# Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

## Μορφές Διαφορισιμότητας

Ορισμος 1. *Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, με $A$ ανοιχτό και $x_0 \in A$. Εάν για κάποιο $v \in \mathbb{R}^n$, το όριο*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f\left(x_0 + tv\right) - f\left(x_0\right)}{t} = D_v f\left(x_0\right)$$

*υπάρχει, τότε λέμε ότι υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος στην κατεύθυνση $v$.*

Παρατηρηση 1. *Εάν υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$, τότε υπάρχει και το όριο:*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f\left(x_0 + tw\right) - f\left(x_0\right)}{t},\ w \in \mathbb{R}^n.$$

Αποδειξη. Για $w = 0$ είναι προφανές. Έστω $w \neq 0$. Θέτουμε $v = \dfrac{w}{\|w\|}$.

$$\begin{aligned} D_v f\left(x_0\right) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f\left(x_0 + tv\right) - f\left(x_0\right)}{t} = \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f\left(x_0 + t\dfrac{w}{\|w\|}\right) - f\left(x_0\right)}{t} = \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f\left(x_0 + \tau w\right) - f\left(x_0\right)}{\tau} \frac{1}{\|w\|}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f\left(x_0 + \tau w\right) - f\left(x_0\right)}{\tau} = \|w\| D_v f\left(x_0\right).$$

□

Ορισμος 2. *Η $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, με $A$ ανοιχτό και $x_0 \in A$, λέγεται Gâteaux διαφορίσιμη στο $x_0$, εάν η κατευθυνόμενη παράγωγος υπάρχει $\forall v \in \mathbb{R}^n$, με $\|v\| = 1$ και επίσης η*

$$L\left(v\right) = D_v f\left(x_0\right)$$

*είναι γραμμική.*

($L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμική: $L\left(\alpha v + \beta \tilde{v}\right) = \alpha L\left(v\right) + \beta L\left(\tilde{v}\right)$ για κάθε $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ και $v$, $\tilde{v} \in \mathbb{R}^n$.)
Εναλλακτικά, μπορούμε να συμβολίσουμε: $D_v f\left(x_0\right) = \left[Df\left(x_0\right)\right]\left(v\right)$.

Ορισμος 3. *Η $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται (Fréchet) διαφορίσιμη στο $x_0$ εάν η Gâteaux παράγωγος υπάρχει και επίσης ισχύει*

$$\lim_{\|\psi\| \longrightarrow 0} \frac{|f\left(x_0 + \psi\right) - f\left(x_0\right) - \left[Df\left(x_0\right)\right]\left(\psi\right)|}{\|\psi\|} = 0\ \ (*).$$

Προταση 1. *Εάν η Gâteaux παράγωγος υπάρχει, ομοιόμορφα για $\|v\| = 1$, τότε έχουμε (Fréchet) διαφορισιμότητα και αντιστρόφως.*

Αποδειξη. Η ύπαρξη της Gâteaux παραγώγου – ανεξάρτητα ως προς $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$ – σημαίνει ότι:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \left|\frac{f\left(x_0 + tv\right) - f\left(x_0\right)}{t} - \left[Df\left(x_0\right)\right]\left(v\right)\right| < \epsilon,\ |t| < \delta \Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow |f\left(x_0 + tv\right) - f\left(x_0\right) - t\left[Df\left(x_0\right)\right]\left(v\right)| < \epsilon|t|,\ |t| < \delta \\ &\Longleftrightarrow |f\left(x_0 + tv\right) - f\left(x_0\right) - \left[Df\left(x_0\right)\right]\left(tv\right)| < \epsilon|t|,\ |t| < \delta \\ &\overset{\psi = tv}{\Longleftrightarrow} |f\left(x_0 + tv\right) - f\left(x_0\right) - \left[Df\left(x_0\right)\right]\left(\psi\right)| < \epsilon\|\psi\|,\ \|\psi\| < \delta, \end{aligned}$$

όπου φθάσαμε στον ορισμό του ορίου $(*)$. Προηγουμένως, το $\delta > 0$ είναι ανεξάρτητο του $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$. □

Έχουμε τα εξής για μία συνάρτηση $f$:
**(iv)** (Fréchet) διαφορίσιμη,
**(iii)** Gâteaux διαφορίσιμη,
**(ii)** ύπαρξη κατευθυνόμενης παραγώγου και
**(i)** ύπαρξη μερικών παραγώγων.

Προφανώς,

$$(iv) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (i)\,.$$

Όμως:

(1) $(i) \not\Longrightarrow (ii)$,
(2) $(ii) \not\Longrightarrow (iii)$ και
(3) $(iii) \not\Longrightarrow (iv)$.

**Αντιπαραδείγματα:**

(1) Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{για } x+y=0,\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{για } x+y\neq 0 \text{ ή } (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

Έχουμε ότι:

$$f_x(0,0) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$

και

$$f_y(0,0) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0.$$

Η $D_v f(0,0)$ για $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ δεν υπάρχει:

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}, -\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\dfrac{1}{2}-0}{t} = \infty.$$

□

(2) Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x & \text{για } x-y=0 \\ 0 & \text{για } x-y\neq 0 \end{cases}.$$

Έχουμε ότι:

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} = 0\ \forall v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^n,$$

με $v_1 \neq v_2$. Ακόμη,

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}, \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{2},$$

με $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. Όμως, ο

$$L(v) = \begin{cases} 0 & \text{για } v_1\neq v_2 \\ \dfrac{1}{2} & \text{για } v_1 = v_2 \end{cases}$$

δεν είναι γραμμικός. □

(3) Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}|x| & \text{για } y-x^2=0 \\ 0 & \text{για } y-x^2\neq 0 \end{cases}.$$

Έχουμε ότι:

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{0}{t} = 0,$$

για κάθε $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$. Αφού, $v$ σταθεροποιημένο, έχουμε: $Df\left(0,0\right)=0$. Άρα, η παράγωγος Gâteaux υπάρχει. Θα δείξουμε ότι η $f$ δεν είναι (Fréchet) διαφορίσιμη, κάνοντας μία επιλογή του $v$ εξαρτώμενη από το $t$, με $\|v\|=1$. Απαιτούμε:

$$\begin{aligned}(tv_1)^2=tv_2 \overset{v_1^2+v_2^2=1}{=} t\sqrt{1-v_1^2} &\Longleftrightarrow tv_1^2=\sqrt{1-v_1^2}\\ &\Longleftrightarrow t^2v_1^4+v_1^2-1=0\\ &\Longleftrightarrow v_1^2=\frac{-1+\sqrt{1+4t^2}}{2t^2}.\end{aligned}$$

Τότε,

$$\lim_{t\longrightarrow 0} v_1^2 = 2\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{4t^2} \overset{\xi=4t^2}{=} 2\lim_{\xi\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{1+\xi}-1}{\xi}=2\frac{1}{2}=1.$$

Για αυτήν την επιλογή του $v$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f\left(tv_1,tv_2\right)-f\left(0,0\right)}{t} &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f\left(tv_1,tv_2\right)}{t}\\ &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\frac{1}{2}\left|tv_1\right|}{t}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\longrightarrow 0}\left(\frac{|t|}{t}\left|v_1\right|\right)\\ &= \begin{cases}\frac{1}{2} & \text{για } t>0\\ -\frac{1}{2} & \text{για } t<0\end{cases}.\end{aligned}$$

Η $f$ δεν είναι διαφορίσιμη διότι το όριο δεν υπάρχει ομοιόμορφα για $\|v\|=1$ (Πρόταση 1). □

**Σημείωση:** Για $f:A\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $A$ ανοιχτό και $x_0\in A$, έχουμε ότι:

$$\left[Df\left(x_0\right)\right](w)=\nabla f\left(x_0\right)\cdot w,\ w\in\mathbb{R}^n.$$