14^{η} Μάθημα 20/3/13

Ειδικές Διακριτές κατανομές

Είδαμε
- ✓ Ομοιόμορφη διακριτή
- ✓ Bernoulli
- ✓ Διωνυμική
- ✓ Γεωμετρική

Θα δούμε
- Αρνητική Διωνυμική
- Poisson
- Υπεργεωμετρική

① Πλαίσιο δοκιμών Bernoulli

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες ισόνομες

$P(X_i=1)=p \leftarrow$ πιθανότητα επιτυχίας

$P(X_i=0)=1-p \leftarrow$ πιθανότητα αποτυχίας

$S_1 = X_1 = \#$ επιτυχιών σε 1 δοκιμή

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = \#$ επιτυχιών σε n δοκιμές

$T_1 = \#$ δοκιμών ως την 1^{η} επιτυχία

$T_n = \#$ δοκιμών ως την n^{η} επιτυχία

- $S_1 \sim Bernoulli(p)$ (η S_1 ακολουθεί την Bernoulli)

$E[S_1]=p$

$Var[S_1]=p(1-p)$

- $S_n \sim Bin(n,p)$

$P[S_n=i] = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad 0 \le i \le n$

$E[S_n]=np$

$Var[S_n]=np(1-p)$

- $T_1 \sim Geom(p)$

$P[T_1=i] = (1-p)^{i-1}p, \quad i \ge 1$

$E[T_1] = \frac{1}{p}$

$Var[T_1] = \frac{1-p}{p^2}$

② Η αρνητική διωνυμική $NegBin(n,p)$

$$\{T_n = i\} : \underbrace{\overbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}^{\substack{n-1 \text{ επιτυχ. "1"} \\ i-n \text{ αποτ. "0"}}}\ \overset{\substack{\text{σίγουρα επιτυχία} \\ \downarrow}}{\text{"1"}}}_{i\text{-θέσεις}}$$

- Ποια είναι η πιθανότητα του αποτελέσματος $\underbrace{11\ldots1}_{(n-1)}\underbrace{00\ldots0}_{(i-n)}1$

Είναι $p^n(1-p)^{i-n}$

και το # αποτελεσμάτων είναι $\binom{i-1}{n-1}$

$$T_n \sim NegBin(n,p)$$

$$P[T_n = i] = \binom{i-1}{n-1} p^n (1-p)^{i-n} \quad , i \geq n$$

$$E[T_n] = \sum_{i=n}^{\infty} i P[T_n = i]$$

$$\binom{i}{n} = \frac{i}{n}\binom{i-1}{n-1} \longrightarrow = \sum_{i=n}^{\infty} i \binom{i-1}{n-1} p^n (1-p)^{i-n}$$

$$= n \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i}{n} p^n (1-p)^{i-n}$$

$$= \frac{np^n}{(1-p)^n} \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i}{n} (1-p)^i$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}, \quad |t|<1 \\ \binom{i}{n} = \frac{i(i-1)(i-2)\cdots(i-n+1)}{n!} \end{array}}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{\cancel{np^n}}{\cancel{(1-p)^n}} \frac{\cancel{(1-p)^n}}{\cancel{p^{n+1}}} = \frac{n}{p}$$

$$(*) \quad \sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t} \overset{d^n/dt}{\Longrightarrow} \sum_{i=n}^{\infty} i(i-1)(i-2)\cdots(i-n+1)\, t^{i-n} = \frac{n!}{(1-t)^{n+1}}$$

$$\overset{\times t^n/n!}{\Longrightarrow} \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i}{n} t^i = \frac{t^n}{(1-t)^{n+1}}$$

$$\mathrm{Var}[T_n] = E[T_n^2] - E[T_n]^2$$

$$E[T_n^2] = \sum_{i=n}^{\infty} i^2 P[T_n = i]$$

$$= \sum_{i=n}^{\infty} i^2 \binom{i-1}{n-1} p^n (1-p)^{i-n}$$

$$= n \sum_{i=n}^{\infty} i \binom{i}{n} p^n (1-p)^{i-n}$$

$$= n \left(\sum_{i=n}^{\infty} (i+1) \binom{i}{n} p^n (1-p)^{i-n} - \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i}{n} p^n (1-p)^{i-n} \right)$$

$$= n \left((n+1) \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i+1}{n+1} p^n (1-p)^{i-n} - \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i}{n} p^n (1-p)^{i-n} \right)$$

$$= \ldots$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i = (1+t)^n \qquad \sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}}$$

$$\mathrm{Var}[T_n] = \frac{n(1-p)}{p}$$

③ Άλλες Γεωμετρικές και Αρνητικές Διωνυμικές Κατανομές

$X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες ισόνομες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p

$T_1 = \#$ δοκιμών ως την $1^{η}$ επιτυχία $\rightarrow$ Geom(p) στο $\{1, 2, \ldots\}$
$T_n = \#$ — // — $n^{η}$ — // — $\rightarrow$ NegBin(n, p) στο $\{n, n+1, \ldots\}$

$T_1' = \#$ αποτυχιών ως την $1^{η}$ επιτυχία $\rightarrow$ Geom(p) στο $\{0, 1, \ldots\}$
$T_n' = \#$ — // — — // — $n^{η}$ — // — $\rightarrow$ NegBin(n, p) στο $\{0, 1, \ldots\}$

$$T_1' = T_1 - 1$$
$$T_n' = T_n - n$$

$$P[T_1' = i] = P[T_1 = i+1] = (1-p)^i \cdot p$$

$$E[T_1'] = E[T_1] - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$$

$$Var[T_1'] = Var[T_1] = \frac{1-p}{p^2}$$

$$E[T_n'] = E[T_n] - n$$

$$Var[T_n'] = Var[T_n]$$

④ Η κατανομή Poisson

Κίνητρο: Προσέγγιση $Bin(n,p)$ για n μεγάλο και p μικρό

X = # επιτυχιών σε μία $Bin(n,p_n)$
ώστε $\lim_{n\to\infty} n p_n = \lambda$

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=i) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{i} p_n^i (1-p_n)^{n-i}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

$$= \frac{\lambda^i}{i!} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{n\cdot n\cdot \cdots \cdot n}}_{1} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}} \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-i}}_{1}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

Ορισμός:
Μία τ.μ. Z με τιμές στο $\{0,1,\dots\}$
με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(Z=i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \quad i=0,1,\dots$$

λέμε ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ.

Εφαρμογές:
Z = # ατυχημάτων που φθάνουν στο νοσοκομείο
τυπογραφικών λαθών σε ένα βιβλίο
σεισμών σε χρονικό διάστημα

$\sim$ Poisson

$$E[Z] = \sum_i i\,P[Z=i] = \sum_{i=\cancel{0}1}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^i}{(i-1)!} \qquad \underline{i-1=k}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = \lambda$$

$$Var[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2$$

$$E[Z^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 P[Z=i]$$

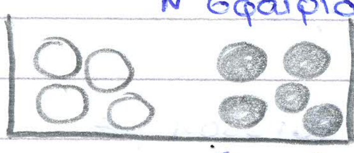
$$= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{(i-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{k!} =$$

$$= \lambda \cdot \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}_{E[Z]} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}_{=1}\Big) = \lambda(\lambda+1)$$

<u>Άρα</u> $Var[Z] = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda$

5 <u>Δειγματοληψία με/χωρίς επανάθεση από κάλπη</u>

N σφαιρίδια



→ Επιλέγω n σφαιρίδια

m άσπρα, (N−m) μαύρα

X = # άσπρων σφαιριδίων

με επανάθεση: $X \sim Bin\left(n, \frac{m}{N}\right)$

χωρίς επανάθεση: $X \sim Hypergeom(n, N, m)$