26.04.10 22ο μάθημα

Πολυδιάστατες τ.μ.

① Διδιάστατες τ.μ.

(X,Y) διαισθ. $\leftrightarrow$ 2 χαρακτηριστικά τυχαίου πειράματος

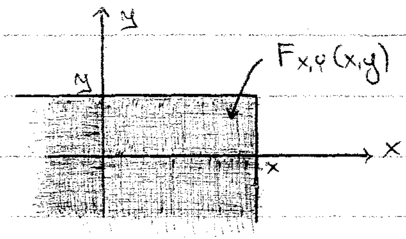
$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$ από κοινού σ.κ. των X, Y

$F_X(x) = P(X \le x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y)$ περιθώρια σ.κ. της X

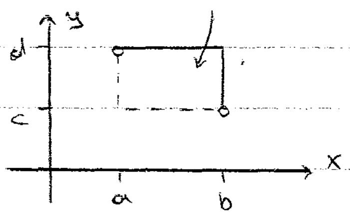
$F_Y(y) = P(Y \le y) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y)$ περιθώρια σ.κ. της Y

$\lim_{x,y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$

$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ \text{ή} \\ y \to -\infty}} F_{X,Y}(x,y) = 0$



π.χ. $P(a < X \le b, c < Y \le d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$



② Διακριτές διδιάστατες τ.μ.

(X,Y) διακριτή $\Leftrightarrow \exists \{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots\}$
$P((X,Y) \in \{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots\}) = 1$

$P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$ από κοινού σ.π.π.

$P_X(x) = P(X=x) = \sum_y P_{X,Y}(x,y)$ περιθώρια σ.π. της X

$P_Y(y) = P(Y=y) = \sum_x P_{X,Y}(x,y)$ περιθώρια σ.π. της Y

③ Παράδειγμα 1ο

Μια γειτονιά έχει οικογένειες εκ των οποίων

15% → 0 παιδιά

20% → 1 παιδί

35% → 2 παιδιά

30% → 3 παιδιά

Κάθε παιδί είναι αγόρι ή κορίτσι με πιθανότητα 1/2.

Πείραμα τύχης: Επιλέγω στην τύχη οικογένεια

X = # αγοριών της οικογένειας

Y = # κοριτσιών της οικογένειας

(X,Y) διακριτές $\Leftrightarrow$ $P((X,Y) \in \{(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1),(0,2),(3,0),(1,2),(2,1),(0,3)$

$P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

x \ y	0	1	2	3	$P_X(x)$
0	0.15	0.10	0.0875	0.0375	0.3750
1	0.10	0.175	0.1125	0	0.3875
2	0.0875	0.1125	0	0	0.2000
3	0.0375	0	0	0	0.0375
$P_Y(y)$	0.3750	0.3875	0.2000	0.0375	1

$0.175 = (0,35)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$

$\frac{1}{4}$ ↓ πιθ AK, $\frac{1}{4}$ ↓ πιθ KA

④ Παράδειγμα 2ο

2 κάλπες K_1, K_2 Πείραμα τύχης: Επιλέγω 2 σφαιρίδια

X = Αριθμός Κάλπης

Y = # άσπρων σφαιριδίων

K_1	K_2
9A	1A
1M	9M

	0	1	2	$P_X(x)$
1	$\frac{1}{2}\frac{1}{10}\frac{0}{9} \to 0$	$\frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\frac{9}{9}\right) \to 1/10$	$\frac{1}{2}\frac{9}{10}\frac{8}{9} \to 4/10$	1/2
2	4/10	1/10	0	1/2
$P_Y(y)$	4/10	2/10	4/10	1

⑤ Παράδειγμα 3ο

Κάλπη με 3 κόκκινα, 4 πράσινα, 5 μπλε σφαιρίδια

Πείραμα τύχης: Επιλέγω 3 σφαιρ. χωρίς επανάθεση

X = # κόκκινων

Y = # πρασίνων

$$P_{X,Y}(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{4}{y}\binom{5}{3-x-y}}{\binom{12}{3}}$$

$0 \le x \le 3$ → καλύπτεται από τον τελευταίο περιορισμό

$0 \le y \le 4$

$0 \le x+y \le 3$

$$P_X(x) = \sum_y P_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=0}^{3-x} \frac{\binom{3}{x}\binom{4}{y}\binom{5}{3-x-y}}{\binom{12}{3}} = \frac{\binom{3}{x}\sum_{y=0}^{3-x}\binom{4}{y}\binom{5}{3-x-y}}{\binom{12}{3}} =$$

$$= \frac{\binom{3}{x}\binom{9}{3-x}}{\binom{12}{3}}, \quad 0 \le x \le 3$$

Cauchy

$$\binom{r+s}{v} = \sum_{k=0}^{v}\binom{r}{k}\binom{s}{v-k}$$

⑥ Συνεχείς δισδιάστατες τ.μ.

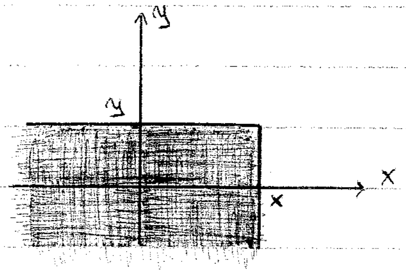
(X,Y) συνεχής $\Leftrightarrow$ $\exists\, f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ από κοινού σ.π.π. των X, Y

ώστε $P((X,Y) \in C) = \iint_C f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy$ περιθώρια σ.π.π. της X

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy$ περιθώρια σ.π.π. της Y

$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u,v)\, du\, dv$



$f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$

π.χ.

$P(a \leq X \leq b,\ c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(u,v)\, du\, dv$

Διαισθητικά:

$P(x < X \leq x+dx,\ y < Y \leq y+dy) \simeq f(x,y)\, dx\, dy$
$dx, dy \to 0$

⑦ Παράδειγμα

(X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f(x,y) = \begin{cases} ce^{-x}e^{-2y}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

a. $c = ;$

b. $f_X(x) = ;$

c. $f_Y(y) = ;$

d. $P(X > 1, Y < 1)$

e. $P(X < Y)$

f. $P(X < 1)$

a. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ce^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy = 1 \Rightarrow c\int_{0}^{\infty} e^{-2y}\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx\,dy = 1$

$\Rightarrow c\int_{0}^{\infty} e^{-2y}\underbrace{[-e^{-x}]_{0}^{\infty}}_{1}\,dy = 1 \Rightarrow c\left[-\frac{e^{-2y}}{2}\right]_{0}^{\infty} = 1 \Rightarrow c=2$

b. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{0}^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y}\,dy = e^{-x},\ x>0$ άρα $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$

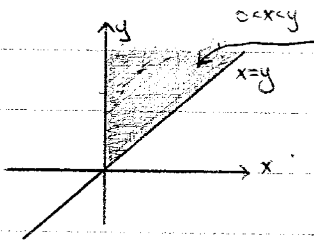
c. Όμοια $f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0 \\ 0, & \text{διαφορ} \end{cases}$

d. $P(X>1,\ Y<1) = \int_{-\infty}^{1}\int_{1}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{0}^{1}\int_{1}^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy =$

$= 2\int_{0}^{1} e^{-2y}[-e^{-x}]_{1}^{\infty}\,dy = 2e^{-1}\int_{0}^{1} e^{-2y}\,dy = 2e^{-1}\left[-\frac{e^{-2y}}{2}\right]_{0}^{1} =$

$= e^{-1}(1-e^{-2})$

e. $P(X<Y) = P((X,Y)\in C) = \int_{0}^{\infty}\int_{x}^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y}\,dy\,dx = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{y} 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy = \dots = \frac{1}{3}$



f. $P(X<1) = \int_{-\infty}^{1} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{1} e^{-x}\,dx = 1-e^{-1}$