22/5/13

Ροπογεννήτριες - Ανισότητες

1 Ροπογεννήτρια Τυχαίας Μεταβλητής

X τ.μ.

Η ροπογεννήτρια της X

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P_X(x) & \text{σ.π. της } X \quad X: \text{διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx & \text{σ.π.π. της } X \quad X: \text{συνεχής} \end{cases}$$

2 Ιδιότητες

(i) $X \overset{d}{=} Y$ (X, Y : ισόνομες) $\Longleftrightarrow M_X(t) = M_Y(t)$

$\overset{d}{=}$ → ίδια κατανομή (distribution)

(ii) $\underbrace{E[X^n]}_{\text{Ροπή n-τάξης}} = M_X^n(0)$

Απόδειξη

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \Rightarrow M_X^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} E[e^{tX}]$$

$$= E\left[\frac{d^n}{dt^n} e^{tX}\right]$$

$$= E[X^n \cdot e^{tX}]$$

$$\Rightarrow M_X^{(n)}(0) = E[X^n]$$

iii) $X_1, X_2, \ldots, X_n$: ανεξάρτητες, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $\Rightarrow M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t) \ldots M_{X_n}(t)$

$$\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \ldots, X_n : \text{ανεξάρτητες} \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{array}\right\} \Rightarrow M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t) \ldots M_{X_n}(t)$$

Απόδειξη

$$M_{S_n}(t) = E[e^{tS_n}] = E[e^{tX_1 + tX_2 + \ldots + tX_n}]$$

$$= E[e^{tX_1} \cdot e^{tX_2} \cdot \ldots \cdot e^{tX_n}]$$

ανεξάρτητες

$$= E[e^{tX_1}]\, E[e^{tX_2}] \cdot \ldots \cdot E[e^{tX_n}]$$

$$= M_{X_1}(t)\, M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t)$$

(iv) $X_1, X_2, X_3, \ldots$: ανεξάρτητες κ' ισόνομες με ροπογεννήτρια $M_X(t)$

N: ακέραια τ.μ. ≥ 0, ανεξάρτητη των X_i

↳ (Μπορεί να έχει και διαφορετική κατανομή)

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$\Rightarrow M_{S_N}(t) = P_N(M_X(t))$

Πιθανογεννήτρια της N, όχι Ροπογεννήτρια!!!

$$e^{t\sum x_i}$$

Απόδειξη

$$M_{S_N}(t) = E[e^{tS_n}] = E[e^{t\sum_{i=1}^{N} X_i}] = E[E[e^{t\sum_{i=1}^{N} X_i} \mid N]]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, E[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i} \mid N=n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, E[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, (M_X(t))^n$$

$$= P_N(M_X(t))$$

(v) Σχέση Πιθανογεννήτριας - Ροπογεννήτριας.

X: ακέραια τ.μ. ≥ 0 (οπότε έχει πιθανογεννήτρια) $\Rightarrow M_X(t) = P_X(e^t)$

Απόδειξη

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = E[(e^t)^X] = P_X(e^t)$$

3. Ροπογεννήτριες Κλασσικών κατανομών

(i) $X \sim Bernoulli(p)$

$$P(X=i) = \begin{cases} p, & i=1 \\ 1-p, & i=0 \end{cases} \Rightarrow M_X(t) = 1-p+pe^t$$

(ii) $X \sim Bin(n,p)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n \Rightarrow M_X(t) = (1-p+pe^t)^n$$

(iii) $X \sim Geom(p)$

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \ k \geq 1 \Rightarrow M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

(iv) $X \sim NegBin(n,p) \Rightarrow M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^n$

(v) Poisson (λ)

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \ k \geq 0 \Rightarrow M_X(t) = e^{-\lambda(1-e^t)}$$

(vi) $X \sim exp(\lambda)$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x>0 \Rightarrow M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x}\,dx$$

$$= \lambda \left[\frac{e^{-(\lambda-t)x}}{-(\lambda-t)}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - t}, \ t<\lambda$$

(vii) $X \sim Gamma(n,\lambda)$

$\Downarrow$ $\quad$ ↳ $Erlang(n,\lambda)$ $\quad \Rightarrow M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$X_i \sim Exp(\lambda)$: ανεξάρτητες.

(viii) $Z \sim N(0,1)$

σ.π.π. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$

$$M_Z(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2tx}{2}} dx$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x^2-2tx+t^2)}{2}} dx$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx \quad \text{σ.π.π. } N(t,1)$$

$$\Rightarrow M_Z(t) = e^{t^2/2}$$

(ix) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$M_X(t) = ;$ $\quad , \quad X = \sigma Z + \mu$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = E[e^{t(\sigma Z+\mu)}] = e^{t\mu} E[e^{t\sigma Z}]$$

$$= e^{t\mu} M_Z(\sigma t)$$

$$= e^{t\mu} e^{\frac{(\sigma t)^2}{2}} = e^{t\mu + \frac{\sigma^2}{2} t^2}$$

4. Βασικές Ανισότητες στη Θ. Πιθανοτήτων

(i) Ανισότητα Markov: $X \geq 0,\ a > 0 \Rightarrow P(X \geq a) \leq \dfrac{E[X]}{a}$

(ii) Ανισότητα Chebyshev: $P(|X - E[X]| \geq c) \leq \dfrac{Var[X]}{c^2}$

(iii) Ανισότητα Chernoff: $t > 0 \Rightarrow P(X \geq a) \leq e^{-ta} M_X(t)$
$a \in \mathbb{R}$

(iv) Cauchy-Schwartz: $|E[XY]| \leq E[X^2]^{1/2} E[Y^2]^{1/2}$

(v) Jensen: f: κυρτή $\Rightarrow f(E[X]) \leq E[f(X)]$

Απόδειξη

(i) $I(X) = \begin{cases} 1, & X \geq a \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \Rightarrow aI(X) \leq X$

$$aP(X \leq a) = aE[I(X)] = E[aI(X)] \leq E[X] \Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

Για X: συνεχής με σ.π.π. $f_X(x)$

$$aP(X \geq a) = a\int_a^\infty f_X(x)\,dx = \int_a^\infty a f_X(x)\,dx \leq \int_a^\infty x f_X(x)\,dx \leq \int_0^\infty x f_X(x)\,dx = E[X]$$

(ii) $P(|X-E[X]|\geq c) = P((X-E[X])^2 \geq c^2) \overset{\text{Markov}}{\leq} \dfrac{E[(X-E[X])^2]}{c^2} = \dfrac{Var[X]}{c^2}$

(iii) $P(X\geq a) \overset{t>0}{=} P(tX\geq ta) = P(e^{tX}\geq e^{ta}) \underset{\text{Markov}}{\leq} \dfrac{E[e^{tX}]}{e^{ta}} = e^{-ta}M_X(t)$

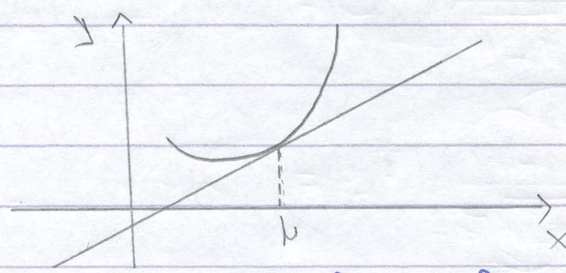
(Better than Markov)

$$P(X\geq a)\leq \inf_{t>0}\{e^{-ta}M_X(t)\}$$

(iv) $\rho(X,Y)\in[-1,1] \Rightarrow Cov(X,Y)\leq Var[X]^{1/2}\cdot Var[Y]^{1/2}$

$\Rightarrow \dots \left(|x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n|\leq (x_1^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+\dots+y_n^2)\right.$ (*)

(v) f: κυρτή



$f(x)\geq f(\mu)+(x-\mu)f'(\mu) \Rightarrow f(x)\geq f(E[X])+(x-E[X])f'(E[X])$

$\Rightarrow f(X)\geq f(E[X])+(X-E[X]) f'(E[X])$

$\Rightarrow E[f(X)]\geq E[f(E[X])+(X-E[X])f'(E[X])]$

$\Rightarrow E[f(X)]\geq f(E[X])$

5. $Var[X]=0 \Rightarrow X$: σταθερή

$P(|X-E[X]|>0) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{|X-E[X]|>\frac{1}{n}\right\}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} P\left(|X-E[X]|>\frac{1}{n}\right) \overset{\text{Chebysev}}{\leq} \lim_{n\to\infty}\dfrac{\overset{=0}{Var[X]}}{1/n^2}$

$\Rightarrow P(X=E[X])=1$

6. Παράδειγμα

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Να βρεθεί το φράγμα Chernoff για $P(X \geq x)$

$$P(X \geq x) \leq \inf_{t>0} e^{-tx} M_X(t)$$

$$= \inf_{t>0} \left(e^{-tx} e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2} \right)$$

$$= \inf_{t>0} e^{\frac{\sigma^2}{2} t^2 + (\mu - x) t}$$