6ο Μάθημα Πιθανοτήτων 7/5/2010

Διασπορά - Συνδιακύμανση

1) Ορισμός

$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$ ⟵ Μετράει μεταβλ. της X.

$Cov[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$ ⟵ Μετράει συσχέτιση των X, Y.

↑
Συνδιακύμανση
(Covariance)

2) Ιδιότητες

) $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

) $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$

) $Var[X] = 0 \Rightarrow X = \underset{E[X]}{\underset{\parallel}{c}}$ με πιθανότητα 1

) $Cov[X,Y] = 0 \overset{ορ.}{\Leftrightarrow}$ X, Y ασυσχέτιστες

) X, Y ανεξάρτητες $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ X, Y ασυσχέτιστες

) $Cov[X,Y] = Cov[Y,X]$

) $Var[X] = Cov[X,X]$

) $Var[aX+b] = a^2 Var[X]$

) $Cov[aX+b, cY+d] = a \cdot c \, Cov[X,Y]$

) $Cov\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov[X,Y]$

π.χ. $Cov[X_1 + X_2, Y_1 + Y_2] = Cov[X_1, Y_1] + Cov[X_1, Y_2] + Cov[X_2, Y_1] + Cov[X_2, Y_2]$

1) $Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = Cov\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X] + 2\sum_{1 \le i < j \le n} Cov[X_i, X_j]$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov[X_i, X_j] = Cov[X_1, X_1] + Cov[X_1, X_2] + Cov[X_2, X_2]$

9) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ. $\Rightarrow Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]$

Αποδείξεις:

1) $Cov[X,Y] = E[XY - XE[Y] - E[X]Y + E[X] \cdot E[Y]] =$

$= E[XY] - E[XE[Y]] - E[E[X]Y] + E[E[X]E[Y]] =$

$= E[XY] - E[Y]E[X] - \cancel{E[X]E[Y]} + \cancel{E[X]E[Y]}$

3) (για διακριτές)

$Var[X]=0 \Rightarrow E[(X-E[X])^2] = \sum_x (x-E[X])^2 p(x) = 0 \Rightarrow$ ← σ.π. της X

$\Rightarrow x - E[X] = 0 \quad \forall x$ με $p(x)>0$

$\Rightarrow X = E[X] \quad \forall x$ με $p(x)>0$.

5) ($\Rightarrow$) X, Y ανεξ. $\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y] \overset{2)}{\Rightarrow} Cov[X,Y]=0$

($\Leftarrow\!\!\!\!\!/$) X, Y όχι ανεξ. αλλά ασυσχέτιστες

(X,Y) διακριτή

$P(X=-1) = P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{3}$

$Y = \begin{cases} 0 & , X \neq 0 \\ 1 & , X=0 \end{cases}$

$x \backslash y$	0	1	$p_X(x)$
-1	1/3	0	1/3
0	0	1/3	1/3
1	1/3	0	1/3
$p_Y(y)$	2/3	1/3	1

Άρα X, Y όχι ανεξ.

Όμως: $\left.\begin{array}{l} E[X]=0 \Rightarrow E[X]E[Y]=0 \\ X\cdot Y = 0 \Rightarrow E[XY]=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow Cov[X,Y]=0$, οπότε X, Y ασυσχέτιστες.

10) $Cov\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} Y_i\right)\right] \quad E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] E\left[\sum_{j=1}^{m} Y_j\right] =$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} E[X_i, Y_j] - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} E[X_i]E[Y_j]$

3 Υπολογισμός Μέσης Τιμής και Διασπορών Ειδικών Διακριτών

1) $X \sim Bin(n,p)$

$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad 0 \le x \le n$

$E[X] = ;$ $\qquad Var[X] = ;$

$X = \sum_{i=1}^{n} I_i \qquad I_i = \begin{cases} 1 & , \text{με πιθ. } p \\ 0 & , \text{με πιθ. } 1-p \end{cases}$, I_i ανεξ.

$E[I_i] = p\cdot 1 + (1-p)\cdot 0 = p$ $\qquad \Rightarrow$

$Var[I_i] = E[I_i^2] - (E[I_i])^2 = p - p^2 = p(1-p)$

$$\Rightarrow E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} I_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[I_i] = \underline{\underline{np}}$$

$$Var[X] = Var\left[\sum_{i=1}^{n} I_i\right] \overset{I_i \text{ ανεξ.}}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} Var[I_i] = np(1-p)$$

2) $X \sim NegBin(n,p)$ $\quad P(X=x) = \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{\overline{x-n}},\ x \geq n$, $\quad E[X] = ;$, $Var[X] = ;$

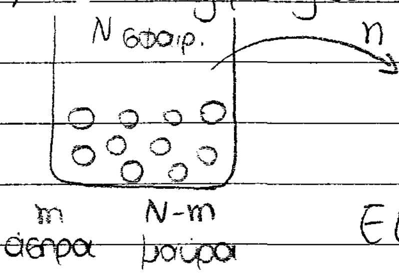
$X = \sum_{i=1} X_i$, $\quad X_i = \#$ δοκιμών από την

$i-1$ ως την i επιτυχία

$X_i \sim Geom(p)$

$E[X_i] = \frac{1}{p} \qquad Var[X_i] = \frac{1-p}{p^2}$

3) $X \sim Hypergeom(n, N, m)$



$X = \#$ άσπρων , $\quad P(X=x) = \dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \ 0 \leq x \leq n$

$E[X] = ; \qquad Var[X] = ;$

$X = \sum_{i=1}^{n} I_i \qquad$ όπου $\qquad I_i = \begin{cases} 1, & \text{αν το } i \text{ σφαιρ. είναι άσπρο} \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$

<u>όχι</u> ανεξάρτητα

$E[I_i] = P(\text{το } i \text{ σφαιρ. να είναι άσπρο}) = \frac{m}{N}$

$Var[I_i] = E[I_i^2] - (E[I_i])^2 = \frac{m}{N} - \frac{m^2}{N^2} = \frac{m}{N}\left(1 - \frac{m}{N}\right) = p(1-p)$

$Cov[I_i, I_j] = E[I_i I_j] - E[I_i]E[I_j] = \frac{m}{N}\cdot\frac{m-1}{N-1} - \frac{m^2}{N^2} = \frac{m}{N}\left(\frac{m-1}{N-1} - \frac{m}{N}\right)$

$\left(\frac{m}{N} = \text{ποσοστό άσπρων} = \text{"πιθ επιτυχ."}\right)$

$I_i I_j = \begin{cases} 1, & i,j \text{ λευκά} \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$, $\quad E[I_i I_j] = P(i,j \text{ σφ. λευκά}) = \frac{m}{N}\cdot\frac{m-1}{N-1}$

$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} I_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[I_i] = np = \frac{n \cdot m}{N}$

$Var[X] = Var\left[\sum_{i=1}^{n} I_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[I_i] + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov[I_i, I_j] = np(1-p) +$

$$+ \cancel{2} \frac{n(n-1)}{\cancel{2}} \frac{m}{N} \left(\frac{m-1}{N-1} - \frac{m}{N} \right)$$