30ο Μάθημα Πιθανοτήτων 21/5/2010

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

ΠΙΘΑΝΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ

① Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής

$$E[X] = E[E[X/Y]] = \begin{cases} \sum_y P(Y=y)\,E[X/Y=y], & Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,E[X/Y=y]\,dy, & Y \text{ συνεχής} \end{cases}$$

② Παράδειγμα

Οι A, B μονομαχούν ρίχνοντας διαδοχικά μέχρι να χτυπηθεί κάποιος

πιθ. επιτ. A $= \frac{1}{10}$ (ο A ρίχνει πρώτος)

πιθ. επιτ. B $= \frac{1}{5}$

P(κερδίζει ο A) = ; ← θ.Ο.Π.

E(βολών μέχρι να χτυπηθεί κάποιος) = ; ← θ. Διπλής Μ.Τ.

Λύση:

E: κερδίζει ο A

F: ευστοχεί ο A στην $1^η$ βολή

$P(E) = \underbrace{P(F)}_{1/10}\,\underbrace{P(E/F)}_{1} + \underbrace{P(F^c)}_{9/10}\,\underbrace{P(E/F^c)}_{=P(E')}$ (*), όπου E': κερδίζει ο A σε μονομαχία που ξεκινάει ο B.

και $P(E') = \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{4}{5}P(E)$ (**)

Από (*) και (**) $\Rightarrow P(E) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10}\cdot\frac{4}{5}P(E) \Rightarrow P(E) = \ldots$

X = αριθμός βολών μέχρι να χτυπηθεί κάποιος στη μονομαχία ($A \to \frac{1}{10}$, $B \to \frac{1}{5}$ και ο A ρίχνει πρώτος)

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{αν ο A ευστοχεί στην } 1^η \text{ βολή} \\ 0, & \text{αν ο A δεν ευστοχεί } \gg \end{cases}$$

$$E[X] = \underbrace{P(Z=1)}_{1/10}\,\underbrace{E[X/Z=1]}_{1} + \underbrace{P(Z=0)}_{9/10}\cdot\underbrace{E[X/Z=0]}_{1+E[X']} \quad (*)$$

X' = αριθμός βολών μέχρι να χτυπηθεί κάποιος

$\left(\begin{matrix} A \to 1/10 \\ B \to 1/5 \end{matrix} \quad \text{ο } B \text{ αρχίζει πρώτος} \right)$

$$E[X'] = \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{4}{5}(1 + E[X]) \quad (**)$$

$(*) \ \Delta \ (**) \Rightarrow \ E[X] = \ldots$

$E[X'] = \ldots$

3 Παράδειγμα

$X_1, X_2, \ldots$ ανεξ. και ισόνομες τ.μ.

με μέση τιμή $E[X]$.

N ακέραια μη αρνητική τ.μ. ανεξ. των X_i

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad E[S_N] = ;$

$$\cancel{E[X_1 + X_2 + \ldots + X_N] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_N] = N \cdot E[X]}$$ ΠΟΛΥ ΛΑΘΟΣ

$$E[S_N] = E[E[S_N | N]] = \sum_{N=0}^{\infty} P(N=n) \cdot E[S_N | N=n]$$

$$E[S_N | N=n] = E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \,/\, N=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \,/\, N=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n \cdot E[X]$$

Άρα:

$$E[S_N] = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, n} \, E[X] = E[N] \, E[X]$$

$$\cancel{Var[S_N] = Var\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = N \, Var[X]} \quad ή \quad \cancel{= E[N] \, Var(X)}$$ ΠΟΛΥ ΛΑΘΟΣ.

4) Πιθανογεννήτριες - Ορισμός

X ακέραια μη αρνητική τ.μ. με σπ. $p_X(n) = P(X=n)$, $n=0,1,2,\dots$

Πιθανογεννήτρια της X.

$$P_X(z) = E[\underbrace{z^X}_{g(X)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{a_n}{P(X=n)}\, z^n \qquad \left(\text{Δηλ. } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \right)$$

5) Ιδιότητες

1) $P(X=n) = \dfrac{P_X^{(n)}(0)}{n!}$, $n=0,1,2,\dots$

2) X, Y ισόνομες $\Longleftrightarrow P_X(z) = P_Y(z)$

3) $\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \dots, X_n \text{ ανεξ. τ.μ.} \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{array}\right\} \Rightarrow P_{S_n}(z) = P_{X_1}(z) \dots P_{X_n}(z)$

Απόδειξη:

$$P_{S_n}(z) = E[z^{S_n}] = E[z^{X_1+X_2+\dots+X_n}] = E[\overbrace{z^{X_1} z^{X_2} \dots z^{X_n}}^{\text{ανεξ.}}] =$$
$$= E[z^{X_1}]\, E[z^{X_2}] \dots E[z^{X_n}] = P_{X_1}(z) \dots P_{X_n}(z)$$

4) $\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \dots \text{ ανεξ. + ισόνομες} \\ N \text{ ανεξ. των } X_i \text{ ακέρ. } \geq 0 \\ S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \end{array}\right\} \Rightarrow P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z))$

Απόδειξη:

$$P_{S_N}(z) = E[z^{S_N}] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, E[z^{S_N} \mid N=n]$$

Όμως:

$$E[z^{S_N} \mid N=n] = E[z^{\sum_{i=1}^{n} X_i} \mid N=n] = E[z^{\sum_{i=1}^{n} X_i}] = P_X(z)^n$$

Άρα:

$$P_{S_N}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) P_X(z) = P_N(P_X(z)).$$

6) Παράδειγμα

1) $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ $\qquad X = \begin{cases} 1, & \text{με πιθ. } p \\ 0, & \text{με πιθ. } 1-p \end{cases}$

$$P_X(z) = (1-p)z^0 + pz^1 = pz + 1 - p$$

2) $X \sim Bin(n,p)$ $\quad X = \sum_{i=1}^{n} I_i$, $I_i = \begin{cases} 1 & , \text{με πιθ. } p \\ 0 & , \text{με πιθ. } 1-p \end{cases}$ ανεξ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_X(z) = (pz + 1 - p)^n$.

3) $X \sim Geom(p)$

$P(X=n) = p(1-p)^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$

$$P_X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} z^n = pz \sum_{n=1}^{\infty} [(1-p)z]^{n-1} = pz \cdot \frac{1}{1-(1-p)z}$$

4) $X \sim NegBin(n,p) \Rightarrow P_X(z) = \left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^n$, αφού η NegBin είναι άθροισμα n Geom(p)

5) $X \sim Poisson(\lambda)$

$P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$, $n = 0, 1, \ldots$

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{-\lambda(1-z)}$$

(7) Παράδειγμα

N = # των ασθενών που φθάνουν σε εφημερία νοσοκομείου.

$N \sim Poisson(\lambda)$.

$X_i = \begin{cases} 1 & , \text{αν ο ασθενής εισαχ. στο νοσοκ.} \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$

$P(X_i = 1) = p$, $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ = # ασθενών που εισαχ. στο νοσοκ.

Τι κατανομή ακολουθεί το S_N;

Λύση:

Έχουμε $N \sim Poisson(\lambda)$

$P_N(z) = e^{-\lambda(1-z)}$

$X_i \sim Bernoulli(p)$. $\quad P_X(z) = 1 - p + pz$.

Άρα από ιδιότητα 4)

$$P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z)) = P_N(1-p+pz) = e^{-\lambda(\cancel{1}-\cancel{1}+p-pz)} = e^{-\lambda p(1-z)}$$

Άρα: $S_N \sim Poisson(\lambda p)$.