1$^o$ Πακέτο Ασκήσεων για το μάθημα
Λ07Ν. Παραμετρική Πολυπλοκότητα και Αλγόριθμοι του ΜΠΛΑ,
Εαρινό Εξάμηνο 2015-2016

1. Στο πρόβλημα Απόσταση από $d$-Φραγμένο Βαθμό δίνεται ένα γράφημα $G$ κι ένας θετικός ακέραιος $k$ και στόχος είναι να βρεθεί (αν υπάρχει) $S \subseteq V(G)$ τέτοιο ώστε $|S| \leq k$ και $\Delta(G \setminus S) \leq d$. Να βρείτε έναν πυρήνα για το πρόβλημα αυτό με πολυωνυμικό μέγεθος στο $d + k$.

2. Στο πρόβλημα $d$-Κάλυμμα Συνόλων δίνεται ένα σύμπαν από στοιχεία $U$, μία οικογένεια $\mathcal{A}$ από υποσύνολα του $U$, όπου κάθε σύνολο της $\mathcal{A}$ έχει μέγεθος το πολύ $d$ και στόχος είναι να αποφασιστεί άν υπάρχουν $k$ σύνολα $S_1, S_2, \ldots, S_k \in \mathcal{A}$ τα οποία είναι ανα δύο ξένα. Να δείξετε βρείτε πυρήνα για το παραπάνω πρόβλημα με $f(d)k^d$ σύνολα, όπου η $f$ είναι κάποια υπολογίσιμη συνάρτηση.

3. Έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια από γραφήματα. Λέμε ότι ένα γράφημα $G$ είναι $\mathcal{F}$-ελεύθερο εάν δεν περιέχει κανένα από τα γραφήματα της $\mathcal{F}$ ως εναγόμενο υπογράφημα. Για μια σταθεροποιημένη οικογένεια $\mathcal{F}$ θεωρούμε το πρόβλημα όπου, δοσμένου ένος γραφήματος $G$ και ενός θετικού ακέραιου $k$, στόχος είναι να αποφασίσουμε εάν μπορούμε να μετατρέψουμε το $G$ σε ένα $\mathcal{F}$-ελεύθερο γράφημα εφαρμόζοντας μία από τις παρακάτω πράξεις:

   αφαίρεση κορυφών, δηλαδή με την αφαίρεση το πολυ $k$ κορυφών,

   αφαίρεση ακμών, δηλαδή με την αφαίρεση το πολυ $k$ ακμών,

   συμπλήρωση ακμών, δηλαδή με την προσθήκη το πολυ $k$ ακμών,

   επεξεργασία ακμών, δηλαδή με την αφαίρεση ή προσθήκη το πολυ $k$ ακμών.

   Να δείξετε ότι εάν η $\mathcal{F}$ είναι πεπερασμένη τότε για τα παραπάνω προβλήματα υπάρχει αλγόριθμος που τρέχει σε χρόνο $2^{\mathcal{O}(k)} n^{\mathcal{O}(1)}$, (Οι σταθερές που κρύβονται στο $\mathcal{O}$ μπορούν να εξαρτώνται από την οικογένεια $\mathcal{F}$.)

4. Στο πρόβλημα Ελάχιστη-2-Ικανοποιησιμότητα, δίνεται ένας τύπος σε 2-Κανονική Συζευκτική Μορφή $\phi$ και ένας θετικός ακέραιος $k$ και στόχος είναι να αποφασιστεί εάν υπάρχει αποτίμηση όπου ικανοποιεί το πολύ $k$ όρους της $\phi$. Να δείξετε ότι το παραπάνω πρόβλημα λύνεται σε χρόνο $2^k n^{\mathcal{O}(1)}$.

5. Με τη μέθοδο της Επαναλαμβανόμενης Συμπίεσης, να βρείτε έναν αλγόριθμο για το πρόβλημα 3-Σύνολο Αφής που να λύνει στο πρόβλημα σε χρόνο $2.4656^k n^{\mathcal{O}(1)}$.

6. Στο πρόβλημα Δεντρικό Υπογράφημα μας δίνεται ένα γράφημα $G$ και ένα δέντρο $T$ με $k$ κορυφές και στόχος είναι να αποφασίσουμε εάν το $G$ περιέχει το $T$ σαν υπογράφημα. Χρησιμοποιώντας την τεχνική της Κωδικοποίησης με Χρώματα να δείξετε ότι το πρόβλημα αυτό έχει αλγόριθμο που τρέχει σε χρόνο $2^{\mathcal{O}(k)} n^{\mathcal{O}(1)}$.

7. Λύστε το πρόβλημα του Ισομορφικού Υπογραφήματος σε γραφήματα με φραγμένο βαθμό, χρησιμοποιώντας αντί για χρωματισμό των ακμών του γραφήματος εισόδου χρωματισμό των κορυφών του και δείξτε ότι με αυτή την προσέγγιση μπορεί να βρεθεί αλγόρθμος με εσφαλμένα αρνητικά που τρέχει σε χρόνο $2^{(d+1)k} k! n^{\mathcal{O}(1)}$. Στη συνέχεια βελτιώστε τον αλγόριθμό σας ώστε να τρέχει σε χρόνο $d^{\mathcal{O}(k)} k! n^{\mathcal{O}1}$.

8. Δείξτε ότι το πρόβλημα Σύνολο Ανάδρασης Κορυφών μπορεί να λυθεί σε χρόνο $k^{\mathcal{O}(k)} n^{\mathcal{O}(1)}$ σε γραφήματα με $n$ κορυφές όπου δίνονται σαν είσοδοι μαζί με μία δεντροαποσύνθεσή τους πλάτους το πολύ $k$.

9. Στο πρόβλημα Σκεδασμένο Σύνολο δίνεται ένα γράφημα $G$ και θετικοί ακέραιοι $l$ και $d$ και στόχος είναι να απαντηθεί εάν το $G$ περιέχει τουλάχιστον $l$ κορυφές οι οποίες απέχουν ανά δύο απόσταση τουλάχιστον $d$. Δείξτε πως όταν οι είσοδοι περιοριστούν στα επίπεδα γραφήματα τότε το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί σε χρόνο $2^{\sqrt{l}} n^{\mathcal{O}(1)}$ όταν το $d$ είναι σταθερό.

10. Δείξτε ότι εάν ένα γράφημα $G$ έχει δεντροαποσύνθεση με πλάτος το πολύ $k$ τότε έχει και καλή δεντροαποσύνθεση με πλάτος το πολυ $k$. Επιπλέον, δείξτε ότι δοσμένης μιας δεντροαποσύνθεσης $\mathcal{T} = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ του $G$ με πλάτος το πολύ $k$, μια καλή δεντροαποσύνθεση του $G$ με πλάτος το πολύ $k$ η οποία έχει το πολύ $\mathcal{O}(k|V(G)|)$ τσάντες μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $\mathcal{O}(k^2 \max\{|V(T)|, |V(G)|\})$.

**Καταληκτική Ημερομηνία Υποβολής των Λύσεων**: Τρίτη 29 Μαρτίου 2016 23:59 είτε ηλεκτρονικά στη διεύθυνση archontia.giannopoulou@gmail.com είτε ιδιοχείρως στο γραφείο 116.