 1, -1) = 0, -2}$

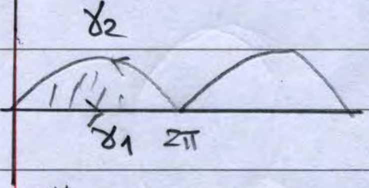
Min $\quad f(0,-1) = -4$

Max $\quad f(1,0) = 4$

II

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Διόρθωση Στο Εμβαδόν κυκλοειδούς – σ 72 "Λύσεις... Σχόλια"



Προσανατολισμός όπως στο Σχήμα

$$E(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy-ydx = \frac{1}{2}\int_{\gamma_1}(xdy-ydx)+\frac{1}{2}\int_{\gamma_2}(xdy-ydx)$$

$$\int_{\gamma_1} xdy-ydx=\int_0^{2\pi}(x(t)y'(t)-y(t)x'(t))dt=\int_0^{2\pi}(t\cdot 0-0\cdot 1)dt=0$$

$\gamma_1=\{x(t)=t,\ y(t)=0,\quad 0\le t\le 2\pi\}$

$$\int_{\gamma_2} = -\int_{-\gamma_2} = -\int_0^{2\pi}\{a(\theta-\sin\theta)a\sin\theta - a(1-\cos\theta)a(1-\cos\theta)\}d\theta$$

$-\gamma_2=\{x(\theta)=a(\theta-\sin\theta),\ y(\theta)=a(1-\cos\theta),\quad 0\le\theta\le 2\pi\}$

$$=-a^2\int_0^{2\pi}\{\theta\sin\theta-\sin^2\theta-(1-\cos\theta)^2\}d\theta$$

$(1-\cos\theta)^2=1+\cos^2\theta-2\cos\theta$

$$=-a^2\left\{\int_0^{2\pi}\theta\sin\theta\, d\theta-\overset{\pi}{\cancel{\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta}}-\overset{2\pi}{\cancel{\int_0^{2\pi}1\, d\theta}}-\overset{\pi}{\cancel{\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta}}+2\overset{0}{\cancel{\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta}}\right\}$$

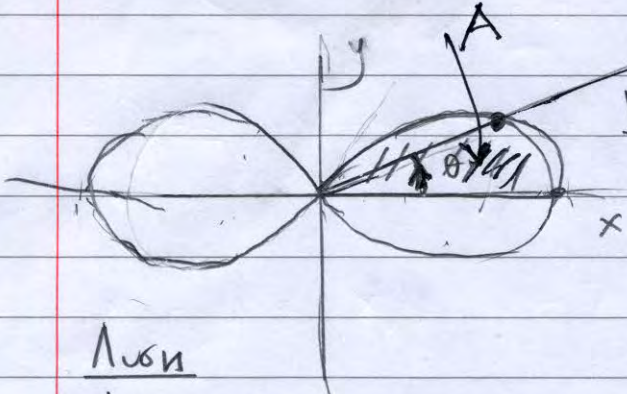
$$\left(\int_0^{2\pi}\theta\sin\theta\, d\theta=-\int_0^{2\pi}\theta\, d(\cos\theta)=-\theta\cos\theta\Big|_0^{2\pi}+\overset{0}{\cancel{\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta}}=-2\pi\right)$$

$$=-a^2\{-2\pi-\pi-2\pi-\pi\}=6\pi a^2$$

$\Rightarrow E(D)=3\pi a^2.$ $\square$

Η επομενη ασκηση αφορα καμπυλες σε πολικη μορφη - γενικοτερα Πολικες Συντεταγμενες.

1) Υπολογιστε το εμβαδον του χωρου D στο επιπεδο που περικλειεται απο τον λημνισκο $r^2=a^2\cos(2\theta)$ [Βλ Σχ]



$0\le\theta\le\pi$

$[0,\pi]=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$

Λυση

Λογω συμμετριας υπολογιζουμε το $\frac{1}{4}E(D)$

$r=f(\theta)=a\sqrt{\cos 2\theta}$, $\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

$$\iint_A dx\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta\,d\theta=\frac{a^2}{4}$$

(Βλεπε Αλλαγη Μεταβλητων σ. 5)

□

2) Ασ 56)

$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$

a) Εαν $AC-B^2\neq 0 \Rightarrow f$ εχει ακριβως ενα κρισιμο σημειο.

Απ

$\frac{\partial f}{\partial x}=2Ax+2By+2D=0 \qquad Ax+By=-D$

$\iff$

$\frac{\partial f}{\partial y}=2Cy+2Bx+2E=0 \qquad Bx+Cy=-E$

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = AC - B^2 \neq 0, \text{ οποτε}$$

λυση μοναδικη,

$$\bar{x} = \frac{\begin{vmatrix} -D & B \\ -E & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \quad \bar{y} = \frac{\begin{vmatrix} A & -D \\ B & -E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}$$

b) (Το κρισιμο σημειο).

c) Ποια ειναι τα κρισιμα σημεια εαν $A^2+B^2+C^2 \neq 0$
Εστω $A \neq 0$. Τοτε τα κρισιμα σημεια κειτονται επι της ευθειας

$$x = -\frac{B}{A}y - \frac{D}{A}.$$

Αναλογα και στις αλλες περιπτωσεις.

$\square$

3) Ασ 58)

$$f(x,y) = e^{25-x^2-y^2}$$

Βρειτε την εξισωση του εφαπτομενου επιπεδου στο $(3,4)$ και μελετηστε εαν η $z = f(x,y)$ ειναι (τοπικα) απο πανω, απο κατω, ή το τεμνει.

Λυση

Γενικα $\quad z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$

$$z_0 = f(3,4) = e^{25-9-16} = 1$$

$$f_x = e^{\square}(-2x) \Rightarrow f_x(3,4) = (-2\cdot 3) = -6$$

$$f_y = e^{\square}(-2y) \Rightarrow f_y(3,4) = (-2\cdot 4) = -8$$

$$z - 1 = (-6)(x-x_0) + (-8)(y-y_0) \quad \text{(Εφ. Επιπεδο)}$$

$$f_{xx} = e^{\square}(4x^2) + e^{\square}(-2), \quad f_{yy} = e^{\square}(4y^2) + e^{\square}(-2)$$

$f_{xy} = e^{\square} 4xy$

$f_{xx}(3,4) = 1 \cdot 4(3^2) + 1 \cdot (-2) = 34$
$f_{yy}(3,4) = 1 \cdot 4(4^2) + 1 \cdot (-2) = 62$
$f_{xy}(3,4) = 1 \cdot 4(3)(4) = 48$
$f_{xx}(3,4) f_{yy}(3,4) - f_{xy}^2(3,4) = (34)(62) - (48)^2 < 0$

Το τεμνει.

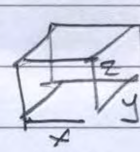
$\square$

4) Ασ 59)
Δειξτε οτι η $z = 3x^2 - 2xy + 2y^2$ κειται επανω απο καθε εφαπτομενο επιπεδο.
Λυση
$z = f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 2y^2$
$f_x = 6x - 2y$
$f_{xx} = 6$
$f_y = -2x + 4y$
$f_{yy} = 4$
$f_{xy} = -2$

$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (6)(4) - (4) = 20 > 0.$
$f_{xx} > 0.$

$\therefore$ Ολα τα εφαπτομενα ειναι απο επανω.

$\square$



5) Ασ 61)
Μεταξυ ολων των ορθογωνιων παραλληλεπιπεδων ογκου V βρειτε τις διαστασεις αυτου με την ελαχιστη επιφανεια
Λυση
Εστω x, y, z οι διαστασεις.
(i) $xyz = V$

$E = 2xy + 2yz + 2xz$

(i) $\Rightarrow z = \dfrac{V}{xy}$

(ii) $E(x,y) = 2xy + 2y\dfrac{V}{x\cancel{y}} + 2\cancel{x}\dfrac{V}{\cancel{x}y}$

$= 2xy + \dfrac{2V}{x} + \dfrac{2V}{y}$

$0 = \dfrac{\partial E}{\partial x} = \cancel{2}y - \dfrac{\cancel{2}V}{x^2} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{V}{x^2}} \Leftrightarrow x^2y = V$

$0 = \dfrac{\partial E}{\partial y} = 2x - \dfrac{2V}{y^2} \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{V}{y^2}} \Leftrightarrow xy^2 = V$

$\therefore x^{\cancel{2}}\cancel{y} = \cancel{x}y^{\cancel{2}} \Leftrightarrow x = y.$ (Κυβος ελαχιστοποιει των επιφανεια)

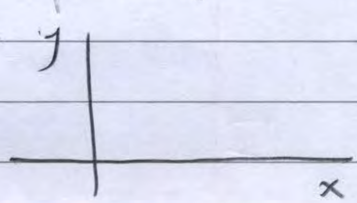
$V = x^2y = x^3 \Rightarrow x = V^{1/3}, \; y = V^{1/3}$

$z = \dfrac{V}{xy} \Rightarrow z = V^{1/3}$

$(V^{1/3}, V^{1/3})$ μοναδικο κρισιμο σημειο της $E(x,y)$

<u>Τροπος 1</u>

$\lim_{x \to 0} E(x,y) = \lim_{y \to 0} E(x,y) = \infty$



Επισης

$\lim_{x \to +\infty} E(x,y) = \lim_{y \to +\infty} E(x,y) = \infty$.

Αναγκαστικα το $(V^{1/3}, V^{1/3})$ ειναι ελαχιστο.

Τροπος 2

$$E_{xx} = \frac{2V}{x^3}, \quad E_{yy} = \frac{2V}{y^3}, \quad E_{xy} = 1$$

$$E_{xx}E_{yy} - E_{xy}^2 \Big|_{\substack{x=V^{1/3} \\ y=V^{1/3}}} = \frac{2V}{x^3}\,\frac{2V}{y^3} - 1 \Big|_{\substack{x=V^{1/3} \\ y=V^{1/3}}} = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

Ελαχιστο (Η επιφανεια απο επανω).

$\square$

6) Δειξτε οτι αν $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$, τοτε η συναρτηση

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+t) + f(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds$$

ικανοποιει την κυματικη εξισωση:

$$u_{tt} = u_{xx}$$

και τις αρχικες συνθηκες

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x)$$

Λυση

$$u_t = \frac{1}{2}\left[f'(x+t)\frac{d}{dt}(x+t) + f'(x-t)\frac{d}{dt}(x-t)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[g(x+t)\frac{d}{dt}(x+t) - g(x-t)\frac{d}{dt}(x-t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[f'(x+t) - f'(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right]$$

$$u_{tt} = \frac{1}{2}\left[f''(x+t) + f''(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[g'(x+t) - g'(x-t)\right].$$

$$u_x = \frac{1}{2}\left[f'(x+t) + f'(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[g(x+t) - g(x-t)\right]$$

$$u_{xx} = \frac{1}{2}\left[f''(x+t) + f''(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[g'(x+t) - g'(x-t)\right]$$

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \checkmark$$

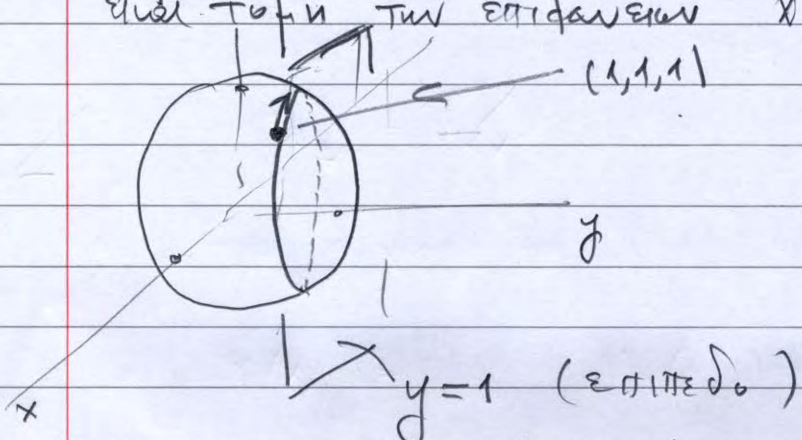
$$u(x,0) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(x)\right] + \frac{1}{2}\cancel{\int_x^x g(s)ds} = f(x)$$

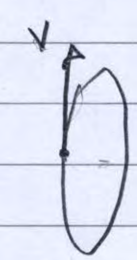
$$u_t(x,0) = \frac{1}{2}\left[f'(x+t) - f'(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right]\Big|_{t=0}$$

$$= g(x).$$

□

7) α) Βρείτε παραμετρική μορφή της καμπύλης που είναι τομή των επιφανειών $x^2+y^2+z^2=3$ και $y=1$





$y=1$ (επίπεδο)

$$\{x^2+y^2+z^2=3\} \cap \{y=1\} = \{x^2+z^2=2\} \cap \{y=1\}$$

$x(t) = \sqrt{2}\cos t$

$z(t) = \sqrt{2}\sin t$

$y(t) = 1$

β) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στην καμπύλη στο σημείο $(1,1,1)$

<u>Εφαπτόμενο Διάνυσμα</u> $(x'(t), y'(t), z'(t))$

$\gamma' = (-\sqrt{2}\sin t, 0, \sqrt{2}\cos t)$

Σημείο $(1,1,1)$ αντιστοιχεί στο $t = \frac{\pi}{4}$:

$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

$z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1$

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$V = \left(x'\left(\frac{\pi}{4}\right), y'\left(\frac{\pi}{4}\right), z'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(-\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= (-1, 0, 1)$

<u>Εφαπτόμενη Ευθεία</u> (σε παραμετρική μορφή)

$P - P_0 = sV \iff \qquad s \in \mathbb{R}$

$(x,y,z) - (1,1,1) = s(-1,0,1), \quad s \in \mathbb{R}.$

$x - 1 = -s$
$y - 1 = 0$
$z - 1 = s$

γ) Εκφράστε το μήκος της καμπύλης σε μορφή ολοκληρώματος και υπολογίστε το.

Υπενθύμιση

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Εαν $F = 1 \Rightarrow \int_\gamma ds = \text{μηκος} = \ell(\gamma)$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

$$= \sqrt{2\sin^2 t + 0 + 2\cos^2 t}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\,(2\pi).$$

$\square$

8) Εστω $\bar{F}(x,y,z) = 3xy^2\,\vec{i} + (x^3 + y)\,\vec{j}$

α) Δειξτε οτι $\operatorname{curl} F = 0$

$$\operatorname{curl} \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \vec{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3xy^2 & x^3+y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 3x^2y & x^3+y \end{vmatrix} = \vec{k}\,(3x^2 - 3x^2) = 0$$

β) Βρειτε συναρτηση f τ.ω. $\bar{F} = \nabla f$

Επειδη η $\bar{F}$ δεν εξαρταται απο το z μπορουμε να παρουμε f ανεξαρτητη του x

$$f(x,y), \quad \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, 0 \right)$$

Κατα συνεπεια

$$\bar{F} = \nabla f \iff$$

$$3x^2 y = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad (1)$$

$$x^3 + y = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad (2)$$

(Οπως στις ακριβεις εξισωσεις)

$$(1) \Rightarrow \quad f(x,y) = \int 3x^2 y \, dx + g(y)$$

$$= 3y \frac{x^3}{3} + g(y)$$

$$= x^3 y + g(y).$$

Διαφοριζοντας την $f(x,y)$ ως προς y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + g'(y)$$

και κανοντας χρηση της (2)

$$x^3 + y = x^3 + g'(y) \iff y = g'(y) \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2}.$$

$$\therefore f(x,y) = x^3 y + \frac{1}{2} y^2.$$

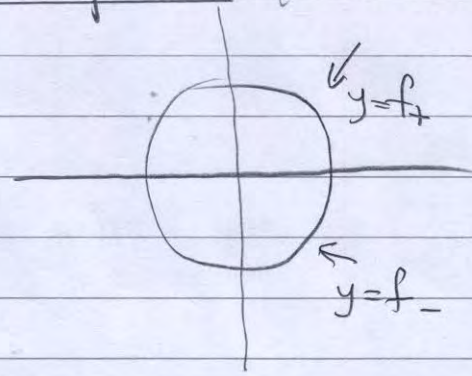
$\blacksquare$

Το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης (Θ.Π.Σ.)

1. $x^2+y^2-1=0$ ορίζει

$y=f_+(x)=\sqrt{1-x^2}$, για $y>0$

$y=f_-(x)=-\sqrt{1-x^2}$, για $y<0$

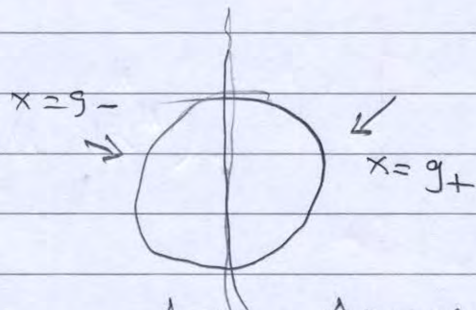


Πάνω - κάτω

Ανάλογα

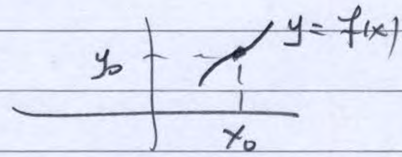
$x=g_+(y)=\sqrt{1-y^2}$, $x>0$

$x=g_-(y)=-\sqrt{1-y^2}$, $x<0$



Δεξιό - Αριστερό

(1) $F(x,y)=0$



Εν γένει αδύνατο να μπορεί να λυθεί ως προς $y=f(x)$
(π.χ. $x^2+y^5+4y^3+1=0$)
Το Θ.Π.Σ. εγγυάται, κάτω από κατάλληλες συνθήκες, ότι η (1) ορίζει την μία μεταβλητή ως συνάρτηση της άλλης, <u>τοπικά</u>, γύρω από (x_0,y_0).

Θεώρημα

F ορισμένη σε ανοιχτό $S\ni(x_0,y_0)$, $F\in C^1(S)$

Έστω

(i) $F(x_0,y_0)=0$

(ii) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

Τότε $\exists$ $\delta_1>0$ και $\delta_2>0$ τ.ω. ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Το $R=\{(x,y) \mid |x-x_0|\le\delta_1, |y-y_0|\le\delta_2\}\subset S$

R = ορθογώνιο

(β) $\forall \quad x \in (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1) \quad \exists!\ y \in (y_0-\delta_2, y_0+\delta_2)$
τ.ω.

$$F(x,y)=0$$

(2)

(γ) Αν $y=f(x)$ η μοναδική συνάρτηση που ορίζεται στο (β), τότε

$f=(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1) \longrightarrow (y_0-\delta_2, y_0+\delta_2)$ είναι συνεχής με συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί την σχέση

(3) $$f'(x) = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$$

Σχόλια

1 Η (2) προκύπτει : $y=f(x) \Rightarrow F(x,y(x))=0$

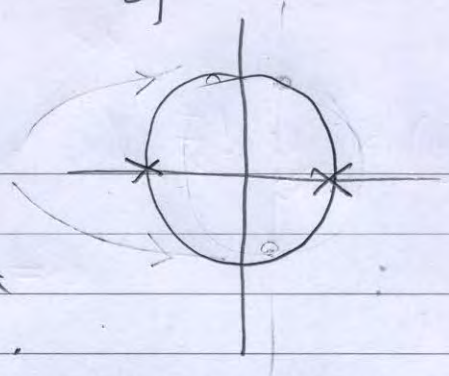
$$\frac{d}{dx}\left[F(x,y(x))\right]=0 \quad , \quad x\in(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$$

$$F_x + F_y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

2 Όλες οι λύσεις της (2) για $|x-x_0|\le\delta_1$, $|y-y_0|\le\delta_2$ είναι της μορφής $y=f(x)$, δηλαδή κείτονται στο γράφημα της $y=f(x)$,

3. $F(x,y)=x^2+y^2-1$, $\quad F_y(x,y)=2y \neq 0 \ \forall\, y\neq 0$.
Κάθε $(x_0,y_0)\neq(\pm1,0)$ ικανοποιεί $F_y(x_0,y_0)\neq 0$,
οπότε η $F(x,y)=0$ ορίζει το y σαν συνάρτηση του x



Παρατηραμε οτι
περι τα $(\pm 1, 0)$
ΔΕΝ ορίζονται τοπικα
συναρτησεις $y = f(x)$.
Κατα συνεπεια η συνθηκη ειναι εν γενει αναγκαια.

4. Εστω $F(x,y) = (y-x^2)(y-x^3)$
Προφανως οι λύσεις της $F(x,y) = 0$ σε περιοχη των $(x_0, y_0) = (0,0)$ δεν κειται σε μοναδικο γραφημα $y = f(x)$. Δεν εχαμε ομως αντιφαση διοτι

$$F_y(x,y) = (y-x^3) + (y-x^2)$$

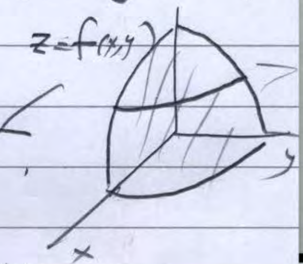
$$F_y(0,0) = 0.$$

$\square$

Για την Αποδειξη βλ Αλικακος – Καλογεροπουλος
§ 2.2, σ 106.

2. Πορισμα
Εστω $f(x,y) \in C^1(D)$ και εστω $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$
Θεωρουμε το συνολο σταθμης

$$C = \{(x,y) \mid f(x,y) = f(x_0,y_0)\}.$$



Τοπικα στο (x_0, y_0) το C ειναι καμπυλη διαφορισιμη.
Απ
$\nabla f(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow$ ή $f_y(x_0,y_0) \neq 0$, ή $f_x(x_0,y_0) \neq 0$
Στην πρωτη περιπτωση $y = h(x)$, οποτε

$$C = \{(x, h(x)) \mid x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)\}$$

Στην δευτερη περιπτωση $x = h(y)$, οποτε

$$C = \{ (h(y), y) \mid y \in (y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1) \}.$$

$\square$

<u>Παραδειγμα</u>

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \,, \quad \nabla f = (2x, 2y)$$

Εχουμε $\nabla f = 0$ μονο για $(x_0, y_0) = (0,0)$. Κατα συνεπεια τα συνολα σταθμης μεσω καθε αλλου σημειου ειναι C^1 καμπυλες (γραφηματα). Το συνολο σταθμης

$$\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 = 0 \}$$

ειναι προφανως ενα σημειο (οχι καμπυλη) αλλα δεν εχουμε αντιφαση διοτι $\nabla f(0,0) = 0$.

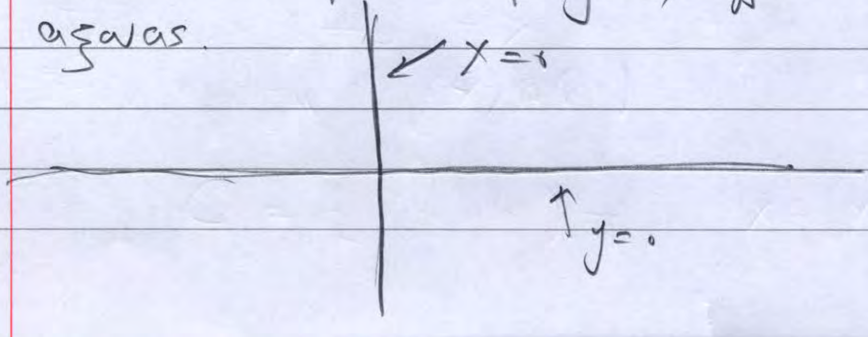
<u>Παραδειγμα</u>

$$f(x,y) = xy \,, \quad \nabla f(x,y) = (y, x)$$

Εχουμε $\nabla f = 0$ μονο για $(x_0, y_0) = (0,0)$. Αλλα εκει το συνολο σταθμης

$$\{ (x,y) \mid f(x,y) = f(0,0) = 0 \}$$

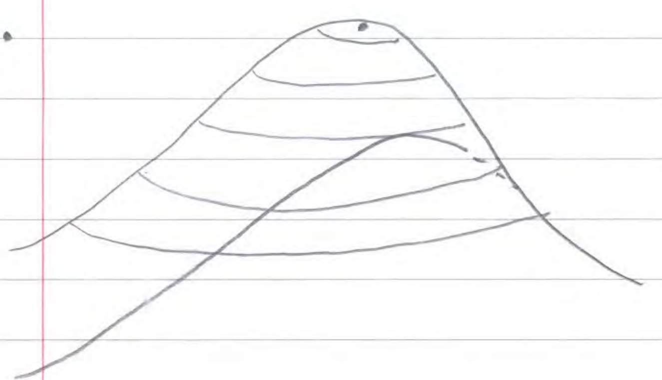
ΔΕΝ ειναι μια καμπυλη, αλλα ο x και ο y αξονας.

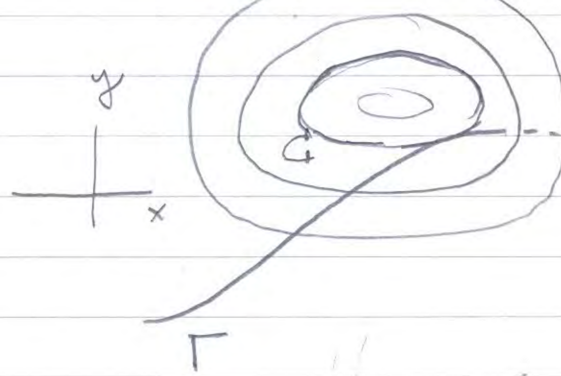


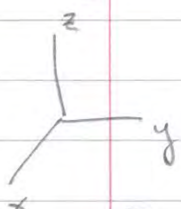
$xy = 0 \Rightarrow$
$x = 0.$

Μεγιστα - Ελαχιστα κατα μηκος μιας Καμπυλης
Πολλαπλασιαστες Lagrange (Δεσμευμενα Ακροτατα)

1.







Σχ 1 Σχ 2

Εστω οτι κινειται ενα τραινο οπως στο Σχ 1 ανεβαινοντας ενα βουνο. Σχεδιαζοντας την πορεια του επι ενος υψομετρικου χαρτη πως βρισκουμε το σημειο του μεγιστου υψους, ή καλυτερα, πως χαρακτηριζουμε γεωμετρικα αυτο το σημειο.

Οποτε το τραινο διασχιζει καμπυλες σταθμης ανεβαινει ή κατεβαινει. Στο σημειο μεγιστου υψους ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ η τροχια του στην εν λογω καμπυλη σταθμης (Σχ 2)

<u>Θεωρημα</u> (Μεθοδος Καμπυλων Σταθμης)
Εστω $f(x,y)$ $C^1(D)$ και $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \mid a \le t \le b\}$ μια C^1 καμπυλη στο D. Εστω f λαμβανει μεγιστο ή ελαχιστο κατα μηκος της καμπυλης, στο (x_0, y_0). Τοτε εχουμε τις εξης εκδοχες

ή

(i) $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

ή

(ii) Το σύνολο στάθμης $C=\{f(x,y)=f(x_0,y_0)\}$ εφάπτεται της Γ στο (x_0,y_0).

Απόδειξη

Θεωρούμε την $f_C(t)=f(x(t),y(t))$. Έστω max ή min στο t_0. Τότε $f_C'(t_0)=0 \iff$

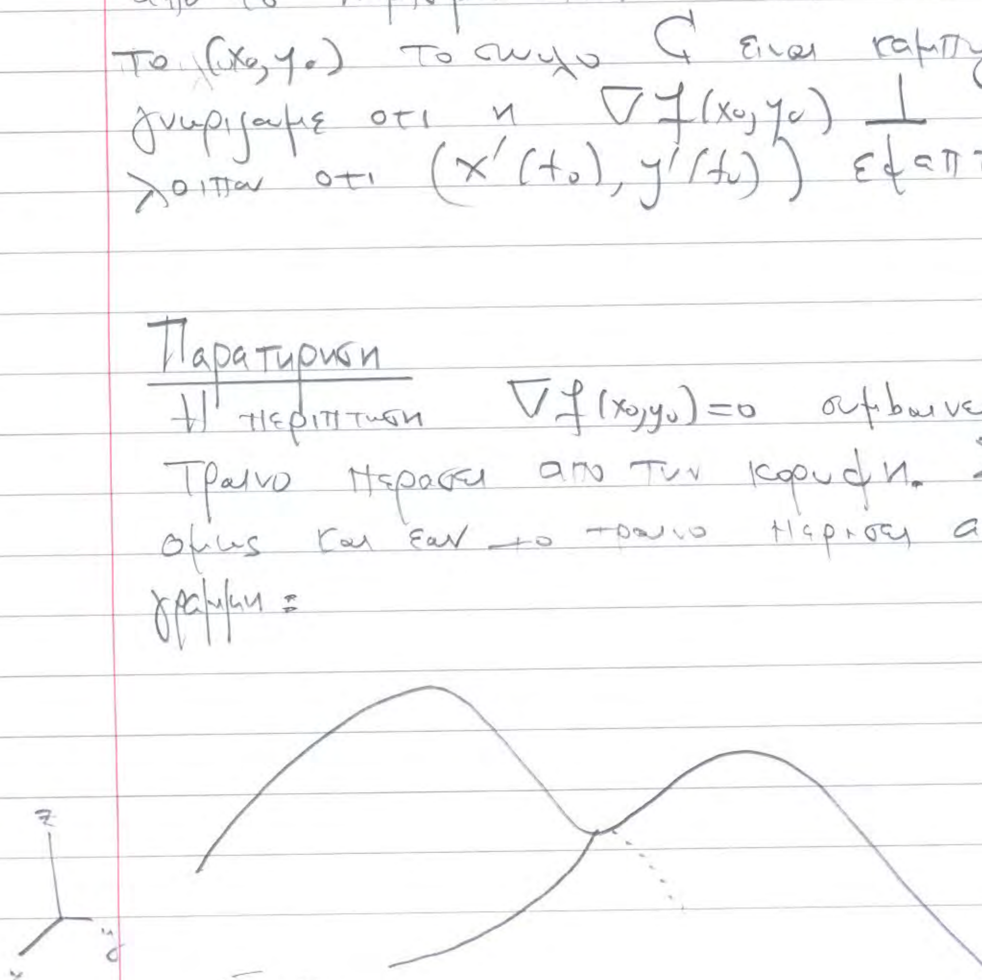
$$0=f_C'(t_0)=f_x(x_0,y_0)\,x'(t_0)+f_y(x_0,y_0)\,y'(t_0)$$
$$=\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x'(t_0),y'(t_0)).$$

Έχουμε δύο δυνατότητες: ή $\nabla f(x_0,y_0)=0$, ή $\nabla f(x_0,y_0)\neq 0$. Σε αυτή την περίπτωση γνωρίζουμε από το Πόρισμα στην σ 89 ότι τοπικά περί το (x_0,y_0) το σύνολο C είναι καμπύλη. Επίσης γνωρίζουμε ότι η $\nabla f(x_0,y_0)\perp C$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι $(x'(t_0),y'(t_0))$ εφάπτεται στην C.

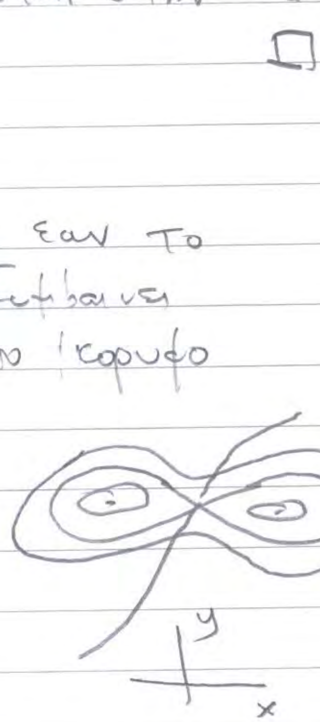
□

Παρατήρηση

Η περίπτωση $\nabla f(x_0,y_0)=0$ συμβαίνει εάν το τρένο περάσει από την κορυφή. Συμβαίνει όμως και εάν το τρένο περάσει από κορυφογραμμή:



Σχ 3



Σχ 4

Στο (x_0, y_0) εχαμε σαγμα και γνωριζαμε (σ 133, Μεγιστα - Ελαχιστα) οτι ισχυει

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 .$$

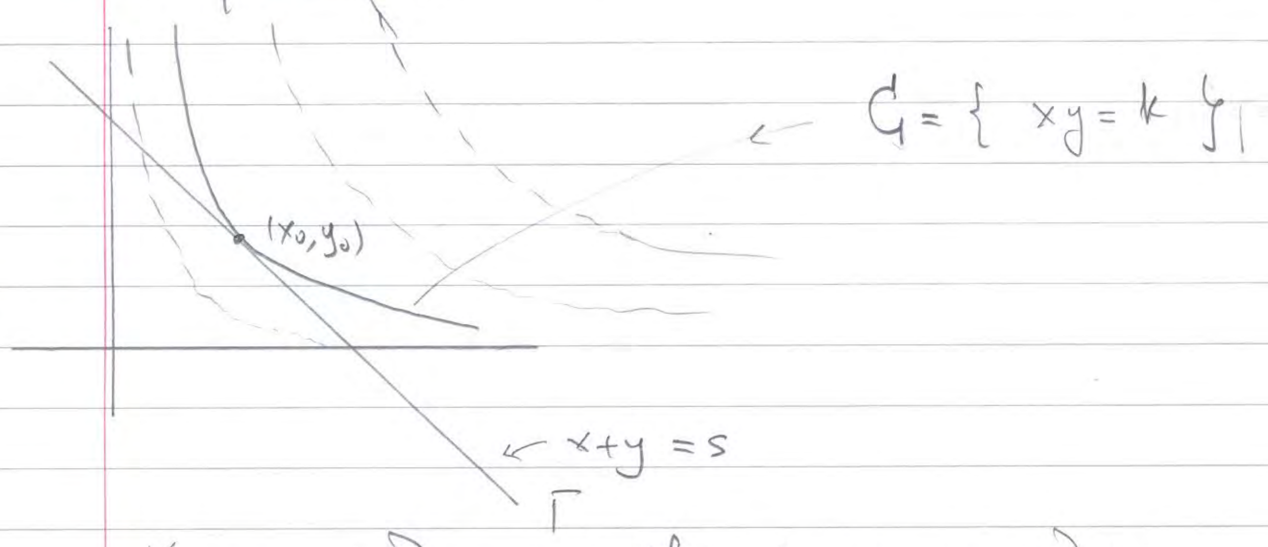
Παραδειγμα

Βρειτε το μεγιστο γινομενο δυο θετικων αριθμων που εχουν δεδομενο αθροισμα.

Λυση

Εστω x, y οι αριθμοι, $\boxed{x+y=s}$ (*)

Μεγιστοποιηση της $f(x,y) = xy$ με την δεσμευση (*)



Καμπυλη σταθμης της $f(x,y) = xy$ = σταθερα. Ζηταμε την συγκεκριμενη που εφαπτεται στην Γ, στο (x_0, y_0). Αρα η κλιση της G στο σημειο επαφης θα ειναι -1:

$$xy = k \Rightarrow y = \frac{k}{x}, \quad y' = \frac{-k}{x^2}$$

$$y'(x_0) = \frac{-k}{x_0^2} = -1 \Rightarrow x_0 = \sqrt{k}$$

$$y_0 = \frac{k}{x_0} = \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}.$$

Άρα $x_0 = y_0$, και από $x_0 + y_0 = s \Rightarrow$

$x_0 = y_0 = \frac{s}{2}$ και $x_0 y_0 = \frac{s^2}{4}$

Άρα $\forall (x,y)$ με $x+y=s$ έχουμε

$$xy \le x_0 y_0 \le \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

Για θετικούς x, y εξάγαμε την γνωστή ανισότητα

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}.$$ (γεωμετρικός - αριθμητικός μέσος)

$\square$

2. Έστω ότι η Γ δίνεται έμμεσα στην μορφή

$$g(x,y) = k$$

<u>Πρόβλημα</u>

Βρείτε το μέγιστο (ή ελάχιστο) της $f(x,y)$ υπό την δέσμευση (ή περιορισμό) $g(x,y) = k$.

<u>Θεώρημα</u> (Πολλαπλασιαστές Lagrange)

Εάν η $f(x,y)$ έχει μέγιστο ή ελάχιστο στο (x_0, y_0) υπό τον περιορισμό $g(x,y)=k$ τότε

ή

(i) $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

ή

(ii) $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$, κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

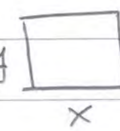
Αποδειξη

Εστω οτι δεν ισχυει η (i), δηλαδη εστω $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$. Τοτε η $g(x,y)=k$ οριζει τοπικα γυρω απο το (x_0,y_0) καμπυλη Γ_g. Εφοσον η f εχει μεγιστο ή ελαχιστο κατα μηκος της Γ_g ή $\nabla f(x_0,y_0)=0$ (αρα ισχυει η (ii) με $\lambda=0$) ή $\nabla f(x_0,y_0)\neq 0$ οποτε η καμπυλη σταθμης $\Gamma_f = \{f(x,y)=f(x_0,y_0)\}$ εφαπτεται της Γ_g. Αρα ισχυει η (ii)

□

Παραδειγμα

Βρειτε την ελαχιστη περιμετρο του ορθογωνιου δοθεντος εμβαδου A.

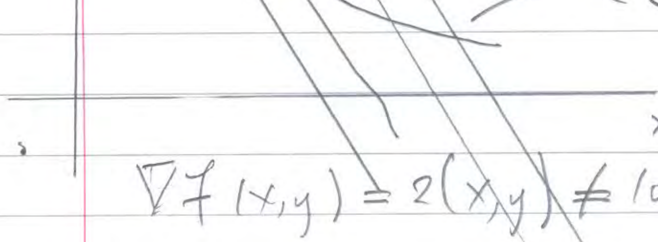


$f(x,y)=2(x+y)$, $g(x,y)=xy=A$

Θα το λυσαμε με 3 τροπους.

Μεθοδος I (Καμπυλες Σταθμης)

Η $xy=A$ οριζει υπερβολη:



$\{xy=A\} = \Gamma_g$ $\qquad y=\frac{A}{x}$

$\nabla f(x,y) = 2(x,y) \neq (0,0)$ για $x>0,\ y>0$

$C=\{f(x,y)=f(x_0,y_0)\}$ εφαπτεται στην Γ_g

$C=\{2(x+y)=2(x_0+y_0)\}=\{y=(x_0+y_0)-x\}$

$-1=-\frac{A}{x^2}\Big|_{x=x_0} \Leftrightarrow x_0=\sqrt{A}$, $\quad x_0y_0=A \Rightarrow y_0=\sqrt{A}$.

$$\text{Min } f = 2(x_0+y_0) = 4\sqrt{A}$$

Μέθοδος II (Απαλοιφή Μεταβλητής)

$$xy = A \Rightarrow y = \frac{A}{x}$$

$$f_T(x) = f(x,y) = f\left(x, \frac{A}{x}\right) = 2\left(x + \frac{A}{x}\right)$$

$$\frac{d}{dx} f_T(x) = 2\left(1 - \frac{A}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{A}$$

$$y = \frac{A}{x} = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}.$$

Γιατί είναι ελάχιστο;

$f_T(x) = 2\left(x + \frac{A}{x}\right)$ ορίζεται για $x > 0$

και $f_T(x) \to +\infty$ όπως $x \to 0$, $x \to \infty$.

Έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο $\Rightarrow$ αναγκαστικά ελάχιστο.

Μέθοδος III (Πολλαπλασιαστές Lagrange)

$$\nabla f(x,y) = (2, 2)$$

$$\nabla g(x,y) = (y, x)$$

$\nabla g(x,y) = 0 \Leftrightarrow (y,x) = 0 \Leftrightarrow x=0,\ y=0$
απορρίπτεται διότι δεν κείται σε καμπύλη $xy = A$

Ισχυει λοιπον

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$$

$$\iff \quad (2,2) = \lambda (y_0, x_0)$$

(1) $2=\lambda y_0$, (2) $2=\lambda x_0$, $x_0 y_0 = A$ (3)

(1),(2) $\Rightarrow \lambda = \frac{2}{y_0} = \frac{2}{x_0} \Rightarrow x_0 = y_0$ (4)

(3),(4) $\Rightarrow x_0^2 = y_0^2 = A \Rightarrow x_0 = y_0 = \sqrt{A}$.

$\square$

Παραδειγμα

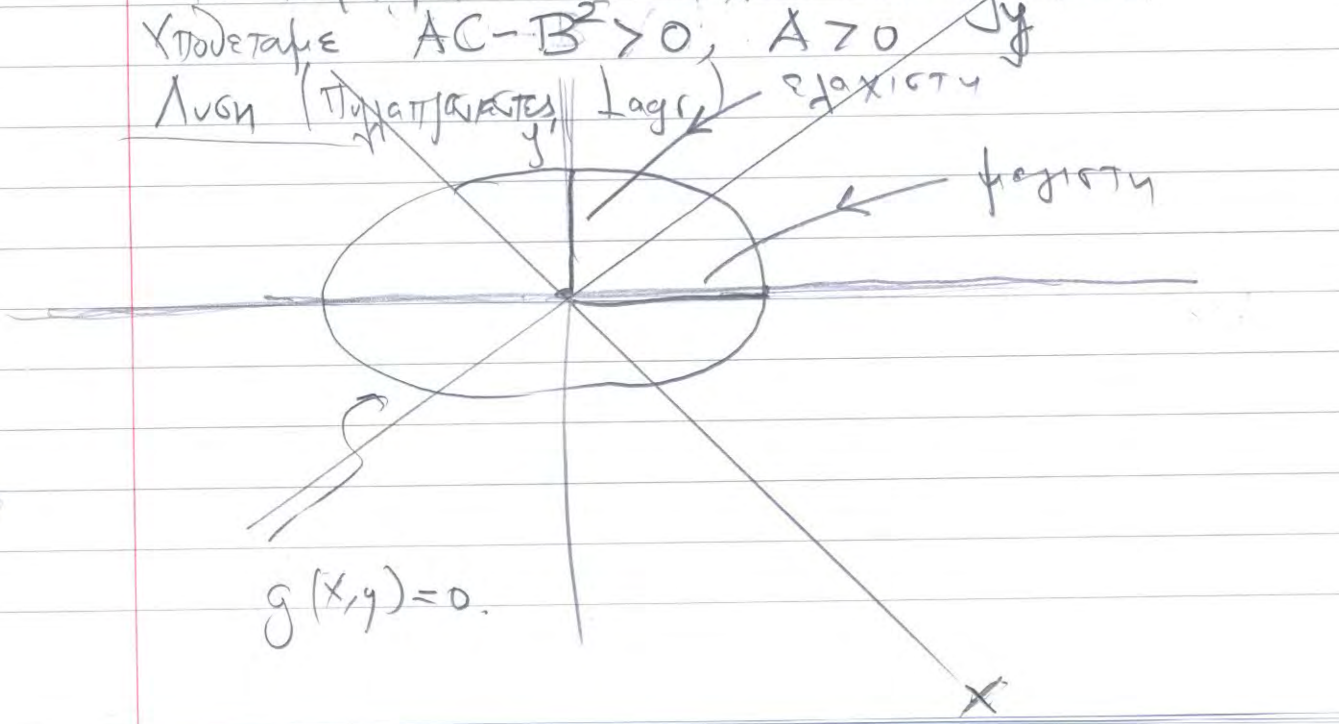
Θεωρειστε την καμπυλη της

$$g(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1 = 0$$

Βρειτε την μεγιστη και ελαχιστη αποσταση απο την καμπυλη στην αρχη των αξονων.

Υποθεταμε $AC - B^2 > 0$, $A > 0$

Λυση (Πολλαπλασιαστες Lagr.)



$f(x,y) = x^2 + y^2$ (Τετράγωνο της απόστασης – πιο βολικό)

$g(x,y) = 0$

$\nabla g(x_0, y_0) = (2Ax_0 + 2By_0, 2Cy_0 + 2Bx_0) = 0.$

$Ax_0 + By_0 = 0$

$By_0 + Cy_0 = 0.$

$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = AC - B^2 \neq 0 \Rightarrow x_0 = y_0 = 0.$

(*) $\nexists (x_0, y_0)$ στην καμπύλη $g(x,y) = 0$ με $\nabla g(x_0, y_0) = 0$

Εχαμε λοιπον

① $\boxed{\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)}$ $\boxed{Ax_0^2 + 2Bx_0 y_0 + Cy_0^2 = 1}$ ②

$(\cancel{2}x_0, \cancel{2}y_0) = \lambda(\cancel{2}Ax_0 + \cancel{2}By_0, \cancel{2}Cy_0 + \cancel{2}Bx_0)$

③ $\begin{cases} x_0 = \lambda(Ax_0 + By_0) \\ y_0 = \lambda(Cy_0 + Bx_0) \end{cases}$ 3 εξισωσεις, 3 αγνωστα x_0, y_0, λ

Παρατηρησεις

(i) Το συστημα ③ ως προς x_0, y_0 ειναι γραμμικο:

(3) $\Leftrightarrow$

$$(4)\begin{cases}(\lambda A-1)x_0+\lambda B y_0=0\\ \lambda B x_0+(\lambda C-1)y_0=0\end{cases}$$

$\lambda \neq 0$ διοτι $x_0=0,\ y_0=0$ οχι αποδεκτες

(4) $\Rightarrow$

$$(5)\begin{cases}A x_0+B y_0=\frac{1}{\lambda}x_0\\ B x_0+C y_0=\frac{1}{\lambda}y_0\end{cases}$$

Εφ'οσον $x_0=y_0=0$ δεν ειναι αποδεκτη, αρα $\frac{1}{\lambda}$ ιδιοτιμη του

$$\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}$$

Συμμετρικος πινακας εχει πραγματικες ιδιοτιμες

$$\frac{1}{\lambda_1},\ \frac{1}{\lambda_2}.$$

(ii) Απο το (5) $\Rightarrow$

(6) $A x_0^2+B y_0 x_0=\frac{1}{\lambda}x_0^2$

(7) $B x_0 y_0+C y_0^2=\frac{1}{\lambda}y_0^2$

6 + 7 $\Rightarrow$

$$\frac{1}{\lambda}(x_0^2+y_0^2) = Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x_0^2+y_0^2=\lambda}$$

(iii) Ιδιοτιμές του πίνακα $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

$$\mu^2-(A+C)\mu + AC-B^2 = 0.$$

$$\mu_1+\mu_2 = A+C \qquad \mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mu_1\mu_2 = AC-B^2 > 0$$

$$A>0, \quad AC-B^2>0 \Rightarrow C>0.$$

$$\mu_1>0, \quad \mu_2>0$$

$$\mathrm{Max}\sqrt{f(x,y)} = \sqrt{\lambda_1}, \quad g(x,y)=0$$

$$\mathrm{Min}\sqrt{f(x,y)} = \sqrt{\lambda_2}, \quad g(x,y)=0$$

Οι ημιάξονες της έλλειψης

$$\sqrt{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}}, \quad \sqrt{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{\mu_2}}. \qquad \square$$